Korrelationsverfahren zur Bestimmung der Zeitverschiebung von regellosen Signalen

Autor(en): **Meyr, H. / Ryser, H. / Zimmer, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **66 (1975)**

Heft 2

PDF erstellt am: **30.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-915254

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Korrelationsverfahren zur Bestimmung der Zeitverschiebung von regellosen Signalen

Eine theoretische Untersuchung

Von H. Meyr, H. Ryser und C. Zimmer

62-501.2

Zur Messung der Zeitverschiebung zwischen zwei Versionen eines regellosen Signals wird ein Regelkreis («Tracking System») benützt, der eine elektronische Verzögerung laufend der tatsächlichen Zeitverschiebung nachführt. Die notwendige Regelgrösse wird aus der Korrelation der beiden Signale gewonnen.

Im ersten Abschnitt des Aufsatzes wird das Blockdiagramm des Meßsystems diskutiert und ein mathematisch äquivalentes Modell hergeleitet. Die darauffolgende Analyse benützt die Fokker-Planck-Methode. Damit werden statistische Aussagen über die Messqualität des Systems möglich. Die Resultate können zur Dimensionierung und Optimierung verwendet werden. Im letzten Abschnitt wird die Theorie auf das Problem der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung angewendet.

Pour la mesure d'un décalage temporel entre deux versions d'un signal non réglé, on a recours à un circuit de réglage produisant une temporisation électronique suivant le décalage effectif. La grandeur de réglage nécessaire est obtenue par corrélation des deux signaux.

Le diagramme fonctionnel du système de mesure est tout d'abord décrit et un modèle mathématiquement équivalent est établi. L'analyse qui suit applique la méthode de Fokker-Plank, ce qui rend possible des indications statistiques sur la qualité de mesure du système. Les résultats peuvent servir au dimensionnement et à l'optimalisation. Pour terminer, la théorie est appliquée au problème de la mesure de la vitesse sans contact matériel.

1. Einführung

Das Problem, die Laufzeitdifferenz T zwischen zwei Versionen des gleichen Signals zu bestimmen, findet sich in vielen Gebieten wie Radar, Sonar [1][1]), Satellitenkommunikation [2] usw. Dabei kann es sich, wie z. B. beim Radar, darum handeln, die Verzögerung zwischen ausgesandtem und reflektiertem Signal zu bestimmen, oder auch darum, die Laufzeitdifferenz eines von einer Quelle emittierten Signals zu bestimmen, das auf verschiedenen Wegen zwei räumlich getrennte Empfänger erreicht. Als Beispiel sei die Funkpeilung erwähnt [3; 4].

Eine leicht abgeänderte Form des Messproblems findet man in der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung. Die Geschwindigkeit eines Objektes – oder auch diejenige eines strömenden Mediums – lässt sich prinzipiell dadurch bestimmen, dass die Laufzeit T des betreffenden Objektes zwischen zwei festen Punkten gemessen wird. Bei bekanntem Abstand L zwischen den zwei Punkten ist die Geschwindigkeit dann

$$v = \frac{L}{T} \tag{1}$$

Das Blockschema eines solchen Gerätes ist in Fig. 1 dargestellt. Zwei lichtemittierende Dioden, die in Bewegungsrichtung im Abstand L hintereinander angeordnet sind, werfen ihr Licht auf die Oberfläche. Entsprechend der örtlichen Beschaffenheit der Oberfläche wird mehr oder weniger Licht reflektiert, das dann in den Photodioden in elektrische Signale zurückverwandelt wird. Im Idealfall sind die beiden regellosen Signale von identischer Form und nur um die Laufzeit T gegeneinander verschoben. Geschwindigkeit v, Abstände L und T sind dabei durch Gl. (1) verknüpft. Zur Bestimmung der Laufzeitdifferenz T kann man die Tatsache ausnützen, dass die Korrelationsfunktion

$$R_{x,x}(T-\tau) = E\left[x(t-T)\,x(t-\tau)\right]$$

eine gerade Funktion ist und ihr Maximum für $T-\tau=0$ hat.

Das Messverfahren (Fig. 1) beruht nun darauf, das Signal $x(t)$ des ersten Messgebers in der Verzögerungsleitung künstlich zu verzögern, und zwar um eine Zeit $\hat{T}$, die der Rechner auf $\hat{T}=T$ einstellen muss. Im Prinzip könnte man sich einen Korrelationsrechner vorstellen, der die Korrelationsfunktion für verschiedene $(\hat{T}-T)$ berechnet und zu jedem Zeitpunkt das Maximum bestimmt. Die genannten Operationen lassen sich aber beträchtlich vereinfachen. Da nur der Ort des Maximums, nicht aber sein Wert von Interesse ist, stellt sich die Frage, ob nicht eine Messgrösse gefunden werden kann, die für $\hat{T}=T$ eine Nullstelle hat (Fig. 2). Ein solches Nullstellenverfahren hätte den Vorteil, dass

1. es unabhängig von Schwankungen des Maximumwertes wäre;
2. die Nullstelle – innerhalb gewisser Grenzen – durch Rückkopplung gefunden werden könnte.

In der praktischen Anwendung kommen Leistungsschwankungen der Signale bis zu 60 dB vor (die durch einen AGC[2]) ausgemittelt werden müssen), so dass ein Extremalwertregler kaum funktionsfähig wäre. Davon abgesehen ist ein Extremalwertregler erheblich aufwendiger als eine einfache Rückkopplungsschaltung. Man kann zeigen [5; 6], dass eine ungerade Korrelationsfunktion durch ein lineares Netzwerkpaar erzeugt werden kann (Fig. 3).

Der Erwartungswert des Produktes $E\left[y_1(t)\cdot y_2(t)\right]$ ist dann eine ungerade Funktion der Differenz $\Phi = T-\hat{T}$ und wirkt als Regelgrösse auf die variable Verzögerungsleitung. Für $\Phi=0$ erscheint am Multiplikatorausgang im Mittel der Wert Null, d. h., der Regelkreis befindet sich im stabilen Arbeitspunkt. Es ist wichtig festzuhalten, dass das Produkt $y_1(t)\cdot y_2(t)$ für $\Phi=0$ nur im Mittel verschwindet. Dem Mittelwert ist in

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

[2]) AGC = Automatic Gain Control (selbsttätige Verstärkungsregelung).

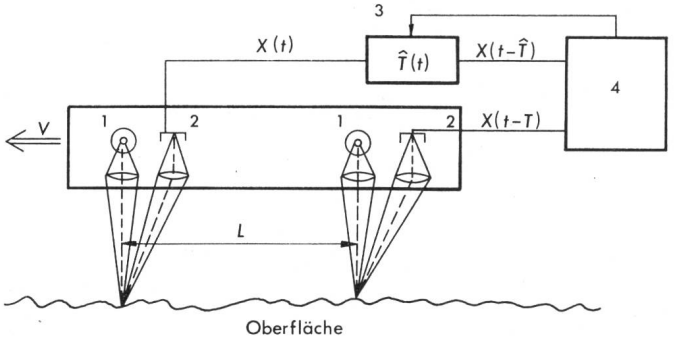

Fig. 1 Berührungslose Geschwindigkeitsmessung
1 lichtemittierende Dioden
2 Photodioden
3 steuerbare Verzögerungsleitung
4 Korrelationsrechner

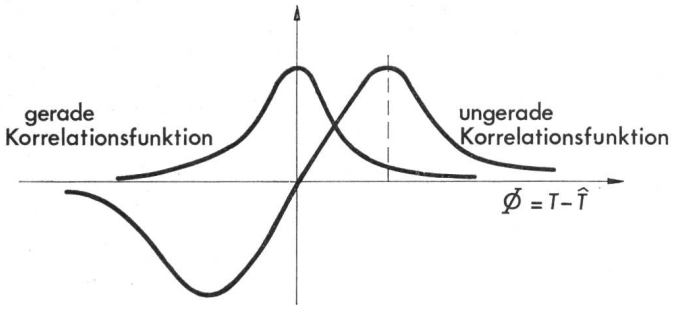

Fig. 2 Gerade und ungerade Korrelationsfunktion

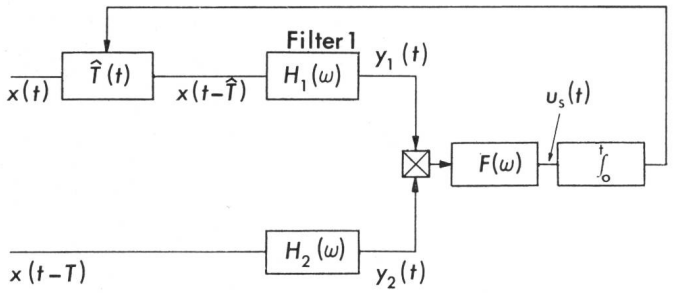

Fig. 3 Blockschema des Korrelationsrechners

jedem Fall ein mittelwertfreier Rauschprozess überlagert, selbst dann, wenn die beiden Signale $x(t-T)$ und $x(t-\hat{T})$ in beiden Kanälen identisch sind. Anschaulich, aber nicht ganz korrekt, kann man die mathematische Zerlegung in Scharmittelwert und mittelwertfreien Rauschprozess

$$y_1(t) \cdot y_2(t) \equiv E\left[y_1(t) \cdot y_2(t)\right] + \\ + \left\{y_1(t) \cdot y_2(t) - E\left[y_1(t) \cdot y_2(t)\right]\right\} \tag{2}$$

in Analogie setzen zur Zerlegung eines Signals in Gleichstrom- und Wechselstromanteil. Das Filter $F(\omega)$ hat die Aufgabe, Mittelwert und Rauschen möglichst gut voneinander zu trennen.

In Anlehnung an den Phase-Locked Loop (PLL) soll der in Fig. 3 dargestellte Regelkreis Delay-Locked Loop (DLL) genannt werden. Obwohl der DLL am Beispiel der berührungslosen v-Messung eingeführt wurde, ist klar, dass der Regelmechanismus für alle andern genannten Anwendungen der gleiche ist.

Die Funktion des DLL ist in mancher Hinsicht analog derjenigen des PLL. Beim PLL wird eine lokal erzeugte, periodische Referenz mit dem ankommenden Signal korreliert. Analog dem DLL ist der Mittelwert der Multiplikatorspannung eine ungerade Funktion der Phasendifferenz $(\Theta_1 - \hat{\Theta}_1)$. Im Gegensatz zum DLL ist diese Funktion aber periodisch.

Trotz der Einfachheit des Messprinzips bereitet die mathematische Analyse des Regelkreises grosse Mühe. Dies hat zwei Hauptgründe:

1. Die zur Laufzeitmessung verwendeten Signale sind regellose Grössen.
2. Wegen des Multiplikators ist der Regelkreis nichtlinear.

Mathematisch gesehen hat man es mit nichtlinearen, stochastischen Differentialgleichungen zu tun. Leider ist es nicht möglich, eine befriedigende Analyse durch Linearisierung zu erhalten. Zum einen würden in vielen – auch für die Praxis wichtigen – Fällen die Ergebnisse ungenau und zweifelhaft, zum anderen liessen sich wichtige Phänomena mit einer linearisierten Theorie überhaupt nicht erklären.

