Calcul des champs éléctromagnétiques par la méthode des éléments finis

Autor(en): **Decréton, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins : gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)**

Band (Jahr): **64 (1973)**

Heft 19

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-915603

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Calcul des champs électromagnétiques par la méthode des éléments finis

Par *M. Decréton*

537.811.001.24 : 519.34

La méthode approchée de calcul faisant usage des différences finies est devenue classique dans l'étude des champs électromagnétiques. Plus récemment, toutefois, l'intérêt se porte de plus en plus vers d'autres possibilités d'approximation numérique et, en particulier, la méthode des éléments finis qui est une alternative extrêmement prometteuse. Développée d'abord pour le génie civil et le calcul de la résistance des matériaux, elle peut s'appliquer avec succès à de nombreux problèmes posés en électromagnétisme, tant dans le domaine des hyperfréquences et de la propagation des ondes que dans celui des machines électriques. Elle s'adapte particulièrement bien aux cas présentant des discontinuités de milieu ou des points singuliers aux frontières. Après une présentation théorique du fonctionnement de la méthode, deux problèmes caractéristiques sont traités à titre d'exemple.

Die angenäherte Rechnungsmethode mit endlichen Differenzen ist in der Untersuchung der elektromagnetischen Felder üblich geworden. Seit kurzem jedoch erstreckt sich das Interesse mehr und mehr auf weitere numerische Annäherungsmethoden, insbesondere auf diejenige der begrenzten Elemente, welche eine äusserst verheissungsvolle Alternative bedeutet. Diese Methode, die vorerst für das Bauingenieurwesen und für die Berechnung der Festigkeit der Materialien ausgearbeitet wurde, kann auch mit Erfolg auf zahlreiche Probleme angewendet werden, die im Elektromagnetismus sowie im Bereiche der Mikrowellen, der Wellenausbreitung und der elektrischen Maschinen gestellt werden. Sie passt sich besonders gut an Fälle an, welche unstetige Medien oder singuläre Randpunkte aufweisen. Nach einer theoretischen Darstellung der Funktionsweise der erwähnten Methode werden zwei charakteristische Fälle beispielsweise erörtert.

1. Introduction

La majorité des problèmes qui se posent en électromagnétisme se ramène au calcul de champs ou de potentiels, solutions des équations de *Maxwell*. Ces grandeurs doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles, en présence des conditions aux limites imposées par la structure considérée. Or si dans certains cas particuliers où les limites et les équations ont des formes simples, une solution analytique est possible, dans la majorité des cas posés en pratique, aucune expression exacte, même sous forme de somme infinie, ne peut être trouvée. Il faut donc dans ces cas recourir à des techniques d'analyse numérique qui remplacent le problème par un problème approché et fournissent un algorithme de calcul adapté. Certaines de ces méthodes sont utilisées depuis de nombreuses années en électromagnétisme, comme celle des différences finies [1][1]). D'autres, employées originellement dans d'autres disciplines, n'ont trouvé d'intérêt que bien plus récemment. C'est le cas des éléments finis, décrits d'abord pour des problèmes de résistance des matériaux [2], mais qui se sont avérés être un outil extrêmement utile dans un grand nombre de problèmes électromagnétiques.

2. Problème aux valeurs limites

On peut poser en général qu'un champ ou un potentiel Φ, scalaire ou vectoriel, est dans un certain domaine D la solution d'une équation aux dérivées partielles [3]

$$L\,\Phi = g \tag{1}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire agissant sur Φ et g une fonction connue des coordonnées, appelée terme de source. On aura par exemple

$$L = -\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2}$$

dans le cas de l'équation de *Poisson* à deux dimensions, et

$$L = -\nabla^2 + k^2 \tag{3}$$

pour l'équation de *Helmholtz*. Dans le premier cas, l'opérateur est entièrement déterminé. Dans le deuxième, il dépend des valeurs propres.

Pour spécifier entièrement le champ, il faut ajouter à l'équation (1) des conditions limites sur la frontière S du domaine D. Elles sont le plus souvent de la forme générale suivante, dite de *Cauchy*,

$$B_s(\Phi) = f_1(s)\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_s + f_2(s)\cdot\Phi(s) = f(s) \tag{4}$$

où f_1, f_2 et f sont des fonctions connues sur la frontière et n la normale extérieure.

Deux cas particuliers sont importants:

a) Si $f_1(s) \equiv 0$, on a une condition de *Dirichlet* imposant la valeur de Φ.

b) Si $f_2(s) \equiv 0$, une condition de *Neumann* est imposée pour la dérivée normale de Φ.

Ces conditions peuvent apparaître simultanément, dans un même problème, sur différentes parties de la frontière. Un cas général est illustré à la fig. 1.

La solution de (1) avec les conditions aux limites (4) devra, en général, être obtenue par une méthode numérique d'approximation. Deux voies sont ici possibles.

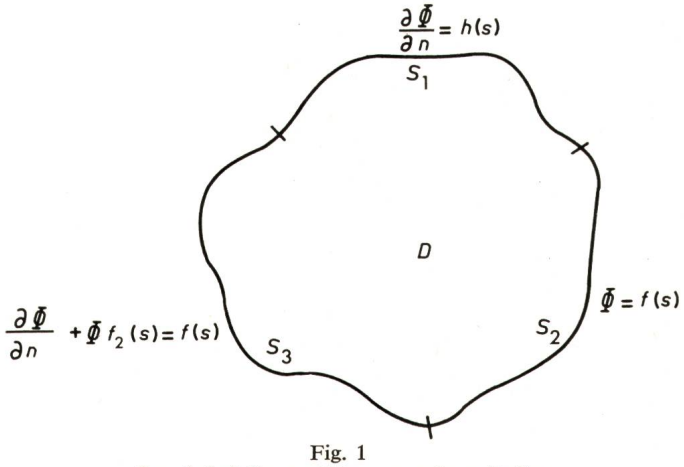

Fig. 1
Cas général d'un problème aux valeurs limites

[1]) Voir la bibliographie à la fin de l'article.

a) D'une part, approximer les opérateurs L et B_s eux-mêmes et chercher la solution d'un système

$$L^d \; \Phi \approx g \quad \text{dans } D \tag{5}$$

$$B_s{}^d \, \Phi \approx f \quad \text{sur } S \tag{6}$$

où L^d et $B_s{}^d$ sont des opérateurs simplifiés.

b) D'autre part, tout en conservant L et B_s de départ, approximer le champ Φ et chercher un algorithme donnant la meilleure approximation possible. On a alors

$$L \; \Phi^d \approx g \quad \text{dans } D \tag{7}$$

$$B_s \, \Phi^d \approx f \quad \text{sur } S \tag{8}$$

La première voie mène aux méthodes de différences finies, la deuxième aux techniques variationnelles de *Rayleigh-Ritz* auxquelles on joint souvent une méthode d'éléments finis [2]).

3. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est certainement la plus populaire en ce qui concerne le problème des champs électromagnétiques. Elle comporte deux étapes [1]. D'abord l'opérateur différentiel doit être transformé en un opérateur aux différences où chaque dérivée est remplacée par une différence de valeurs en un certain nombre discret de points. En considérant ces points à une distance h les uns des autres (fig. 2), on a par exemple

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \{\Phi(x+h) - \Phi(x-h)\}/2\,h \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \{\Phi(x+h) - \Phi(x-h) - 2\,\Phi(x)\}/h^2 \tag{10}$$

$$\nabla^2 \Phi \approx \{\Phi(x, y+h) + \Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y-h) - 4\,\Phi(x, y)\}/h^2 \tag{11}$$

Ces formules sont en fait des séries de *Taylor* tronquées, ce qui permet de connaître très rapidement l'ordre de grandeur de l'approximation introduite. Ces équations aux différences finies représentant l'opérateur L^d de (5) sont alors appliquées en un certain nombre de points choisis dans le domaine D. On a tout avantage à prendre ces points suivant un schéma le plus régulier possible.

Un système d'équations linéaires en résulte. La deuxième phase de la méthode consiste alors à trouver la solution de ce système, qui en général aura des dimensions assez importantes tout en étant peu dense (beaucoup de zéros dans la matrice du système). Un système allant jusqu'à 1000 inconnues est courant. Pour des raisons de temps de calcul et surtout de réservation de mémoire nécessaire, la solution ne peut être obtenue directement. Une méthode itérative s'impose. Un grand avantage consiste ici dans le fait que les lignes du système peuvent être générées automatiquement sans difficulté. La matrice totale ne doit donc pas être mémorisée. La méthode itérative la plus utilisée est la surrelaxation successive [5] qui a le mérite de présenter de très bonnes caractéristiques de convergence.

Le procédé ainsi décrit se prête donc bien à un calcul automatique sur ordinateur. Pourtant, pour des géométries complexes, elle requiert souvent une réservation de mémoire très importante et un temps de calcul parfois prohibitif. En effet, la précision obtenue est liée directement à la densité de points choisis [6]. Toute frontière au dessin compliqué, présentant par exemple des points singuliers, nécessitera un reserrement exagéré des mailles et augmentera donc sensiblement la taille du système linéaire à résoudre. De plus, l'interdépendance des points inhérente à la méthode et le caractère itératif de la solution entrainent dans certains cas des phénomènes d'«infection» [7]: un manque de précision en un endroit, dû par exemple à un point singulier, influencera la région environnante et même parfois l'ensemble de la solution.

Ce manque de flexibilité a orienté l'attention ces dernières années vers d'autres méthodes numériques plus souples. Celle des éléments finis s'est avérée être très utile dans de nombreux cas.

4. Méthode des éléments finies

La méthode des éléments finis est liée à une formulation variationnelle du problème posé par les équations (1) et (4). Il est donc important avant d'aborder la méthode proprement dite de décrire l'obtention de ce principe variationnel, et la technique de base utilisée pour le résoudre. La description se fera, par souci de clarté, essentiellement pour le problèmes à deux dimensions. Une généralisation à trois dimensions ne pose cependant aucune difficulté d'ordre théorique.

4.1 Principe variationnel

A l'intégration directe d'une équation différentielle, avec des fonctions de *Green* par exemple, il existe souvent une méthode alternative beaucoup plus commode à utiliser. Elle consiste à remplacer le problème original en celui de la minimisation d'une certaine expression intégrale. Cette expression peut d'ailleurs souvent se rattacher à une grandeur physique du problème comme, par exemple, l'énergie.

Dans le cas déterministe où l'opérateur L dans (1) est entièrement connu, et en considérant des conditions aux limites homogènes, il est facile de vérifier que [3; 8]

$$F(\Phi) = \langle L\,\Phi, \Phi \rangle - 2 \langle \Phi, g \rangle \tag{12}$$

a une valeur stationnaire pour la solution de (1). Le produit interne utilisé dans (12) représente une intégration sur le domaine D telle que

$$\langle u, v \rangle = \int_D u\,v^* \, d\Omega \tag{13}$$

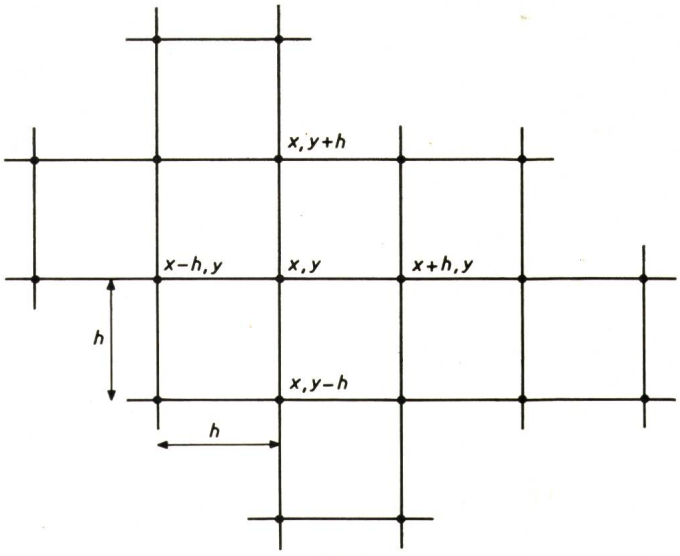

Fig. 2
Répartition des points pour l'approximation par différences finies

[2]) Il est possible de considérer ces deux techniques d'approximation comme deux cas particuliers de la méthode des moments [4]. Les différences finies correspondent à l'emploi de fonctions de *Dirac* comme fonctions test.