Der erste Teil dieser Publikation ist der mathematischen Erfassung (Modellbildung) gewidmet. Es wird ein mathematisch äquivalentes, übersichtliches Modell für den Regelkreis von Fig. 3 hergeleitet. Mit Hilfe dieses Modells lässt sich das Verhalten des Regelkreises einfach überblicken und verstehen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich im wesentlichen mit dem mathematischen Werkzeug zur Analyse des Regelkreises. Vorerst werden die Leistungskriterien von deterministischen Systemen – wie z. B. Klirrfaktor, Frequenzgang – denjenigen der in der statistischen Nachrichtentechnik üblichen gegenübergestellt. Wegen der regellosen Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ ist auch $\Phi(t)$ selber eine regellose Grösse, die sich durch eine zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\Phi; t)$ beschreiben lässt. Diese Dichtefunktion $p(\Phi; t)$ gehorcht einer partiellen Differentialgleichung, die in der Literatur unter dem Namen Fokker-Planck-(F-P-)Gleichung bekannt ist. Die F-P-Gleichung wird heuristisch hergeleitet. Von grossem Nutzen für das Verständnis erweist sich eine physikalische Interpretation der F-P-Gleichung.

Anschliessend wird der DLL im Detail analysiert. Leistungskriterien wie Streuung σ_Φ^2, die mittlere Zeit zwischen «ausser Tritt fallen» usw. werden für ein Beispiel numerisch berechnet und die analytischen Resultate mit den Ergebnissen einer Computersimulation verglichen.

Im letzten Teil wird die Theorie auf das Problem der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung angewendet. Ausgehend von der exakten Theorie werden verschiedene Näherungsformeln für die wichtigsten Leistungskriterien und deren Abhängigkeit hergeleitet.

2. Modellbildung

2.1 Aufbau des Regelkreises

Die wichtigsten Funktionsblöcke eines analogen DLL (Fig. 5) sind der Multiplikator, ein Tiefpassfilter $F(\omega)$, das Filterpaar $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ zur Erzeugung der ungeraden Korrelationsfunktion sowie eine steuerbare Verzögerungsleitung.

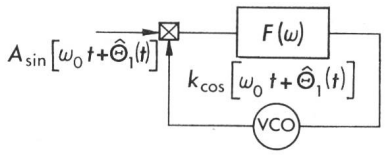

Fig. 4 Phase-Locked Loop (PLL)
VCO spannungsgesteuerter Oszillator

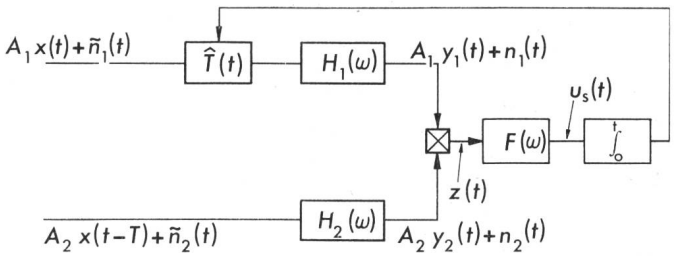

Fig. 5 Blockschaltbild und Signale des analogen DLL

Man kann zeigen [5], dass zwischen den beiden physikalisch realisierbaren Filtern $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[H_1(\omega)\cdot H_2{}^*(\omega)\right] &= 0 \\ \mathrm{Im}\left[H_1(\omega)\cdot H_2{}^*(\omega)\right] &= -\,\mathrm{Im}\left[H_1(-\omega)\cdot H_2{}^*(-\omega)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

erfüllt sein muss, damit gilt:

$$R_{y1,\,y2}(\Phi) = -\,R_{y1,\,y2}(-\Phi)$$

Die Aufteilung der Pole und Nullstellen des Produktes $H_1(\omega)\cdot H_2{}^*(\omega)$ ist nicht eindeutig. Eine speziell geeignete Aufteilung (siehe 2.5) führt zur folgenden Zerlegung:

$$H_1(\omega) = i\omega\, H_2(\omega) \tag{4}$$

Beide Signale durchlaufen das gleiche Netzwerk $H_2(\omega)$. Die ungerade Korrelationsfunktion wird dann durch den idealen Differentiator $(i\omega)$ im oberen Signalpfad erzeugt. Man beachte, dass der Differentiator nur in Verbindung mit dem Filter $H_2(\omega)$ physikalisch realisierbar ist. Im einfachsten Fall gilt

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{i\omega}{1+i\omega\alpha} \\ H_2(\omega) &= \frac{1}{1+i\omega\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

Das Steuergesetz der Verzögerungsleitung sei linear:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t} = K\,u_s(t) \tag{6}$$

(K = Proportionalitätsfaktor)

Es ist zu beachten, dass am Ausgang einer passiven, verlustlosen Verzögerungsleitung mit $x(t)$ als Eingangsgrösse nicht $x(t-\hat{T})$, sondern

$$y(t) = \sqrt{1-\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t}}\;x(t-T) \tag{7}$$

erscheint [9]. Der Wurzelfaktor $\sqrt{1-\mathrm{d}\hat{T}/\mathrm{d}t}$ bewirkt, dass Eingangs- und Ausgangsenergie gleich sind. In den meisten praktischen Anwendungen ist die Ungleichung

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t} \ll 1 \tag{8}$$

erfüllt, und man kann diesen Effekt vernachlässigen.

In der Praxis ist meistens in beiden Signalkanälen ein AGC eingebaut, damit die Leistung am Eingang des Regelkreises konstant bleibt. Für die weitere Untersuchung sei aber angenommen, dass die Signalleistung P_1, P_2 der beiden Kanäle konstant sei:

$$P_1 = A_1{}^2 \qquad P_2 = A_2{}^2 \tag{9}$$

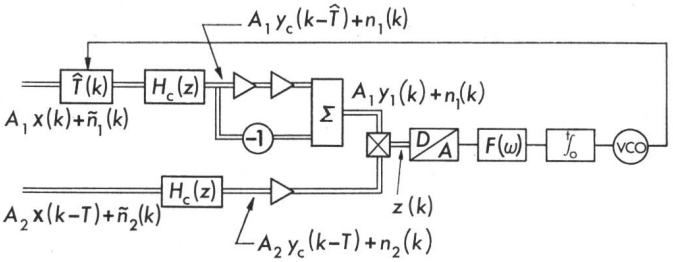

Fig. 6 Blockschaltbild und Signale des digitalen DLL
═══ digitaler Signalpfad

Der Einfluss des AGC wird in [9] diskutiert.

Im Blockschema des digitalen DLL (Fig. 6) findet man die gleichen Funktionsblöcke wie beim analogen DLL. Zusätzlich sind noch Abtaster, A/D- und D/A-Wandler vorhanden. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen, variablen Verzögerungsleitungen lassen sich Verzögerungen von Abtastwerten durch Schieberegister mit variabler Abtastfrequenz technisch einfach bewerkstelligen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass sich $\hat{T}$ während der Durchlaufszeit $\hat{T}$ nur wenig ändern darf

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t}\,\hat{T} \ll \hat{T} \qquad \geqq \frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t} \ll 1 \tag{10}$$

damit das Schieberegister angenähert das Verhalten einer Verzögerungsleitung hat. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, können Oszillationen des Regelkreises auftreten. Da die Frequenz f_p wertekontinuierlich ist und wegen $\mathrm{d}\hat{T}/\mathrm{d}t \ll 1$, begeht man einen vernachlässigbaren Fehler, wenn man auch für den digitalen DLL das Steuergesetz (6) annimmt. Damit ist man in der Lage, beide Regelkreise durch Differentialgleichungen (statt in einem Fall Differenzengleichungen) zu beschreiben. Dies ist für die folgende Analyse von grosser Wichtigkeit, da man in beiden Fällen die Fokker-Planck-Methode anwenden kann.

Das zu Gl. (3) korrespondierende Resultat für den digitalen DLL lautet [5]:

$$H_1(z)\cdot H_2(1/z) = -\,H_1(1/z)\,H_2(z) \tag{11}$$

Auch hier erweist sich eine symmetrische Aufteilung der Pole und Nullstellen als am besten geeignet (Fig. 6). Man prüft leicht nach, dass der Mittelwert von $E\left[z(t;\Phi)\right]$ dann gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E\left[z(t;\Phi)\right] = E\Big\{\left[-A_1\,y_c(k-\hat{T}) + A_1\,y_c(k-2-\hat{T})\right]\cdot \\ \cdot\,A_2\,y_c(k-1-T)\Big\} = A_1 A_2\left[-R_{yc,\,yc}(\Phi+1) + \right. \\ \left. + R_{yc,\,yc}(\Phi-1)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Gl. (12) zeigt, dass man im einfachsten Fall nur zwei um $2\cdot 1/f_p$ verschobene Punkte der Korrelationsfunktion $R_{yc,\,yc}(k)$ berechnen muss. Infolge der geraden Symmetrie von $R_{yc,\,yc}$ $(\Phi = n+\varepsilon)$, $|\varepsilon| < 1$, verschwindet die Differenz für $\Phi = 0$. Wegen der grossen Einfachheit findet sich diese Lösung in vielen praktischen Anwendungen, z. B. [9; 10].

2.2 Charakterisierung des Produktprozesses

Schon bei der qualitativen Beschreibung des Regelkreises in Abschnitt 1 wurde klar, dass die statistischen Eigenschaften des Produktprozesses $y_1(t)\cdot y_2(t)$ von zentraler Bedeutung sind. Für diese Anwendung genügt – wie man später sehen wird – die Kenntnis des Mittelwertes $E\left[z(t-\Phi)\right]$ und des Leistungsdichtespektrums $S_{z,\,z}(\omega;\Phi)$ des Produktprozesses.

Bei jeder realen Anwendung sind die Nutzsignale $x(t)$ und $x(t-\hat{T})$ durch zusätzliche Störsignale gestört (Fig. 5 und 6). Diese Störsignale können additiv oder multiplikativ einwirken. Multiplikative Störungen entstehen beispielsweise durch den AGC und verursachen systematische Messfehler, da die Korrelationsfunktion $R_{y1,\,y2}(\Phi)$ ihre Symmetrie verliert. Additive Störungen entstehen durch Verstärkerrauschen, Rüttelbewegungen des Vehikels, Quantisierungsfehler, um nur einige typische Störursachen zu nennen. Solche additiven Störungen führen zu einer Vergrösserung der Streuung von Φ, nicht aber zu systematischen Messfehlern, da die Signale $\tilde{n}_1(t)$ und $\tilde{n}_2(t)$ (Fig. 5) mit dem Nutzsignal unkorreliert sind. Für die weiteren

Untersuchungen sollen nur mittelwertsfreie, gegenseitig und mit dem Nutzsignal $x(t)$ unkorrelierte Störprozesse berücksichtigt werden.

$$E\left[n_K(t)\right] = 0$$
$$E\left[n_K(t) \cdot n_j(t)\right] = 0 \qquad E\left[n_K(t) \cdot x(t)\right] = 0 \tag{13}$$

Der Produktprozess $z(t; \Phi)$ sei in Mittelwert und mittelwertfreien Rauschprozess zerlegt:

$$z(t; \Phi) \equiv E\left[z(t; \Phi)\right] + \underbrace{\left\{z(t; \Phi) - E\left[z_K(t; \Phi)\right]\right\}}_{n(t; \Phi)} \tag{14}$$

Diese Aufspaltung ist eine rein mathematische Konstruktion und physikalisch nicht realisierbar. Ebenfalls gilt es zu beachten, dass $E\left[z(t; \Phi)\right]$ ein mathematisch definierter Scharmittelwert ist, d. h., würde man eine sehr grosse Anzahl identischer Regelkreise zum gleichen Zeitpunkt t betrachten, dann würde man finden:

$$E\left[z(t; \Phi)\right] = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} 1/N \cdot z_K(t; \Phi) \tag{15}$$

$z_K(t; \Phi)$ = Wert des k-ten Systems

Dieser Scharmittelwert darf *nicht* verwechselt werden mit dem Zeitmittelwert

$$\bar{z}(t; \Phi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} z(t; \Phi)\, dt \tag{16}$$

Während Gl. (15) auch für nichtstationäre Prozesse – wie sie hier vorliegen – sinnvoll ist, ist $\bar{z}(t; \Phi)$ für dieses Problem überhaupt nicht definiert.

2.2.1 Mittelwert $E\left[z(t; \Phi)\right]$

Wegen der Linearität des Netzwerkpaares $h_1(t)$, $h_2(t)$ sind die Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ gegeben durch Faltung des Eingangssignals mit den entsprechenden Stossantworten. Das durch das Nutzsignal verursachte Signal bezeichne man mit:

$$A_1\, y_1(t) = h_1(t) * x(t - \hat{T}) \qquad E\left[y_1^2(t)\right] = 1$$
$$A_2\, y_2(t) = h_2(t) * x(t - T) \qquad E\left[y_2^2(t)\right] = 1 \tag{17}$$

Die Signalleistung in beiden Kanälen ist dann:

$$P_1 = A_1^2 \qquad P_2 = A_2^2 \tag{18}$$

Die Störsignale $n_1(t)$, $n_2(t)$ sind dann sinngemäss durch

$$n_1(t) = h_1(t) * \tilde{n}_1(t)$$
$$n_2(t) = h_2(t) * \tilde{n}_2(t) \tag{19}$$

gegeben. Wegen der Annahme in Gl. (13) findet man für den (evtl. zeitabhängigen) Mittelwert $E\left[z(t; \Phi)\right]$:

$$E\left[z(t; \Phi)\right] = A_1\, A_2\, E\left[y_1(t) \cdot y_2(t)\right] \tag{20}$$

Gl. (20) kann auch in der Form

$$E\left[z(t; \Phi)\right] = A_1\, A_2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(t - v) \cdot h_2(t - \xi) \cdot \cdot E\left\{x\left[v - \hat{T}(v)\right] \cdot x\left[\xi - T(\xi)\right]\right\} dv d\xi \tag{21}$$

geschrieben werden. Der Mittelwert $E\left\{x\left[v - \hat{T}(v)\right] \cdot x\left[\xi - T(\xi)\right]\right\}$ wird durch die statistischen Eigenschaften des Prozesses x und die Dynamik von $T(t)$ bestimmt. Es sei angenommen, dass der Prozess x stationär ist. Im allgemeinen sind T und $\hat{T}$ keine Konstanten und daher ist $E\left\{x\left[v - \hat{T}(v)\right] \cdot x\left[\xi - T(\xi)\right]\right\}$ – trotz der Stationarität von x – nicht nur von der Differenz der Argumente abhängig. Bezeichnet man mit c_k, $k = 1{,}2$, die Zeitdauer, während der die Stossantwort der beiden Netzwerke wesentlich von Null verschieden ist, so darf man die Zeitabhängigkeit von $T(t)$ und $\hat{T}(t)$ vernachlässigen, falls die Änderung dieser beiden Grössen während der Zeit c_k vernachlässigbar ist.

$$\frac{d\hat{T}}{dt} c_k \ll \hat{T} \qquad \frac{dT}{dt} c_k \ll T \qquad k = 1{,}2 \tag{22}$$

In diesem Fall ist der Mittelwert nur noch von der Differenz der Argumente abhängig. Damit wird:

$$E\left[z(t; \Phi)\right] = A_1\, A_2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(t - v) \cdot h_2(t - \xi) \cdot \cdot R_{x,x}(v - \xi - \Phi)\, dv d\xi \tag{23}$$

Die rechte Seite von Gl. (23) ist nunmehr identisch mit der Korrelationsfunktion $R_{y1,\,y2}(\Phi)$ für stationäre Prozesse. Für die weitere Analyse ist es vorteilhaft, $E\left[z(t; \Phi)\right]$ als Produkt einer auf 1 normierten Funktion mit einer Konstanten A zu schreiben:

$$Ag(\Phi) = A_1\, A_2\, R_{y1,y2}(\Phi) = E\left[z(t; \Phi)\right] \tag{24}$$

2.2.2 Leistungsdichtespektrum und Intensitätskoeffizient

Es bleibt noch, den Rauschprozess

$$n(t; \Phi) = z(t; \Phi) - E\left[z(t; \Phi)\right] \tag{25}$$

zu beschreiben. Insbesondere werden wir zu einem späteren Zeitpunkt das Leistungsdichtespektrum $S_{n,n}(\omega; \Phi)$ kennen müssen. Am bequemsten lässt sich diese Funktion via Korrelationsfunktion berechnen:

$$R_{n,n}(\tau; \Phi) = R_{zz}(\tau; \Phi) - E^2\left[z(t; \Phi)\right] \tag{26}$$

Definitionsgemäss ist

$$R_{z,z}(\tau; \Phi) = E\left\{\left[A_1 y_1(t) + n_1(t)\right]\left[A_2 y_2(t) + n_2(t)\right] * \right.$$
$$\left. * \left[A_1 y_1(t + \tau) + n_1(t + \tau)\right]\left[A_2 y_2(t + \tau) + n_2(t + \tau)\right]\right\} \tag{27}$$

Von den 16 Summanden innerhalb der geschweiften Klammer bleiben, wegen der Annahme in Gl. (13), nur vier übrig.

$$R_{n,n}(\tau; \Phi) = A_2^2\, R_{y2,y2}(\tau) \cdot R_{n1,n1}(\tau) + + A_1^2\, R_{y1,y1}(\tau)\, R_{n2,n2}(\tau) + R_{n1,n1}(\tau)\, R_{n2,n2}(\tau) + + R_{ni,ni}(\tau; \Phi) \tag{28}$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass $n(t; \Phi)$ in zwei Rauschprozesse mit ganz verschiedenen Ursachen zerfällt. Gl. (28) zeigt dies. Die ersten 3 Summanden beschreiben den Einfluss der additiven Störprozesse. Diese Korrelationsfunktionen verschwinden, falls $n_1 = n_2 \equiv 0$; weiterhin sind sie unabhängig von Φ. Der Summand $R_{ni,ni}(\tau; \Phi)$

$$R_{ni,ni}(\tau; \Phi) = (A_1\, A_2)^2 \left\{E\left[y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t + \tau) \cdot \cdot y_2(t + \tau)\right] - E^2\left[y_1(t) \cdot y_2(t)\right]\right\} \tag{29}$$

beschreibt den Einfluss des Eigenrauschen (intrinsic noise). Das Eigenrauschen entspricht dem mittelwertfreien Rauschprozess am Ausgang des Multiplikators

$$n_i(t; \Phi) = z(t; \Phi) - E\left[z(t; \Phi)\right]$$
$$n_1(t) = n_2(t) \equiv 0 \tag{30}$$

falls die Signale $x(t - \hat{T})$ und $x(t - T)$ für $\Phi = 0$ exakt übereinstimmen. Bei wichtigen Anwendungen, z. B. Geschwindig-

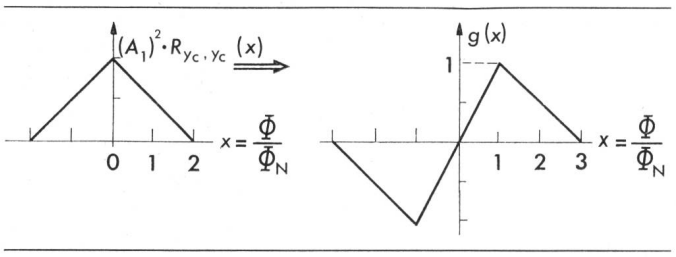

Fig. 7 Korrelationsfunktion $R_{yc,yc}(x)$ und Nichtlinearität $g(x)$
$A_1 = A_2$; $\Phi_N = 1/f_p$

keitsmessung, kann der «Intrinsic Noise» dominierend sein und darf keinesfalls vernachlässigt werden. Weiter ist zu bemerken, dass $n_i(t; \Phi)$ die Genauigkeitsgrenze eines korrelativen Trackingsystems bestimmt. Für viele praktische Anwendungen ist der Prozess $x(t)$ ungefähr gaussverteilt. Für die symmetrische Aufteilung der Pole und Nullstellen [Gl. (4)] des Produktes $H_1(\omega) \cdot H_2^*(\omega)$ findet man unter dieser Annahme nach längerer, aber elementarer Rechnung

$$R_{ni,ni}(\tau; \Phi) = \\ = (A_1 A_2)^2 \left[\frac{d}{d\tau} R_{y2,y2}(\tau - \Phi) \frac{d}{d\tau} R_{y2,y2}(\tau + \Phi) + \right. \\ \left. + R_{y2,y2}(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} R_{y2,y2}(\tau)\right] \quad (31)$$

Für den Regelkreis ist insbesondere das Verhalten des Leistungsdichtespektrums in der Umgebung $\omega = 0$ interessant, denn dieser Anteil muss durch das Filter $F(\omega)$ möglichst gut entfernt werden. Man definiert in [11] den Intensitätskoeffizienten eines stochastischen Prozesses $x(t)$ als:

$$K_x = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, d\tau = S_{x,x}(0) \quad (32)$$

Durch partielle Integration von Gl.(31) findet man $K_{ni}(\Phi = 0) = 0$. Diese Eigenschaft ist darum von grosser Wichtigkeit, weil $\Phi = 0$ bei konstantem T der stabile Arbeitspunkt des Regelkreises ist. Es ist eine sehr erwünschte Eigenschaft, dass in diesem Punkt die Stärke des Rauschens minimal ist. Das entsprechende Resultat für den in Fig. 6 gezeigten digitalen DLL lautet

$$R_{ni,ni}(m; \Phi) = (A_1 A_2)^2 \left[R_{yc,yc}(m + 1 - \Phi) - \right. \\ \left. - R_{yc,yc}(m - 1 - \Phi)\right] \cdot \left[R_{yc,yc}(m - 1 + \Phi) - \right. \\ \left. - R_{yc,yc}(m + 1 + \Phi)\right] + (A_1 A_2)^2 \left[- R_{yc,yc}(m - 2) + \right. \\ \left. + 2 R_{yc,yc}(m) - R_{yc,yc}(m + 2)\right] \cdot R_{yc,yc}(m) \quad (33)$$

mit

$$\tau = m \frac{1}{f_p}$$

Leistungsdichtespektrum und Korrelationsfunktion des abgetasteten Signals sind durch die Relation

$$S_{ni,ni}(z; \Phi) = f_p \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{ni,ni}(m; \Phi)\, z^m \quad (34)$$

$$z = \exp(i\omega\, 1/f_p)$$

verknüpft. Das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des D/A-Wandlers findet man leicht durch Multiplikation von $S_{n,n}(z; \Phi)$ mit der Übertragungsfunktion $|H_{D/A}(\omega)|^2$:

$$S_{n,n}(\omega; \Phi) = S_{n,n}\left[z = \exp(i\omega\, 1/f_p)\right] \cdot |H_{D/A}(\omega)|^2 \quad (35)$$

Der Intensitätskoeffizient ist dann wieder durch Gl. (32) definiert.