où v^* indique le complexe conjugé de v. La valeur stationnaire obtenue par (12) est plus précisément un minimum si deux conditions sont vérifiées:

a) Caractère auto-adjoint du problème

$$\langle Lu, v \rangle = \langle Lv, u \rangle \tag{14}$$

b) Caractère défini-positif de L

$$\langle Lu, u \rangle > 0 \qquad \text{pour tout } u \neq 0 \tag{15}$$

Ces conditions sont en fait satisfaites dans la plupart des problèmes pratiques. Pour l'opérateur laplacien, par exemple, avec des conditions limites homogènes [c'est-à-dire pour $f(s) \equiv 0$ dans (4)], on voit rapidement que

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= -\int_D v^* \nabla^2 u \, d\Omega = \\ &= \int_D \nabla u \cdot \nabla v^* \, d\Omega - \int_S v^* \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \end{aligned} \tag{16}$$

en utilisant l'identité de *Green*. On trouve de même:

$$\langle Lv, u \rangle = \int_D \nabla u^* \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_S u^* \frac{\partial v}{\partial n} \, dS \tag{17}$$

Avec des conditions limites homogènes et des fonctions u et v réelles, les intégrales de surface s'éliminent dans (16) et (17) et le caractère auto-adjoint est immédiat. De même, pour la condition (15), il suffit de remplacer v par u pour avoir

$$\langle Lu, u \rangle = \int_D |\nabla u|^2 \, d\Omega \tag{18}$$

et $L = \nabla^2$ est donc défini-positif. On aura:

$$F(\Phi) = \int_D (\nabla \Phi)^2 \, d\Omega - 2 \int_D \Phi g \, d\Omega \tag{19}$$

Le cas des conditions non-homogènes [$f(s) \neq 0$] entraine une expression plus générale de $F(\Phi)$. Sa dérivation en est donnée à l'appendice A.

Pour les problèmes à valeurs propres comme celui de l'équation de *Helmholtz* (3), on peut réécrire (1) comme

$$K\Phi - \lambda N \Phi = 0 \tag{20}$$

où K et N sont deux opérateurs déterminés. On sait alors que les valeurs propres peuvent être obtenues par la minimisation du quotient de *Rayleigh*

$$\lambda = \frac{\langle K\Phi, \Phi \rangle}{\langle N\Phi, \Phi \rangle} \tag{21}$$

La fonctionnelle $F(\Phi)$ correspondant à (20) peut donc s'écrire

$$F(\Phi) = \langle K\Phi, \Phi \rangle - \lambda \langle N\Phi, \Phi \rangle \tag{22}$$

qui doit être minimale (nulle) pour Φ et λ solution de (20). On voit que cette formulation est cohérente avec la formule (12).

Il est important de noter ici que la minimisation des fonctionnelles (12) ou (22) donnera uniquement la solution de l'équation différentielle. Les conditions aux limites doivent a priori être satisfaites par les fonctions Φ utilisées pour minimiser $F(\Phi)$. Cependant pour certains opérateurs, comme celui de *Laplace* ou de *Helmholtz*, les conditions de *Neumann* ou de *Cauchy* sont naturelles, c'est-à-dire qu'elles sont satisfaites automatiquement par le processus de minimisation de $F(\Phi)$. Une rapide vérification en est donnée à l'appendice B. Dans ces cas-là, les fonctions Φ ne devront satisfaire a priori que les conditions de *Dirichlet*.

4.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Pour arriver à trouver la fonction Φ qui minimise la fonctionnelle $F(\Phi)$, beaucoup d'algorithmes sont possibles. Le calcul peut par exemple faire appel aux multiples techniques d'optimisation. Dans la majorité des cas pratiques, on se contente pourtant d'un processus simple, celui de *Rayleigh-Ritz*, pour lequel il est assez facile d'établir des critères rigoureux de convergence [8].

Supposons un ensemble de fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots f_M$ indépendantes et exprimons le champ Φ^d approché comme une combinaison linéaire de ces fonctions de base:

$$\Phi^d = \sum_{i=1} c_i f_i \tag{23}$$

ou les c_i sont des coefficients à déterminer.

Pour que le problème puisse être approximé correctement, il faut que Φ^d tende vers la solution exacte Φ quant M tend vers l'infini, c'est-à-dire que l'ensemble des fonctions de base doit être complet par rapport à la solution. La minimisation de $F(\Phi)$, où Φ a été remplacé par (23), conduit alors à annuler les dérivées par rapport aux paramètres variationnels c_i du problème. On aura donc:

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots M \tag{24}$$

Ces équations formeront un système d'équations linéaires simultanées. Sous forme matricielle, il peut s'écrire:

$$Ac = b \tag{25}$$

pour l'opérateur déterministe (1) et

$$Ac = \lambda B c \tag{26}$$

pour l'opérateur aux valeurs propres.

A et B sont des matrices carrées et c un vecteur contenant les paramètres variationnels c_i.

Ce système aura l'avantage d'être de dimension réduite et pourra être résolu facilement par des méthodes directes classiques comme celles de *Gauss* (triangularisation).

4.3 Division en éléments finis

Une combinaison de fonctions élémentaires (23) peut être définie sur tout le domaine D, mais il est parfois avantageux de diviser ce domaine en éléments plus petits sur chacun desquels on impose une combinaison particulière. On s'assure évidemment d'avoir une continuité satisfaisante entre éléments adjacents. Dans le cas de fonctions test polynomiales du premier degré représentant des plans et en considérant le champ comme une surface à approximer, cette division revient à remplacer la surface par un certain nombre de petites facettes planes [2]. Cette approximation peut évidemment s'affiner si on prend des polynomes de degré plus élevé ou d'autres fonctions mieux adaptées au problème. Une division en éléments finis permet en général d'obtenir un degré de précision très satisfaisant avec des fonctions relativement simples et en nombre limité.