Beispiel: Leistungsdichtespektrum und Intensitätskoeffizient für einen digitalen DLL mit dreieckförmiger Korrelationsfunktion.

Die Korrelationsfunktion $R_{yc,yc}(\Phi)$ (siehe Fig. 6) sei dreieckförmig. Die resultierende ungerade Korrelationsfunktion ist in Fig. 7 dargestellt. Das Leistungsdichtespektrum $S_{ni,ni}(z; x)$ für verschiedene x und der Intensitätskoeffizient sind in den Fig. 8a und 8b dargestellt.

2.3 Differentialgleichung und äquivalentes Modell für den DLL 1. Ordnung

Wir wollen uns hier auf den DLL 1. Ordnung, d. h. $F(\omega) = 1$, beschränken. Für die Anwendung ist das der weitaus wichtigste Fall.

Man geht vom Steuergesetz der variablen Verzögerungsleitung [Gl. (6)] aus. Man zerlegt den Produktprozess wie in Abschnitt 2.2 in langsam veränderlichen Mittelwert und mittelwertsfreien Rauschprozess und setzt in Gl. (6) ein:

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = K\left[Ag(\Phi) + n(t; \Phi)\right] \quad (36)$$

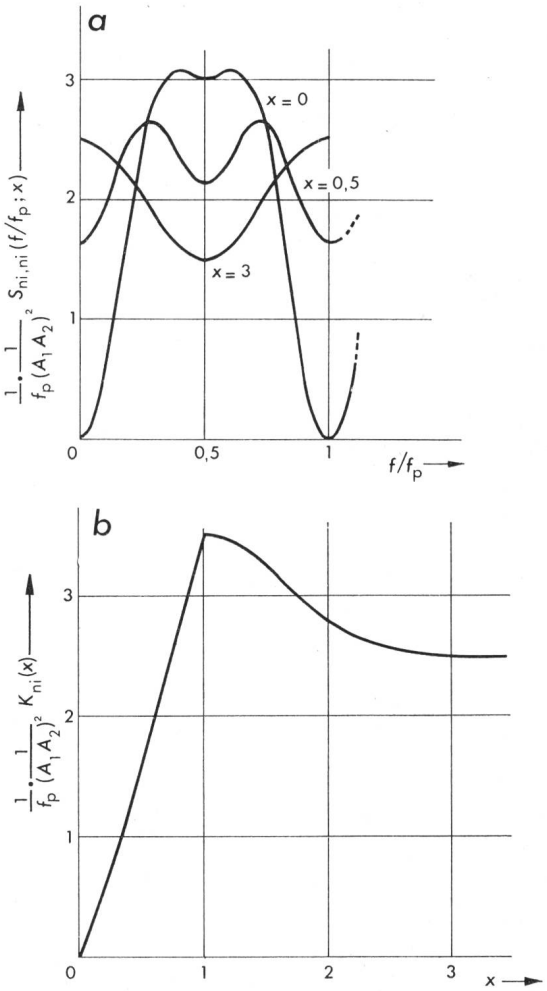

Fig. 8 Leistungsdichtespektrum und Intensitätskoeffizient

a) Normiertes Leistungsdichtespektrum

$$\frac{1}{f_p} \cdot \frac{1}{(A_1 A_2)^2} S_{ni,ni}(f/f_p; x)$$

b) Normierter Intensitätskoeffizient $K_{ni}(x)$

$$\frac{1}{f_p} \cdot \frac{1}{(A_1 A_2)^2} K_{ni}(x)$$

Ersetzt man $\hat{T}$ durch $\hat{T} = T - \Phi$, so erhält man schliesslich die gesuchte Differentialgleichung für den Fehler Φ:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -K\left[Ag(\Phi) + n(t;\Phi)\right] + \frac{dT}{dt} \tag{37}$$

In dieser Differentialgleichung tritt $T(t)$ als Störfunktion auf. $T(t)$ kann ein deterministisch bestimmter Bewegungsablauf oder ein Zufallsprozess mit bekannten Eigenschaften sein. Es sei festgehalten, dass Gl. (37)

a) nichtlinear ist wegen $g(\Phi)$ und $n(t;\Phi)$,
b) eine regellose Grösse $n(t;\Phi)$ enthält.

Damit wird $\Phi(t)$ selber ein Zufallsprozess. Deswegen ist es prinzipiell unmöglich, für $\Phi(t)$ eine Lösung in Form einer «Funktion» anzugeben. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass man eine zu Gl. (37) korrespondierende partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\Phi;t)$ herleiten kann. Die Kenntnis von $p(\Phi;t)$ genügt zur vollständigen statistischen Beschreibung des Regelkreises. Man prüft leicht nach, dass der in Fig. 9 dargestellte Regelkreis der gleichen Differentialgleichung 37 gehorcht, also mathematisch äquivalent ist. Das in Fig. 9 gezeigte Modell hat grosse Ähnlichkeit mit dem bekannten Basisbandmodell des PLL [7; 8]. Im Gegensatz zum DLL ist im letzteren Fall die Nichtlinearität – entsprechend dem periodischen Charakter des zu folgenden Signals – periodisch. Des weiteren ist $n(t;\Phi)$ nicht von Φ abhängig. Diese auf den ersten Blick verblüffende Verwandtschaft lässt sich einfach erklären: Beide Kreise benützen die gleiche mathematische Eigenschaft, nämlich die Orthogonalität. Beim PLL benützt man die Orthogonalität zweier periodischer Funktionen mit endlichem Orthogonalitätsintervall. Beim DLL sind die beiden Zufallsvariabeln $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu jedem Zeitpunkt orthogonal, falls $\Phi = 0$. Vertauscht man – was eigentlich nur für $T = \hat{T} =$ konstant zulässig ist – Schar- und Zeitmittelwert

$$E\left[y_1(t)\cdot y_2(t)\right] \to \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} y_1(t')\cdot y_2(t')\,dt' \tag{38}$$

so kann man sagen, dass das Orthogonalitätsintervall der beiden Funktionen unendlich ist.

2.4 «Tracking»- und «Acquisition»-Betrieb beim DLL

Bei allen korrelativen Trackingsystemen (Verfolgungs- oder Nachführungssystemen) unterscheidet man zwei grundsätzlich verschiedene Betriebsverhalten:

1. «Acquisition»
2. «Tracking»

Da die Rückstellkraft $Ag(\Phi)$ mit wachsendem Fehlerbetrag Φ rasch abnimmt, muss der Regelkreis zu Beginn jeder Messung in die Umgebung von $\Phi = 0$ gebracht werden («Acquisition»). Dies kann beispielsweise durch «Sweepen» der elektronischen Verzögerungsleitung $\hat{T}$ über den vermuteten Wertebereich von T geschehen. Sofern die Änderung $d\hat{T}/dt$ nicht zu rasch ist, wird der Regelkreis beim Durchlaufen von $\Phi = 0$ einhängen und anschliessenden Änderungen von T nachfolgen («Tracking»). Doch selbst wenn der DLL einmal eingehängt hat, besteht immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass er zu einem späteren Zeitpunkt «ausser Tritt» fällt. Unter «ausser Tritt fallen» versteht man, dass der Fehlerbetrag Φ gewisse Grenzen überschreitet. Die Gründe dafür sind entweder eine zu grosse

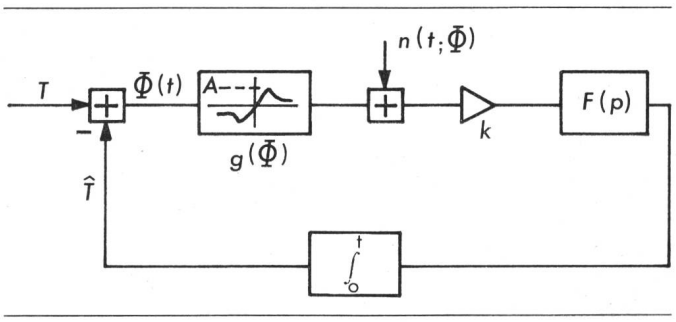

Fig. 9 Mathematisch äquivalentes Modell des DLL

Beschleunigung dT/dt oder der Rauschprozess $n(t;\Phi)$. Die angeführten Phänomene sind

a) statistischer Natur
b) nichtlinear

und treten bei einer idealisierten, linearen Rückstellkraft $Ag(\Phi) = A\Phi$ nicht auf.

3. Analyse des DLL mit Hilfe der Fokker-Planck-Methode

3.1 Leistungskriterien in der statistischen Systemtheorie

Entsprechend dem statistischen Charakter des Regelprozesses $\Phi(t)$ müssen auch dieser Tatsache angepasste Leistungskriterien verwendet werden. Die dem Ingenieur aus der deterministischen Systemtheorie vertrauten Kriterien, wie z. B. Klirrfaktor, Frequenzgang usw., verlieren in diesem Fall ihren Sinn. Die in der statistischen Nachrichtentechnik am häufigsten angewendeten Kriterien sind die verschiedenen Momente, wie z. B. Mittelwert $E(\Phi)$ oder Streuung σ_Φ^2. Sie allein genügen aber nicht, um das Verhalten zu beschreiben. Beispielsweise lässt sich das «Ausser-Tritt-Fallen» des DLL dadurch nicht erfassen. Es ist klar, dass gerade dieses Verhalten für die Anwendung von grosser Bedeutung ist. In gewissen Fällen mag man eine gewisse Ungenauigkeit – ausgedrückt durch σ_Φ^2 – tolerieren, hingegen darf das «Ausser-Tritt-Fallen» nur mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit passieren. Für andere Anwendungen [2] mag eine kurze Acquisitionszeit T_{acq} von Bedeutung sein. Allen diesen Kriterien ist gemeinsam, dass sie *statistische Aussagen* sind. Man kann z. B. nie ausschliessen, dass der Regelkreis ausser Tritt fällt, sondern nur die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses angeben.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, wie sich solche Leistungskriterien mathematisch ermitteln lassen. Die zur Anwendung gelangende Technik ist in der Literatur unter dem Namen «Fokker-Planck-Methode» bekannt. In einem weiteren Schritt sollen diese abstrakten Grössen und ihr Zusammenhang mit den geometrischen und kinematischen Parametern für den Fall der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung ermittelt werden.

3.2 Die Fokker-Planck-Gleichung

Um die Fokker-Planck-Methode effektiv anwenden zu können, ist ein Verständnis der physikalischen Aussage dieser Gleichung unerlässlich. Die F-P-Gleichung lässt sich streng mathematisch mit Hilfe der Theorie der kontinuierlichen Markov-Prozesse herleiten [7; 8; 13; 16]. Hier soll eine heuristische, auf physikalischen Argumenten basierende Herleitung gegeben werden.

Angenommen, das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $\Phi = \Phi_0$. Für Zeiten $t > 0$ beschreibt die Trajektorie $\Phi(t)$ eine komplizierte Bahn, ganz ähnlich einem Teilchen, das einer Brownschen Bewegung unterworfen wird. Stellt man sich nun eine sehr grosse Anzahl solcher Teilchen vor, so hat man eine Art Gas vor sich, das in Richtung der Φ-Achse nach links und rechts diffundiert und dessen Dichte proportional der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\Phi, t)$ ist. Man spricht in diesem Modell daher von der «Anzahl Moleküle» statt von «Grösse der Wahrscheinlichkeit», und man versteht unter $\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} p(\Phi; t)\mathrm{d}\Phi$ die Anzahl Moleküle im Intervall $[\Phi_1; \Phi_2]$ oder den Bruchteil der Zeit, den *ein* Molekül in diesem Intervall verbringt. Natürlich versteht man unter «Anzahl Moleküle» die relative, nicht die absolute Zahl von Teilchen, denn diese Bruchteile entsprechen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Wenn man versucht, dieses Modell quantitativ zu beschreiben, so muss man offensichtlich mathematisch erfassen, dass die Moleküle nicht verschwinden, sondern sich nur verschieben können (Erhaltungssatz). Der Erhaltung der Moleküle entspricht dann die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, d. h., das Integral der Dichtefunktion $p(\Phi; t)$ über den ganzen Bereich muss zu jedem Zeitpunkt 1 ergeben (sicheres Ereignis).

Während der Zeit δt fliessen N_+-Teilchen in das Elementarvolumen $\delta F \cdot \delta\Phi$ hinein und N_--Teilchen heraus (Fig. 10).

$$N_+ = G(\Phi; t) \cdot \delta F \cdot \delta t \qquad N_- = G(\Phi + \delta\Phi; t)\, \delta F \cdot \delta t \tag{39}$$

Zur Zeit t befanden sich im Volumen $\delta F \cdot \delta\Phi$ N_t Teilchen, nach δt Sekunden sind es $N_{t+\delta t}$ Teilchen.

$$\begin{aligned} N_t &= \varrho(\Phi; t) \cdot \delta F \cdot \delta\Phi \\ N_{t+\delta t} &= \varrho(\Phi; t + \delta t) \cdot \delta F \cdot \delta\Phi \end{aligned} \tag{40}$$

Da die Teilchen innerhalb des Elementarvolumens nicht verschwinden können (Erhaltungssatz), muss gelten

$$N_{t+\delta t} - N_t = N_+ - N_- \tag{41}$$

Also

$$\frac{\varrho(\Phi; t + \delta t) - \varrho(\Phi; t)}{\delta t} = \frac{G(\Phi; t) - G(\Phi + \delta\Phi; t)}{\delta\Phi} \tag{42}$$

Vollzieht man den Grenzübergang δt, $\delta 0 \to 0$, so wird aus Gl. (42):

$$\frac{\partial \varrho(\Phi; t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(\Phi; t)}{\partial \Phi} \tag{43}$$

In unserer Analogie entspricht $\varrho(\Phi; t)$ der Dichtefunktion $p(\Phi; t)$, während $G(\Phi; t)$ durch einen Wahrscheinlichkeitsdichtestrom ersetzt werden muss. Die F-P-Gleichung ist also nichts anderes als der Erhaltungssatz der Wahrscheinlichkeit in Differentialform.

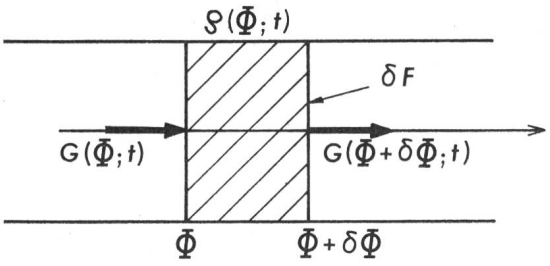

Fig. 10 Zur Herleitung des Erhaltungssatzes
$G(\Phi; t)$ Teilchenstromdichte
$\varrho(\Phi; t)$ Teilchendichte
δF Elementarfläche

Es bleibt nun noch zu zeigen, wie sich die F-P-Gleichung aus der Differentialgleichung (37) herleiten lässt. Strenggenommen lässt sich eine F-P-Gleichung nur finden, wenn $n(t; \Phi)$ ein weisser, Gaußscher Rauschprozess ist. Kein physikalischer Prozess erfüllt diese Bedingung. Wenn hingegen die Bandbreite des Regelkreises – oder anders ausgedrückt die von $\Phi(t)$ – viel kleiner ist als diejenige des Rauschprozesses $n(t; \Phi)$, kann man in guter Näherung schreiben

$$\begin{aligned} R_{n,n}(\tau; \Phi) &\approx \delta(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_{n,n}(\tau; \Phi)\mathrm{d}\tau = \\ &= \delta(\tau) \cdot S_{n,n}(\omega = 0; \Phi) \qquad [\delta(\tau)\text{: Diracfunktion}] \end{aligned} \tag{44}$$

Auf die mathematischen Feinheiten dieser Approximation kann hier nicht eingegangen werden (siehe z. B. [11; 16]). Man kann zeigen, dass bei korrekt durchgeführtem Grenzübergang die zu Gl. (37) korrespondierende F-P-Gleichung die folgende Gestalt annimmt [7; 11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\Phi; t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \Phi}\Big\{ K_0(\Phi) \cdot p(\Phi; t) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi}\left[K_{0,0}(\Phi) \cdot p(\Phi; t)\right]\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Die Funktionen $K_0(\Phi)$ und $K_{0,0}(\Phi)$ sind durch folgende Beziehungen definiert [7; 8; 11]:

$$\begin{aligned} K_0(\Phi) &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{E\left[\Phi(t + \delta t) - \Phi(t)\right]}{\delta t} \\ K_{0,0}(\Phi) &= \lim_{\delta t \to \infty} \frac{E\left\{\left[\Phi(t + \delta t) - \Phi(t)\right]^2\right\}}{\delta t} \end{aligned} \tag{46}$$

definiert. Zur Berechnung von $K_{0,0}(\Phi)$ sei die Differentialgleichung (37) über das sehr kleine Interval δt integriert. Durch Quadrieren von $\delta\Phi = \Phi(t + \delta t) - \Phi(t)$ und anschliessende Mittelwertbildung findet man ($\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = a$)

$$\begin{aligned} E(\delta\Phi^2) = \left[KAg(\Phi) - a\right]^2 \cdot \delta t^2 - \\ - 2\left[KAg[\Phi) - a\right] \int_t^{t+\delta t} E\left[n(t'; \Phi)\right] \mathrm{d}t' + \\ + K^2 \int_t^{t+\delta t}\int E\left[n(\nu; \Phi) \cdot n(\xi; \Phi)\right] \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{47}$$

Wegen der Stationarität von $n(t; \Phi)$ ist $E\left[n(\nu; \Phi) \cdot n(\xi; \Phi)\right]$ nur von der Differenz der Argumente abhängig. Ersetzt man $R_{n,n}(\nu - \xi; \Phi)$ durch die rechte Seite von Gl. (44) und dividiert beide Seiten von Gl. (47) durch δt, so resultiert:

$$K_{0,0}(\Phi) = K^2 \cdot S_{n,n}(\omega = 0; \Phi) \tag{48}$$

Das Spektrum $S_{n,n}(\omega; \Phi)$ wurde in Abschnitt 2.2 berechnet. Wie Gl. (48) zeigt, beschreibt der Intensitätskoeffizient $K_{0,0}(\Phi)$ die Stärke des Rauschens. Physikalisch kann $K_{0,0}(\Phi)$ als Diffusionskoeffizient interpretiert werden.

Geht man zur Berechnung von $K_0(\Phi)$ analog vor, so findet man

$$K_0(\Phi) = -KAg(\Phi) + a \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a = \text{konstant} \tag{49}$$

die korrekte Form von $K_0(\Phi)$ lautet aber [11; 12]:

$$K_0(\Phi) = -KAg(\Phi) + a + \underbrace{\frac{1}{4} K^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi}\left[S_{n,n}(\omega = 0; \Phi)\right]}_{\text{Itô-Korrektur}} \tag{50}$$

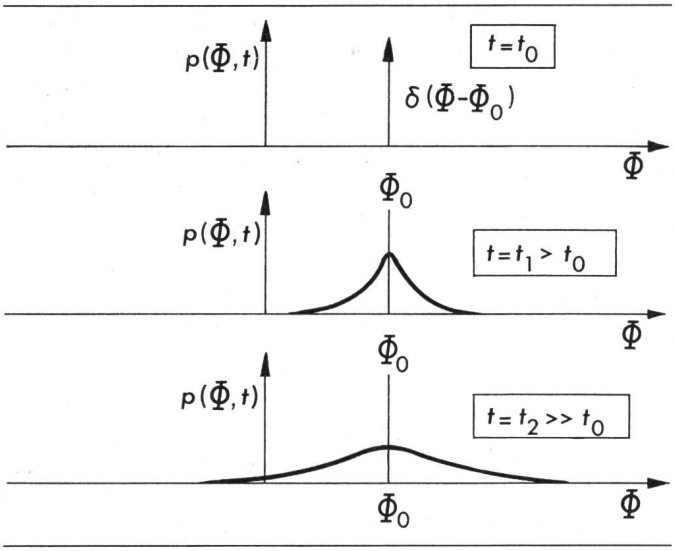

Fig. 11 Aufbau der stationären Dichtefunktion

Der Grund für diese Diskrepanz liegt im inkorrekten Grenzübergang von $n(t; \Phi)$ zu einem weissen Rauschprozess. Der Itô-Term wird häufig übersehen, was zu fragwürdigen Ergebnissen führt. Bezüglich dieses anspruchsvollen Fragenkomplexes sei auf [11...14] verwiesen. Physikalisch gesehen beschreibt $K_0(\Phi)$ die mittlere Driftgeschwindigkeit eines Teilchens, verursacht durch die Rückstellkraft $Ag(\Phi) - a$. Im Grenzfall, wo $K_0(\Phi)$ gegenüber $K_{0,0}(\Phi)$ vernachlässigt werden kann, hat man einen reinen Diffusionsprozess; im andern Grenzfall ein total determiniertes System.