La fonctionelle $F(\Phi)$ sera ici remplacée par une somme de termes correspondant à la contribution de chaque élément. On aura donc:

$$F(\Phi) = \sum_{i=1}^{K} F_i(\Phi) \tag{27}$$

où K est le nombre total d'éléments considérés, F_i la contribution particulière de l'élément i et Φ la combinaison qui est définie. Ces termes F_i sont évidemment de la forme décrite en (12) et (22) où les intégrales de surface portent sur l'élément correspondant et les éventuelles intégrales curvilignes sur le contour de l'élément.

Un avantage important de la méthode des éléments finis apparaît dès maintenant en considérant l'équation (27). La fonctionnelle, et donc l'opérateur, peut varier d'un élément à l'autre. Cette facilité permet par exemple de traiter aisément des cas de domaines inhomogènes, où les caractéristiques du milieu (permittivité, perméabilité) varient brusquement [9].

La division du domaine D et l'application de l'équation (27) n'est possible que si l'on est assuré d'un minimum de continuité aux frontières intérieures des éléments. La nécessité de cette continuité peut être mise en évidence par un exemple très simple. Supposons un domaine unidimensionnel ($0 \leqq x \leqq 1$) sur lequel l'équation de *Laplace*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{28}$$

doit être résolue. Les conditions aux limites sont $\Phi = 0$ en $x = 0$ et $\Phi = 1$ en $x = 1$. On divise le domaine en deux éléments $0 \leqq x \leqq 0{,}5$ et $0{,}5 \leqq x \leqq 1$ et on y définit des fonctions test:

$$\Phi = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

et

$$\Phi = b_1 + b_2 (x - 1) + b_3 (x - 1)^2$$

respectivement. Pour satisfaire au départ les conditions de *Dirichlet* on doit poser $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Si aucune condition de continuité n'est imposée en $x = 0{,}5$, la minimisation de (19) entraînera la solution:

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0 \tag{29}$$

Par contre, si en impose la condition de continuité

$$2\, a_2 + a_3 = 1 - 2\, b_2 + b_3 \tag{30}$$

le minimum de $F(\Phi)$ sera atteint pour

$$a_3 = b_3 = 0\ ; \quad a_2 = b_2 = 1 \tag{31}$$

ce qui est effectivement la solution exacte du problème. Il est donc clair que la minimisation de $F(\Phi)$, représentant ici l'énergie, n'est pas suffisante pour garantir l'exactitude de la solution. On a en effet la même énergie pour les deux solutions (29) et (31).

En pratique, toutefois, les conditions de continuité ne peuvent pas être introduite comme on vient de le faire à l'équation (30): il en résulterait une complexité excessive de l'algorithme de calcul. Pour garantir plus commodément cette condition, on définit d'abord différemment la fonction test donnée en (23). Supposons un certain nombre M de points appelés points nodaux, choisis dans le domaine D ou dans l'élément considéré. Si Φ_i représente la valeur de la fonction test Φ au point i on peut réécrire (23) comme

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{M} \Phi_i\, \alpha_i(x, y) \tag{32}$$

pour autant que les $\alpha_i(x, y)$ soient des fonctions d'interpolation adaptées. Elles doivent avoir une valeur unité au point nodal i et être nulles en tout autre point nodal. Les Φ_i sont ici les nouveaux paramètres variationnels. En plaçant un certain nombre

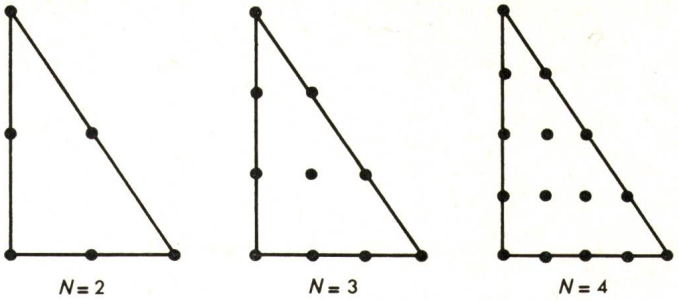

Fig. 3
Exemple de répartition de points nodaux dans des élements triangulaires (fonctions polynominales d'ordre N)

de ces points sur les frontières entre éléments, on y fait coïncider le champ Φ. En toute généralité la continuité ne sera exacte que pour ces points-là, toutefois, dans le cas de fonctions test polynomiales et pour des éléments à côté rectilignes, cette technique permet d'assurer une continuité exacte en tous points des frontières (pour faire coïncider deux polynomes d'ordre N sur une droite, il suffit de les faire coïncider en $N + 1$ points). Dans le cas d'éléments triangulaires, on peut facilement se représenter une répartition possible des points nodaux en fonction de l'ordre N. Quelques exemples en sont donnés à la fig. 3.

Outre la continuité, cette manière d'agir permet de satisfaire aisément au départ aux conditions de *Dirichlet*. Il suffit en effet d'imposer les valeurs de Φ aux points nodaux situés sur la frontière extérieure correspondante.

La continuité de la fonction d'essai Φ n'est cependant pas suffisante pour garantir la convergence du processus. Il faut aussi s'assurer que les dérivées premières soient continues à la limite, c'est-à-dire pour un nombre très élevé d'éléments ou de fonctions de base f_i. Pour les opérateurs de *Laplace* et de *Helmholtz* cette continuité des dérivées est heureusement satisfaite automatiquement dans le processus de minimisation. C'est une condition naturelle de la fonctionnelle utilisée, et aucune restriction sur les fonctions test ne doit être imposée au départ. La condition naturelle est d'ailleurs plus générale. Elle correspond à l'égalité du flux $\varepsilon\, \partial\Phi/\partial n$ à la frontière commune entre deux éléments. Une preuve théorique en est donnée à l'appendice C.

La méthode des éléments finis se présente donc comme une technique extrêmement souple pour l'approximation de champs. Une très bonne convergence est obtenue, tout en limitant le nombre de variables du système. De plus, par le fait que l'on peut modifier non seulement la taille des éléments, mais aussi leur forme et le degré d'approximation dans chacun d'eux, la méthode permet de s'adapter à la plupart des problèmes rencontrés en pratique. Elle permet en outre de tenir compte rigoureusement des discontinuités de milieu.

4.4 Régions présentant des Points singuliers

Une des difficultés les plus importantes dans l'approximation de champs est la présence sous une forme ou une autre de points singuliers, c'est-à-dire d'endroits où la variation du champ est très forte ou même infinie [10]. Une source ponctuelle, un saut dans les conditions limites, une variation brusque de direction sont des exemples de tels points. La plupart des méthodes d'approximation utilisent des représentations simples du champ comme par exemple des formes polynomiales [11]. Pourtant aux environs de points singuliers, le champ ne peut plus être représenté correctement par de telle fonctions. Elles ne peuvent en effet jamais contenir la singu-

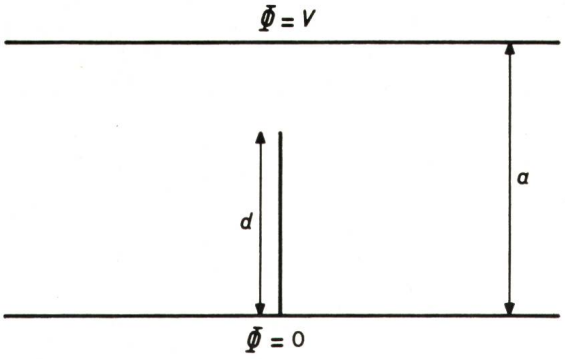

Fig. 4
Guide à plaques parallèles avec arête longitudinale

larité qu'il s'agit de simuler. Dans de tels cas, la convergence peut être considérablement ralentie, et même parfois ne pas tendre vers la solution exacte.

L'introduction d'une forme asymptotique du champ autour d'un point singulier permet souvent une amélioration considérable, pour autant qu'elle soit compatible avec la méthode numérique utilisée. Ce procédé présente de très grandes difficultés avec les différences finies, par suite de la perturbation de tout l'arrangement algorithmique [12; 13; 14]. Dans le cas des éléments finis, par contre, cette manière de faire est assez directe. Ces fonctions asymptotiques peuvent en effet être ajoutées à la combinaison définie en (23) et subir le même traitement que les fonctions polynomiales simples [15]. En dehors d'une plus grande complexité des intégrations numériques à effectuer, l'adjonction d'autres fonctions ne perturbe donc en rien le fonctionnement du calcul.

5. Exemples numériques

La méthode des éléments finis a été utilisée de plus en plus ces dernières années dans le domaine de l'électromagnétisme. D'abord appliquée aux configurations fermées comme les problèmes de guides d'ondes en hyperfréquences [9; 11; 16; 18], elle a ensuite été étendue à des cas plus généraux comprenant des géométries ouvertes comme celles des lignes à microbande [17; 19].

Les problèmes relatifs aux machines électriques ont été abordés par *Chari* et *Silvester* [20] et plus recemment par *Wexler* [21], pour le cas de matériaux anisotropes.

On présentera ici à titre d'exemple deux problèmes. Choisis en fonction de la disponibilité de solutions exactes, ils permettent d'apprécier plus directement d'efficacité générale de la méthode en comparant les résultats avec les solutions analytiques. Les deux problèmes présentent de plus des points singuliers aux frontières. Ceci permettra de mettre en évidence la souplesse d'utilisation de la méthode dans de tels cas.

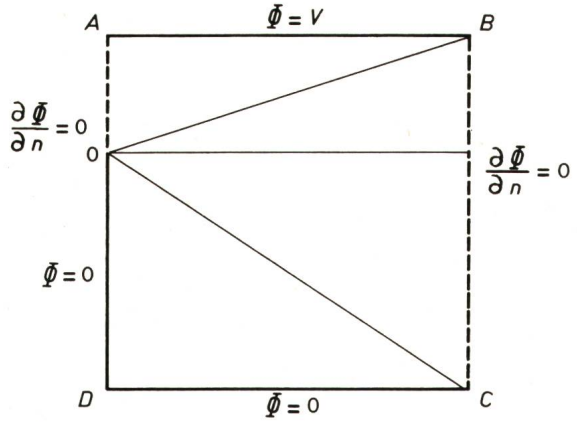

Fig. 5
Problème aux valeurs limites simplifiées
Division en 4 éléments

Le premier exemple est la solution de l'équation de *Laplace* dans un guide d'ondes à plaques parallèles présentant une discontinuité longitudinale. L'autre est la recherche des valeurs propres de l'équation de *Helmholtz* pour une région en forme de L.

5.1 Discontinuité longitudinale dans un guide d'ondes à plaques parallèles

Considérons un guide à plaques parallèles propageant le mode TEM (pas de composantes longitudinales des champs). Il est partagé sur sa longueur par une arête verticale (fig. 4).

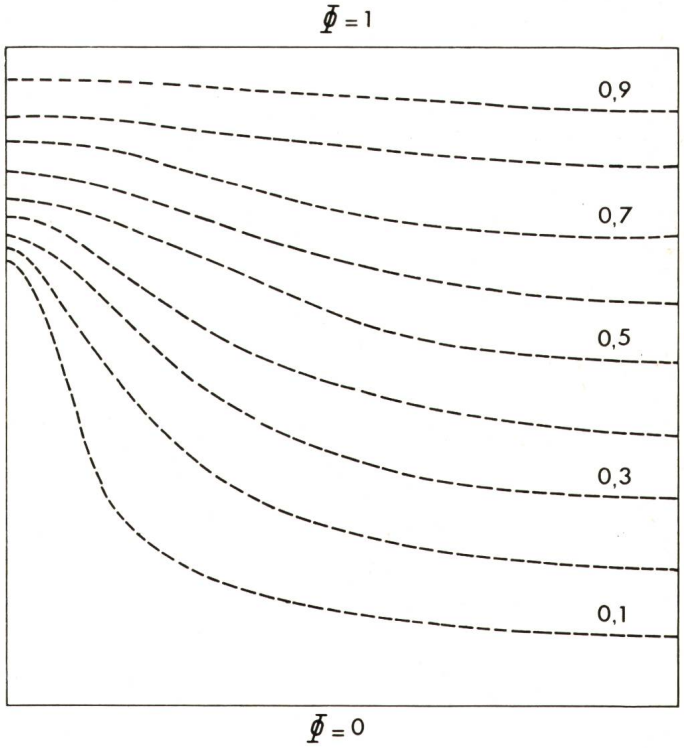

Fig. 6
Equipotentielles pour le guide d'ondes avec arête longitudinale

Les équations de *Maxwell* sont séparables dans ce cas et le problème peut se traiter comme en électrostatique. Il faut donc résoudre l'équation de *Laplace* dans la région considérée. En utilisant la symétrie du problème et en supposant que le champ n'est pas perturbé à une certaine distance de la discontinuité, on peut se ramener à la configuration fermée décrite à la fig. 5. Comme on peut le constater, les conditions limites présentent une singularité au point 0.