3.3 Stationäre Dichtefunktion $p(\Phi)$ und mittlere Zeit $E(\tau_L)$ zwischen zwei Ausfällen

Der Aufbau der stationären Dichtefunktion $p(\Phi)$, für die definitionsgemäss gilt

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\Phi; t) = 0 \tag{51}$$

ist qualitativ in Fig. 11 gezeichnet.

Im Laufe der Zeit verteilt sich die anfänglich schmale Dichtefunktion $p(\Phi; t)$ über einen weiteren Bereich. Das dauert so lange, bis im stationären Zustand die Dichtefunktion verschwindet.

$$p(\Phi) = \underset{t \to \infty}{p(\Phi; t)} = 0$$

aber (52)

$$\int_{\infty}^{\infty} p(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = 1$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in irgendeinem Intervall der Φ-Achse zu finden, überall gleich gross ist. Daher besitzt $p(\Phi)$ eine unendlich grosse Streuung. Man könnte sich auch vorstellen, dass $p(\Phi; t)$ asymptotisch gegen eine Grenzverteilung $p(\Phi)$ mit endlicher Streuung strebte. Die Frage des asymptotischen Verhaltens ist eng mit dem Intensitätskoeffizienten der F-P-Gleichung verknüpft. Man kann zeigen, dass alle physikalisch realisierbaren Trackingsysteme das zuerst beschriebene Verhalten zeigen, d. h. für $t \to \infty$, $p(\Phi; t) = 0$ [5]. Dies hängt damit zusammen, dass die Driftkraft $K_0(\Phi)$ in Gl. (45) für wachsendes Φ gegen Null strebt, während die Diffusionskomponente $K_{0,0}(\Phi)$ gegen eine Konstante strebt, so dass die Teilchen im Verlaufe einer unendlich langen Zeit über den ganzen Bereich verteilt werden. Der Zerfall der Dichtefunktion $p(\Phi; t)$ kann dabei so langsam geschehen, dass sich quasistationäre Zustände ausbilden, die von einem Experimentator praktisch nicht von echt stationären Zuständen unterschieden werden können.

Da das stationäre Verhalten der Regelkreise aber von grösster praktischer Bedeutung ist, muss ein äquivalenter Prozess gesucht werden, der die statistischen Eigenschaften des ursprünglichen Prozesses beibehält und im stationären Fall eine sinnvolle Lösung ergibt.

Zur Konstruktion eines solchen Prozesses geht man am besten vom tatsächlichen Verhalten des Regelkreises aus. Zu Beginn jeder Messung muss der DLL durch einen Suchvorgang («Acquisition») in den «In Lock»-Bereich gebracht werden (Fig. 12), wobei die Definition des «In Lock»-Bereiches an und für sich willkürlich ist. Die Überwachung des «In Lock»-Zustandes geschieht durch eine in Fig. (13) dargestellte Überwachungsschaltung (Lock Detector). Diese Überwachungsschaltung misst im Prinzip die gerade Korrelationsfunktion, die bei $\Phi = 0$ ihr Maximum hat. Sobald der Wert am Ausgang des Tiefpasses – der im Mittel gleich der Korrelationsfunktion $R_{x,x}(\Phi)$ ist – unter eine gewisse Grenze sinkt, signalisiert die Schaltung «Out of Lock». Dabei muss beachtet werden, dass die Überwachungsschaltung nur im Mittel bei $\Phi = \pm \Phi_{\mathrm{Lock}}$ anspricht, dass aber für jeden anderen Wert von Φ eine Wahrscheinlichkeit $S(\Phi)$ besteht, dass die Schaltung fehlanspricht. Nach jedem Ansprechen der Überwachungsschaltung wird ein neuer Suchvorgang initialisiert. Dieses Verhalten kann man mathematisch folgendermassen beschreiben:

Zur Zeit $t = 0$ startet eine Trajektorie im Punkt $\Phi = \Phi_0$ (Fig. 14). Φ_0 ist der stabile Gleichgewichtspunkt, d. h. der Punkt, wo $K_0(\Phi)$ verschwindet. Zu jedem Zeitpunkt besteht eine von Φ abhängige Wahrscheinlichkeit $S(\Phi)$, dass der Pro-

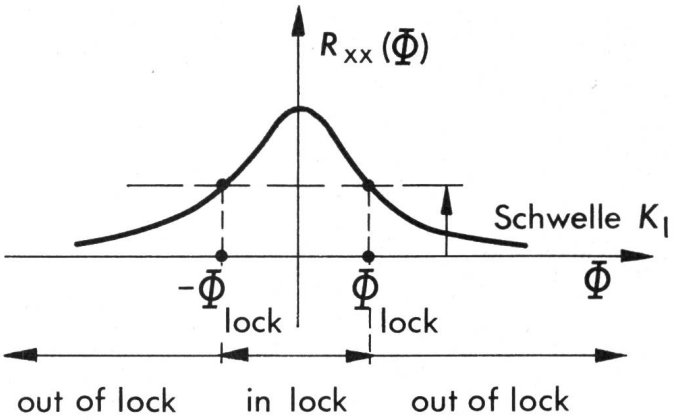

Fig. 12 Definition des «In-Lock»-Bereiches

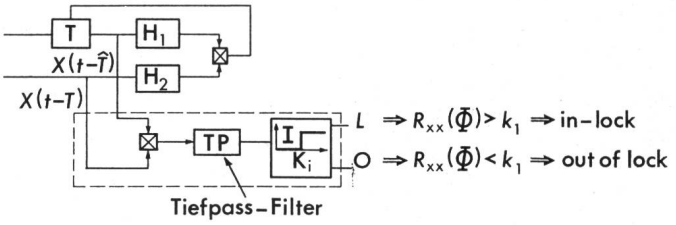

Fig. 13 Delay-Locked Loop und zugehörige Überwachungsschaltung

zess in seinem momentanen Standort gestoppt wird. Zusätzlich sei angenommen, dass der Prozess spätestens bei $\Phi = \Phi_{min}$, Φ_{max} gestoppt wird. Diese Grenzen sind endlich, aber sonst beliebig. Da für ein praktisch verwendbares System die Lebensdauer τ_L einer Trajektorie viel grösser ist als die Suchzeit, darf man annehmen, dass unmittelbar danach ein neuer Prozess im Punkt $\Phi = \Phi_0$ gestartet wird.

erweist es sich als vorteilhaft, Φ durch die dimensionslose Variable x zu ersetzen:

$$x = \Phi/\Phi_N \tag{57}$$

(Φ_N: Normalisierungskonstante)

Durch geeignetes Umformen ergibt sich schliesslich

$$p(x) = \frac{\alpha_T}{E(\tau_L)} \cdot \frac{S(x)}{[1/\varrho_s \bar{N}(x) + 1/\varrho_n]} \exp\left[-\Phi_N U_0(x)\right] \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[D_0 - u(x' - x_0)\right] \exp\left[\Phi_N U_0(x')\right] dx' \tag{58}$$

mit

$$U_0(x) = -\frac{1}{\Phi_N} \int^{x} \frac{1}{[1/\varrho_s \bar{N}(x) + 1/\varrho_n]} \left[-g(x') + a\frac{\alpha_T}{\Phi_N}\right] dx' - \frac{1}{2} \ln\left[1/\varrho_s \bar{N}(x) + 1/\varrho_n\right]$$

$$K_\Phi = A/\Phi_N;\ 1/\alpha_T = 4\, B_L = K K_\Phi;\ A = A_1 A_2$$

$$1/\varrho_s = 2\, B_L/f_p;\ \bar{N}(x) = f_p \frac{S_{ni,ni}(\omega = 0, x)}{A^2} \tag{58a}$$

$$1/\varrho_n = \frac{2\, B_L \cdot S_{n_n, n_n}(\omega = 0)}{A^2}$$

Es ist intuitiv klar, dass der in Fig. 14 dargestellte Prozess eine stationäre Lösung hat. Tatsächlich kann man zeigen [5], dass die Dichtefunktion des wiederholten Prozesses der F-P-Gleichung gehorcht:

$$\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{K_0(\Phi)}{S(\Phi)} p(\Phi) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\Phi}\left[\frac{K_{0,0}(\Phi)}{S(\Phi)} p(\Phi)\right]\right\} = \frac{\delta(\Phi - \Phi_0)}{E(\tau_L)} \tag{53}$$

Dabei ist $\delta(\Phi - \Phi_0)$ die Anfangsverteilung der Trajektorie, $E(\tau_L)$ die mittlere Lebensdauer einer Trajektorie. Es ist interessant, dass man die wichtigsten Parameter, die das Betriebsverhalten des DLL beschreiben, durch Lösen *einer* F-P-Gleichung erhalten kann.

Durch einmalige unbestimmte Integration wird aus Gl. (53):

$$\frac{K_0(\Phi)}{S(\Phi)} p(\Phi) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\Phi}\left[\frac{K_{0,0}(\Phi)}{S(\Phi)} p(\Phi)\right] = \frac{1}{E(\tau_L)}\left[u(\Phi - \Phi_0) + D_0\right] \quad [u\,(...)\ \text{Sprungfunktion}] \tag{54}$$

D_0 ist bestimmt durch die Randbedingungen [5]:

$$D_0 = \frac{\int_{\Phi_0}^{\Phi_{max}} \exp\left[-2\, K_0(\Phi)/K_{0,0}(\Phi)\right] d\Phi}{\int_{\Phi_{min}}^{\Phi_{max}} \exp\left[-2\, K_0(\Phi)/K_{0,0}(\Phi)\right] d\Phi} \tag{55}$$

Das gefundene Resultat lässt sich mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsdichtestroms $J_0(\Phi)$ anschaulich interpretieren. Die rechte Seite von Gl. (54) ist definitionsgemäss gleich $J_0(\Phi)$:

$$J_0(\Phi) = \frac{1}{E(\tau_L)}\left[u(\Phi - \Phi_0) - D_0\right] \tag{56}$$

Der Strom ist zeitlich konstant. Die an den Rändern abfliessenden Teilchen werden laufend durch die an der Stelle $\Phi = \Phi_0$ liegende Quelle ersetzt. Die Grösse der Ströme zu den Rändern Φ_{min}, Φ_{max} teilt sich dabei im Verhältnis D_0 zu $(1 - D_0)$ auf.

Die stationäre Dichtefunktion $p(\Phi)$ findet man durch Lösen der Differentialgleichung (54). Für die praktische Anwendung

Die eingeführten Parameter haben anschaulich physikalische Bedeutung. α_T ist die Zeitkonstante des linearisierten Regelkreises mit

$$g(\Phi) = \frac{K_\Phi}{A}\Phi \tag{59}$$

während B_L die äquivalente Bandbreite ist. ϱ_n ist das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis (SNR) des linearisierten Kreises, wenn man annimmt, dass $n(t)$ ein weisser Rauschprozess und $n_i(t; \Phi) = 0$ ist. $1/\varrho_s \bar{N}(x)$ ist die entsprechende Grösse für das Eigenrauschen. Man beachte, dass diese Grösse unabhängig von der Signalleistung ist, wie es sein muss.