Pour résoudre le problème par la méthode des éléments finis, on divise la région en triangles. La fig. 5 donne une configuration possible. Dans une première étape des fonctions test polynomiales sont utilisées. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution exacte donnée par une transformation conforme [22]. On peut en déduire l'erreur introduite par la méthode numérique sur l'ensemble de la région et aussi plus particulièrement dans un petit voisinage du point singulier. Cette erreur est calculée en intégrant la différence normalisée des potentiels exact et approché sur le domaine envisagé. Les

deux premières lignes du tableau I résument ces résultats pour les polynomes d'ordre 2 et 3. On remarque que l'erreur est surtout concentrée aux environs du point singulier, et il est donc à prévoir que la précision puisse être grandement améliorée en ajoutant à l'ensemble des fonctions polynomiales certains termes du développement asymptotique de Φ autour de 0. Ces termes supplémentaires sont de la forme

$$r^{n/2} \sin \frac{1}{2} n \theta \qquad n = 1, 3, 5 \ldots$$

où r et θ sont les coordonnées cylindriques centrées au point 0. Les résultats obtenus sont rassemblés au tableau I pour des polynomes d'ordre 2 et 3 avec 1 ou 2 fonctions test supplémentaires. La fig. 6 représente les équipotentielles données par l'approximation d'ordre 3 avec deux fonctions asymptotiques. L'amélioration introduite est très significative, surtout aux environs de la singularité. Cette précision est atteinte sans augmenter exagérément le temps de calcul ni la réservation de mémoire, et surtout sans modifier profondément le programme de calcul.

5.2 Région en forme de L. Equation de Helmholtz

La solution de l'équation de *Helmholtz* dans une région présentant des parties réentrantes fait apparaître de grandes difficultés du point de vue analytique. Il faut presque toujours dans ces cas recourir à une technique numérique. L'exemple choisi est une région en forme de L où Φ est nul sur le contour (fig. 7). Une méthode à éléments finis permet la résolution rapide et précise du problème malgré la présence de la singularité au point 0.

On divise d'abord la région en triangles en isolant le point singulier (fig. 5). Dans chaque triangle, un polynome d'ordre 2 ou 3 est défini et dans la zone hachurée autour du point 0 des

Solution par éléments finis du guide d'ondes à plaques parallèles avec arête longitudinale ($d/a = 0{,}77$ et $V = 1$)

Tableau I

Ordre des fonctions test polynomiales	Nombre de fonctions asymptot.	Nombre de paramètres variationnels	Erreur normalisée intégrée sur toute la région %	Erreur normalisée sur une région proche du point 0 [1] %
2	0	15	8,93	9,32
3	0	28	6,52	7,84
2	1	16	1,53	1,13
2	2	17	1,15	0,91
3	1	29	1,11	0,87
3	2	30	0,92	0,61

[1]) Cette région correspond à 20 % de l'ensemble de la surface.

Première valeur propre de l'équation de Helmholtz pour la région en L

Tableau II

Ordre des fonctions test polynomiales	Nombre des fonctions asymptot.	Nombre de paramètres variationnels	Première valeur propre k^2_1	Erreur par rapport à la valeur donnée en [23] [1] %
2	0	39	10,52312	9,150
3	0	80	9,95136	3,231
2	1	40	9,65012	0,108
2	2	41	9,64612	0,065
3	1	81	9,64281	0,032
3	2	82	9,64182	0,021

[1]) La valeur donnée en [23] est $k_1^2 = 9{,}639724$

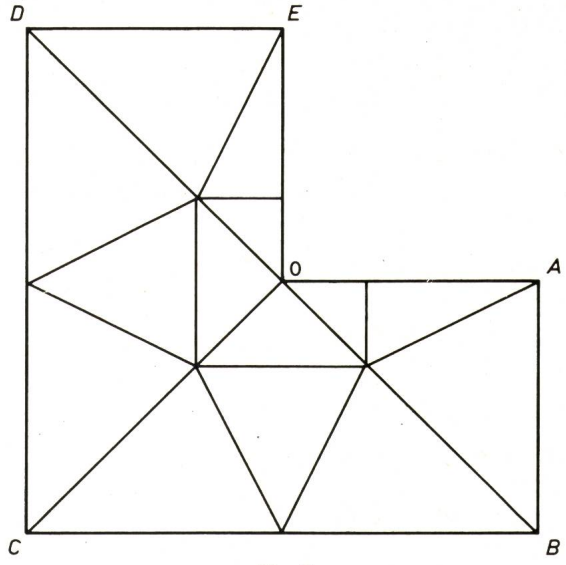

Fig. 7
Région en forme de L
Division en 14 éléments

fonctions asymptotiques sont ajoutées à l'ensemble polynomial. Ces fonctions sont du type

$$r^{2n/3} \sin 2 n \theta / 3 \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Pour garantir en plus leur caractère local, on les multiplie par un facteur d'atténuation e^{-pr} ($p = 2$, par exemple).

Le tableau II donne les résultats obtenus pour le calcul de la première valeur propre. Ils peuvent être comparés avec ceux obtenus par *Fox, Henrici* et *Moler* [23] utilisant une méthode quasi analytique. On remarque que même sans l'introduction des fonctions supplémentaires, une très bonne précision est obtenue pour un nombre de variables réduit. L'addition des fonctions asymptotiques toutefois apporte une amélioration très sensible sans élever notablement ni le temps de calcul, ni la mémoire utilisée. Connaissant la valeur propre, le potentiel peut être calculé et les équipotentielles obtenues sont illustrées à la fig. 8.