Zur Illustration der Theorie sind im folgenden einige numerische Ergebnisse für den in Fig. 6 gezeigten digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität (Fig. 7) dargestellt. Wenn man sich den stochastischen Prozess $\Phi(t)$ als Irrfahrt eines Moleküls vorstellt, so bewegt sich das Teilchen in einem Potentialtopf $U_0(x)$. Je steiler und höher die Flanken, desto eher bleibt das Teilchen am Boden des Topfes. Die nichtlineare Rückstellkraft ist die Ableitung der Potentialfunktion nach der Ortsvariabeln. Die Kraft ist im Potentialminimum (stabiler Arbeitspunkt) Null (Fig. 15). Für $x_0 = 0$ strebt die Funktion $U_0(x)$ für $x = \pm\infty$ gegen eine Konstante, d. h., die Rückstellkraft verschwindet. Für $x_0 \neq 0$ existiert ein weiterer, aber instabiler Gleichgewichtspunkt.

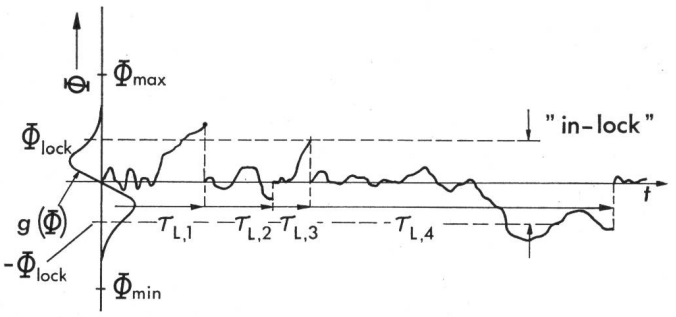

Fig. 14 Typischer Verlauf der Trajektorie $\Phi(t)$ des wiederholten Prozesses

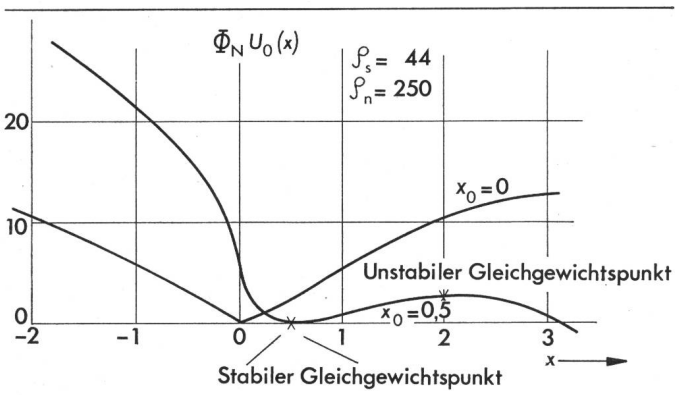

Fig. 15 Normalisierte Potentialfunktion des digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität

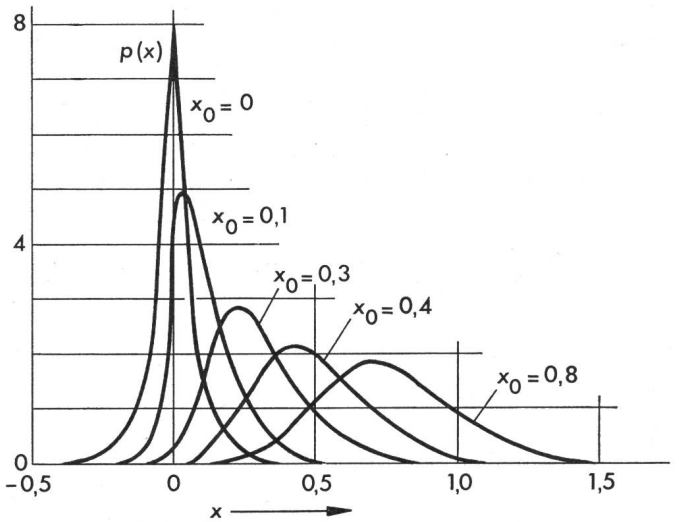

Fig. 16 Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion p(x) für den digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität

$\varrho_s = 44$
$\varrho_n = 250$
$x_{min} = -1{,}5$
$x_{max} = 1{,}5$
$S(x) \begin{cases} 1 - 1{,}5 \leqq x \leqq 1{,}5 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Man beachte, dass das Potential für eine linearisierte Kennlinie $g(\Phi)$ eine Parabel ist:

$$U_0(x) = bx^2 \tag{60}$$

(b: Konstante)

Im Unterschied zum nichtlinearen, physikalisch realisierbaren Regelkreis, strebt dieser Potentialtopf gegen ∞, was bedeutet, dass ein solcher Regelkreis einen unendlich grossen Fangbereich hätte und nie «ausser Tritt fallen» würde.

Die Dichtefunktion $p(x)$ ist für verschiedene x_0 (stabile Gleichgewichtspunkte) in Fig. 16 und 17 dargestellt. Wegen der Tatsache, dass $S_{n,n}(\omega = 0; x)$ für $x = 0$ ein Minimum hat, ist bei $x = 0$ eine scharfe Spitze zu beobachten. Die Streuung σ_x^2 nimmt aus dem gleichen Grund mit wachsendem $|x_0|$ stark zu. *Dieses Verhalten lässt sich nur durch eine nichtlineare Theorie erklären.* Zur Verifikation der Theorie wurden durch Computersimulation zwei Dichtefunktionen für $x_0 = 0$ und $x_0 = 0{,}5$ ermittelt. Simuliert wurde der tatsächliche Regelkreis (Fig. 3), nicht das äquivalente Modell. Auch in der Simulation (Fig. 17) äussert sich die starke Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums $S_{n,n}(\omega = 0; x)$ von x in einer grösseren Breite der Dichtefunktion für $x_0 \neq 0$. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation ist sehr gut. Die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ einer Trajektorie ist sehr stark vom Signal-zu-Geräusch-Verhältnis und vom stabilen Arbeitspunkt x_0 abhängig (Fig. 18). Für die Praxis von grosser Wichtigkeit ist die Wahrscheinlichkeit eines Funktionsausfalles innerhalb einer bestimmten Zeit. Unter Funktionsausfall versteht man das Ansprechen der Überwachungsschaltung. Zu diesem Zweck betrachte man die Zufallsvariable, welche zur Zeit t die Gesamtzahl der Zyklen angibt (Fig. 14). Falls man näherungsweise annimmt, dass diese Zufallsvariable poissonverteilt ist, erhält man für die Wahrscheinlichkeit eines Funktionsausfalls:

$$P_{\text{Ausfall}}(t) \approx 1 - \exp\left(-\frac{\alpha_T}{E(\tau_L)}\right) \cdot \left(\frac{t}{\alpha_T}\right) \tag{61}$$

4. Anwendung der Theorie auf das Problem der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung

4.1 Räumliche und zeitliche Korrelation

Die Intensität des empfangenen Lichtes ist eine Funktion der Oberfläche am betrachteten Ort. Man definiert daher eine räumliche Korrelation, wobei man annehmen darf, dass diese Funktion nur vom Abstand d der Punkte abhängt. Die Gestalt dieser Funktion hängt von der Oberflächenbeschaffenheit und der Optik ab [10]. Den Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Korrelation findet man durch Ersetzen von Φ durch d/v.

$$\underset{\text{räumliche Korrelation}}{R_{x,x}(d)} \rightarrow \underset{\text{zeitliche Korrelation}}{R_{x,x}(\Phi = d/v)} \tag{62}$$

Die Breite der Korrelationsfunktion $R_{x,x}(\Phi)$ ist somit indirekt proportional zur Geschwindigkeit. In allen bisherigen Rechnungen wurde angenommen, dass $g(\Phi)$ nicht von T abhängt. Diese Einschränkung ist für alle praktischen Fälle ohne Bedeutung, da man den Bereich von T immer in Segmente aufspalten kann, in denen $g(\Phi)$ näherungsweise konstant ist.

4.2 Berechnung der Parameter für den digitalen DLL

In Tabelle I sind die notwendigen Relationen zwischen den geometrischen und kinematischen Parametern und den in Abschnitt 3 verwendeten Grössen zusammengestellt.

4.3 Die Streuung

Die Streuung σ_Φ^2 ist im Trackingmodus wohl die wichtigste Kenngrösse. Die genaue Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern ist kompliziert. Sie muss durch numerische Integration von Gl. (58) berechnet werden. Unter gewissen Annahmen lassen sich aber einfache Näherungsformeln herleiten, die den prinzipiellen Einfluss der verschiedenen Grössen richtig

Relationen zwischen den geometrischen und kinematischen Parametern
Tabelle I

T	$= L/v$
f_p	$= Z_s \cdot 1/T$; Z_s Anzahl Schieberegisterstufen in der Verzögerungsleitung
Φ_N	$= 1/f_p$
x_0	$= \Phi/\Phi_N = a \cdot \alpha_T/\Phi_N$
a	$= -L/v^2 \cdot dv/dt$
A_1	$= A_2 \quad A_1 A_2/A = 1$
K_Φ	$= A/\Phi_N$
K	$= 1/\alpha_T \cdot 1/K_\Phi$

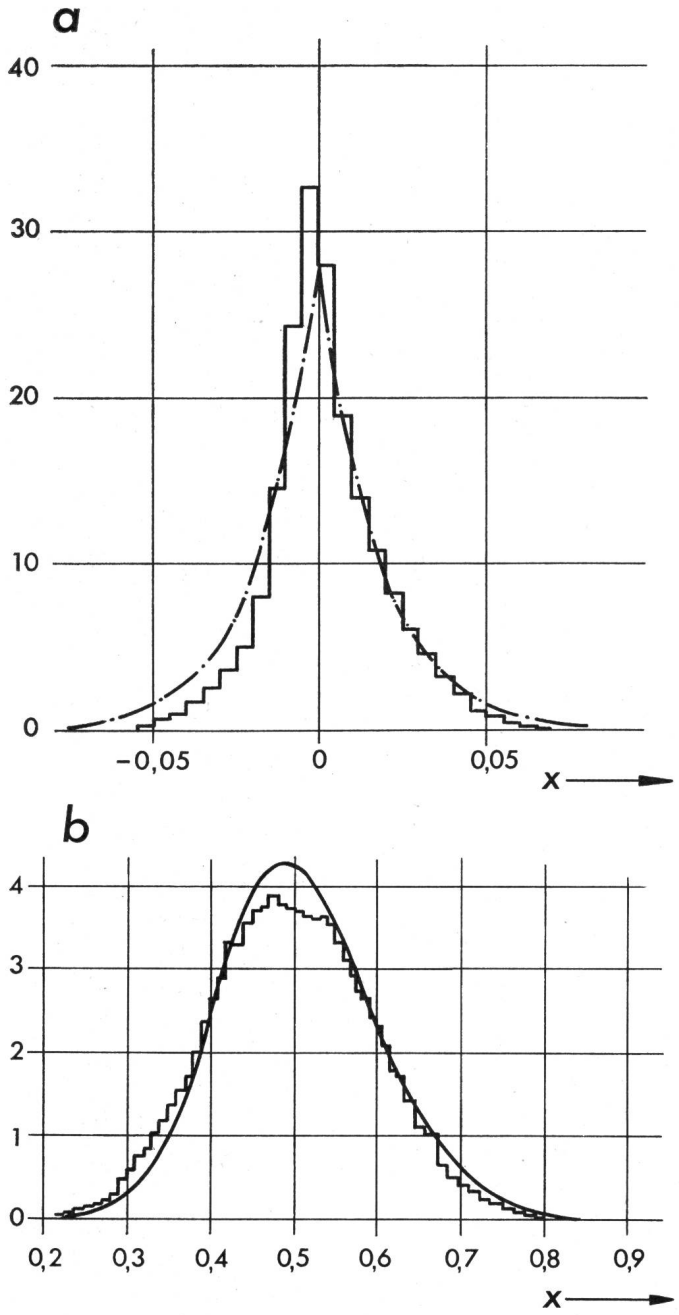

Fig. 17 **Experimentelle und theoretische Dichtefunktion für den digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität**

a $X_0 = 0$; $\varrho_s = 44$; $\varrho_n \longrightarrow \infty$
Simulationszeit $= 600\ \alpha T$

b $X_0 = 0{,}5$; $\varrho_s = 44$; $\varrho_n \longrightarrow \infty$
Simulationszeit $= 600\ \alpha T$