6. Conclusion

La méthode des éléments finis se révèle être une alternative extrêmement intéressante aux méthodes traditionnelles des différences finies dans le calcul des champs électromagnétiques. Outre sa simplicité, sa souplesse d'utilisation et sa facilité à tenir compte des milieux inhomogènes et anisotropes, elle présente de grands avantages dans le cas de champs singuliers. En effet, l'adjonction de fonctions asymptotiques aux environs de la singularité ne perturbe en rien l'arrangement du calcul.

La méthode a été présentée essentiellement pour des problèmes à deux dimensions. Des cas plus généraux à trois dimensions peuvent être résolus de la même manière. Il est évident toutefois que la taille des systèmes à résoudre sera sensiblement plus élevée, ce qui augmentera le temps de calcul nécessaire.

Appendice A

Conditions limites non-homogènes

Dans le cas de conditions non-homogènes aux frontières

$$B_s \Phi = f \tag{33}$$

où B_s est un opérateur linéaire, une fonctionnelle $F(\Phi)$ plus générale que (12) doit être envisagée. Au lieu de chercher la solution de

$$L\,\Phi = g \tag{34}$$

on examine

$$L\,\Psi = L\,(\Phi - \chi) = g - L\,\chi \tag{35}$$

où χ est une fonction suffisamment différentiable et satisfaisant aux conditions limites (33). Cette nouvelle équation porte donc sur la fonction $\Psi = \Phi - \chi$ qui satisfait à des conditions limites homogènes. On peut donc en déduire la fonctionnelle correspondante:

$$\mathrm{F}\,(\Psi) = \langle L\,\Psi\,,\,\Psi\rangle - 2\,\langle\,\Psi\,, g - L\,\chi\rangle \tag{36}$$

En introduisant dans (36) la forme de Ψ, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\,(\Phi) = {} & \langle L\,\Phi,\ \Phi\rangle - 2\,\langle\,\Phi\,,\ g\rangle + \\ & + \langle\,\Phi\,,\ L\chi\rangle - \langle L\,\Phi\,,\ \chi\rangle + 2\,\langle\,\chi\,,\ g\rangle - \langle L\chi, \chi\rangle\end{aligned} \tag{37}$$

Les deux derniers termes sont indépendants de Φ et peuvent donc être ignorés pendant le processus de minimisation. Il reste alors à séparer les fonctions Φ et χ dans les deux termes

$$\langle\,\Phi, L\chi\rangle - \langle\,L\,\Phi, \chi\rangle \tag{38}$$

dans l'espoir de pouvoir garder en fin de compte une expression de la fonctionnelle ne dépendant plus de χ.

Cela est possible par exemple pour les opérateurs de *Laplace* et de *Helmholtz*. Pour des conditions de *Cauchy*,

$$\left.\frac{\partial\,\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{s}} + f_2(s)\cdot\Phi\,(s) = \mathrm{f}\,(s) \tag{39}$$

on trouve pour l'opérateur laplacien

$$\mathrm{F}\,(\Phi) = \int_{\Omega} (\nabla\,\Phi)^2\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{f}_2\,\Phi^2 - 2\,\mathrm{f}\,\Phi)\,\mathrm{d}S \tag{40}$$

Des formes équivalentes peuvent se déduire facilement pour l'opérateur de *Helmholtz* ou pour des conditions de *Neumann* et de *Dirichlet*.

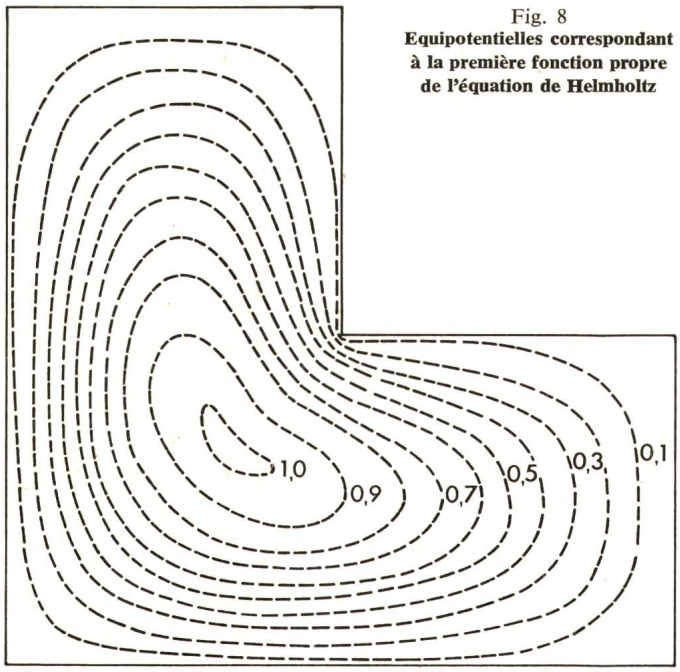

Fig. 8
Equipotentielles correspondant à la première fonction propre de l'équation de Helmholtz

Appendice B

Caractère naturel des conditions de Neumann et de Cauchy

Soit la condition limite de *Cauchy* (de *Neumann* si $\mathrm{f}_2(s) = 0$)

$$\left.\frac{\partial\,\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{s}} + \mathrm{f}_2\,(s)\cdot\Phi = \mathrm{f}\,(s) \tag{41}$$

et la fonctionnelle

$$\mathrm{F}\,(\Phi) = \int_{\mathrm{D}} (\nabla\,\Phi)^2\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{f}_2\,\Phi^2 - 2\,\mathrm{f}\,\Phi)\,\mathrm{d}S \tag{42}$$

Il faut démontrer que le fait de minimiser (42) est équivalent à chercher la solution de l'équation de *Laplace* avec la condition limite (41). Cette condition serait donc naturelle pour la fonctionnelle mentionnée.