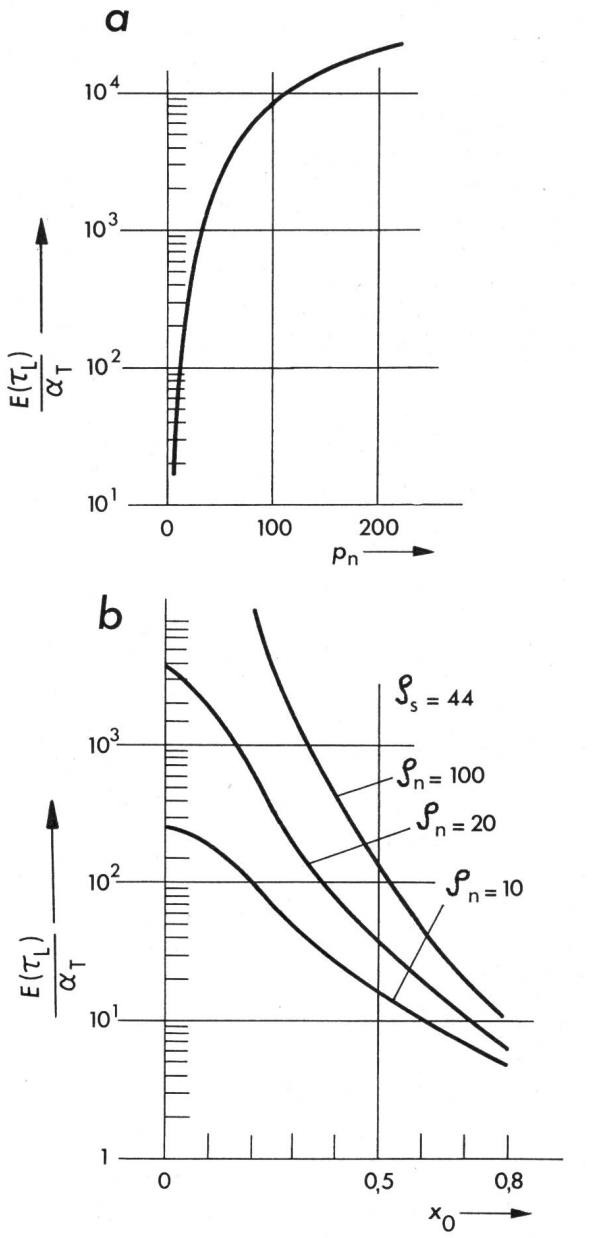

Fig. 18 $E(T_L)$ **in Funktion von** ϱ_n **für den digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität**

$\varrho_s = 24$; $x_{min} = -1{,}5$; $x_{max} = 1{,}5$; $S(x) \begin{cases} 1 & x_{min} \leqq x \leqq x_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a $\frac{E(T_L)}{\alpha_T}$ in Abhängigkeit von ϱ_n

b $\frac{E(T_L)}{\alpha_T}$ in Abhängigkeit von x_0

darstellen. Im Falle hoher Geschwindigkeit ist das Eigenrauschen vernachlässigbar, da ϱ_s proportional zur Geschwindigkeit v ist. Man findet [5] für den relativen Fehler:

$$\frac{\sigma_\Phi}{T} = \frac{\sigma_v}{v} = \frac{d_{Korr}}{L}\sqrt{\frac{1}{\varrho_n}} \tag{63}$$

d_{Korr} ist ein Mass für die räumliche Korrelationslänge der Oberfläche.

$$d_{Korr} = \Phi_N \cdot v \tag{64}$$

Punkte, die mehr als d_{Korr} voneinander entfernt sind, sind praktisch statistisch unabhängig. Nach Gl. (63) sinkt der relative Fehler mit wachsendem L, dafür wird das System beschleunigungsempfindlicher. Eine Verkleinerung von d_{Korr} oder, anders ausgedrückt, eine Vergrösserung der räumlichen Bandbreite bewirkt ebenfalls eine lineare Verbesserung, während ϱ_n nur mit der Quadratwurzel eingeht.

Für tiefe Geschwindigkeiten ist das Eigenrauschen dominierend. Man findet [5]:

$$\frac{\sigma_\Phi}{T} = \frac{\sigma_v}{v} \approx \sqrt{\frac{T}{\alpha_T}}\left(\frac{d_{Korr}}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{65}$$

Im Unterschied zu Gl. (63) ist der relative Fehler von T (oder L/v) abhängig. Wie schon erwähnt, sind Gl. (63) und Gl. (65) nur qualitative Näherungsformeln. Für numerische Ergebnisse muss auf die exakte Theorie zurückgegriffen werden.

4.4 *Untere Geschwindigkeitsmessgrenzen*

Von einer unteren Messgrenze zu sprechen ist nicht ganz richtig, da das System beliebig kleine, aber konstante Geschwindigkeiten messen kann. Dazu muss die Zeitkonstante α_T entsprechend gross und, damit verbunden, die Messzeit ebenfalls gross gewählt werden. Sobald man variable Geschwindigkeiten messen will, tritt aber eine untere Grenze auf. Dies lehrt ein Blick auf Gl. (37). Für eine stabile Gleichgewichtslage muss $d\Phi/dt = \dot{\Phi}$ im Mittel verschwinden:

$$E(\dot{\Phi} \mid \Phi_0) = KAg(\Phi_0) + a = 0 \tag{66}$$

Wegen $g(\Phi)_{max} = 1$ und wegen den Gl. (58a) und (64) findet man

$$|a| < KA = \frac{d_{Korr}}{\alpha_T v} \qquad |a| = \left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{L}{v^2}\left|\frac{dv}{dt}\right| \geqq \left|\frac{dv}{dt}\right| < \frac{d_{Korr}\, v}{L\, \alpha_T} \tag{67}$$

Die gemachte Überlegung ist nicht ganz korrekt, da die Abhängigkeit von $n(t; \Phi)$ von Φ vernachlässigt wurde. Sie gibt aber die Verhältnisse qualitativ richtig wieder. Man sieht, dass die Beschleunigungsfähigkeit indirekt proportional zur Zeitkonstanten α_T und zu L und direkt proportional zu v ist. Zwischen den Anforderungen der Genauigkeit [Gl. (63), (65)] und denjenigen einer guten Beschleunigungsfähigkeit [Gl. (67)] bestehen offensichtlich Widersprüche.

Die Ungleichung (67) ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für eine stabile Gleichgewichtslage. Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls, d. h. «ausser Tritt fallen», im Zeitintervall $(0, t)$ ist durch Gl. (61) gegeben. Eine untere Messgrenze wird darum sinnvollerweise durch ein maximal zulässiges $P_{Ausfall}(t)$ in Funktion des Parameterpaars $(v, dv/dt)$ definiert.

Literatur:

[1] *N. J. Bershad, P. Merryman* and *J. Slansky:* Adaptive trackers based on continuous learning theory. Trans. IEEE AES 10(1974)2, p. 245...254.

[2] *W. C. Lindsey* and *M. K. Simon:* Telecommunications systems engineering. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973.

[3] *M. R. O'Sullivan:* Tracking systems employing the delay-lock discriminator. IRE Trans. SET 8(1962)1, p. 1...7.

[4] *F. H. Lange:* Signale und Systeme. Band 3: Regellose Vorgänge. Einführung in die Informationstheorie, Stochastik und Korrelationstechnik. Berlin, VEB Verlag Technik, 1971.

[5] *H. Meyr:* Untersuchung korrelativer Trackingsysteme mit Hilfe der Fokker-Planck-Methode. Dissertation Nr. 5223 der ETH, Zürich, 1974.

[6] *H. Meyr:* Synthesis of odd cross-correlation functions for use in correlative tracking systems. Los Angeles, University of Southern California, 1974. USC-EE Report No. 475.

[7] *W. C. Lindsey:* Synchronization systems in communication and control. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1972.

[8] *A. J. Viterbi:* Principles of coherent communications. New York, McGraw-Hill, 1966.

[9] *J. J. Spilker* and *D. T. Magill:* The delay-lock discriminator – an optimum tracking device. Proc. IRE 49(1961)9, p. 1403...1416.

[10a] *F. Mesch, M.-H. Daucher* und *R. Fritsche:* Geschwindigkeitsmessung mit Korrelationsverfahren. Teil 1: Grundgedanke; Anwendung auf Zweiphasenströmungen. Messtechnik 79(1971)7, S. 152...157.

[10b] *F. Mesch, M.-H. Daucher* und *R. Fritsche:* Geschwindigkeitsmessung mit Korrelationsverfahren. Teil 2: Berührungslose Geschwindigkeitsmessung von Walzgut; Fehlereinflüsse. Messtechnik 79(1971)8, S. 163...168.

[11] *R. L. Stratonovich:* Topics in the theory of random noise. 2 volumes. New York/London/Paris, Gordon and Breach, 1963/1968.

[12] *A. H. Jazwinski:* Stochastic processes and filtering theory. New York, Academic Press, 1963.

[13] *W. Feller:* An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York, John Wiley, 1966.

[14] *L. Arnold:* Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendungen. München und Wien, Oldenbourg Verlag, 1973.

[15] *R. L. Stratonovich:* Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control. Amsterdam/London/New York, Elsevier Publishing Company, 1968.

Adresse der Autoren:

Dr. sc. techn. ETHZ *H. Meyr, H. Ryser,* Ing.-HTL, und *C. Zimmer,* dipl. phys. ETHZ, Hasler AG, Forschungsabteilung, Belpstrasse 23, 3000 Bern.