Supposons une fonction Φ_0 qui minimise $\mathrm{F}(\Phi)$ et une fonction arbitraire Φ_1. Une fonction d'essai pourra alors s'écrire sous la forme

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha\,\Phi_1 \tag{43}$$

avec α comme paramètre. Le minimum de $\mathrm{F}(\Phi)$ est atteint lorsque $\Phi = \Phi_0$ et donc:

$$\left.\frac{\partial\,\mathrm{F}\,(\Phi)}{\partial\,\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{44}$$

En introduisant (43) dans (42) et en dérivant par rapport à α comme dans (44), on trouve:

$$\int_{\mathrm{D}} (\nabla\,\Phi_0)\,(\nabla\,\Phi_1)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{f}_2\,\Phi_0\,\Phi_1 - \mathrm{f}\,\Phi_1)\,\mathrm{d}S = 0 \tag{45}$$

Appliquant ensuite l'identité de *Green* au premier terme, cette équation devient:

$$\int_{\mathrm{D}} (-\,\nabla^2\,\Phi_0)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\mathrm{S}} \left(\mathrm{f}_2\,\Phi_0 - f + \frac{\partial\,\Phi_0}{\partial n}\right)\Phi_1\,\mathrm{d}S = 0 \tag{46}$$

La fonction Φ_1 étant arbitraire, l'équation (6) ne peut être satisfaite que si

$$-\,\nabla^2\,\Phi_0 = 0 \qquad \text{sur } D \tag{47}$$

et

$$\left.\frac{\partial\,\Phi_0}{\partial\,n}\right|_{\mathrm{s}} + f_2\,\Phi_0 = f \qquad \text{sur } S \tag{48}$$

On a donc bien que la fonction qui minimise (2) satisfait non seulement à l'équation de *Laplace* (47) mais aussi a la condition limite de *Cauchy*. Un raisonnement identique peut se faire pour l'équation de *Helmholtz*.

Appendice C

Conditions d'interface dans la méthode des éléments finis

Si une région présente une constante diélectrique inhomogène, on peut choisir les éléments de telle façon à ce qu'ils suivent les interfaces diélectriques. Ces interfaces sont alors approximées par une suite de segments de droite. Les conditions à la frontière sont données par

$$\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,n}\right|_1 = \varepsilon_2 \left.\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,n}\right|_2 \tag{49}$$

à la limite de deux milieux homogènes 1 et 2. Elles sont satisfaites naturellement dans le processus de minimisation de la fonctionnelle

$$\mathrm{F}\,(\Phi) = \int_{\mathrm{D}} \varepsilon\,(\nabla\,\Phi)^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{50}$$

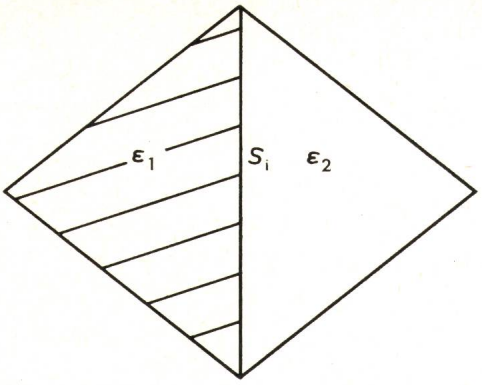

Fig. 9
Deux triangles de part et d'autre d'une discontinuité diélectrique

Par commodité, mais sans rien enlever à la généralité de la démonstration, on considère une région divisée en deux éléments seulement correspondant à deux diélectriques différents ε_1 et ε_2 (fig. 9). Supposons de plus que les conditions aux limites extérieures soient homogènes. L'équation (50) peut alors s'écrire

$$F(\Phi) = \int_{D_1} \varepsilon_1 (\nabla \Phi)^2 \, d\Omega_1 + \int_{D_2} \varepsilon_2 (\triangle \Phi)^2 \, d\Omega_2 \tag{51}$$

Soit Φ_0 une fonction test qui minimise (51), qu'on peut écrire en général

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha \Phi_1 \tag{52}$$

où Φ_1 est une fonction test quelconque. Il faut que

$$\left. \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = 0} = 0 \tag{53}$$

c'est-à-dire

$$\int_{D_1} \varepsilon_1 (\nabla \Phi_0)(\nabla \Phi_1) \, d\Omega_1 + \int_{D_2} \varepsilon_2 (\nabla \Phi_0)(\nabla \Phi_1) \, d\Omega_2 = 0 \tag{54}$$

En utilisant l'identité de *Green,* (54) se transforme en

$$\begin{aligned} &- \int_{D_1} \Phi_1 \nabla (\varepsilon_1 \nabla \Phi_0) \, d\Omega_1 - \int_{D_2} \Phi_2 \nabla (\varepsilon_2 \nabla \Phi_0) \, d\Omega_2 + \\ &\quad + \int_{S_1} \varepsilon_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \, dS_1 + \int_{S_2} \varepsilon_2 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \, dS_2 = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

où S_1 et S_2 sont les contours des deux régions 1 et 2. Or les conditions aux limites étant homogènes, les deux derniers termes de (55) se résument à l'intégrale sur l'interface diélectrique S_1. En rassemblant en outre les deux premiers termes en un seul, (55) devient:

$$\begin{aligned} &- \int_{D} \Phi_1 \nabla (\varepsilon \nabla \Phi_0) \, d\Omega + \\ &\quad + \int_{S_1} \Phi_1 \left(\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_1 - \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_2 \right) dS = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute fonction Φ_1 et se réduit donc à

$$\nabla (\varepsilon \nabla \Phi_0) = 0 \tag{57}$$

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_1 = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_2 \tag{58}$$

Une fonction Φ_0 qui minimise l'intégrale (50) satisfait donc à l'équation de *Laplace* en milieu inhomogène et les conditions aux limites sur l'interface diélectriques.

L'auteur tient à remercier le Professeur *A. Wexler* de l'Université du Manitoba (Canada) pour l'intérêt et les nombreux conseils prodigués tout au long de son travail de maîtrise. Il adresse aussi toute sa gratitude au Professeur *F. Gardiol* de l'EPF-L pour l'aide apportée à la rédaction de cet article.

Tous les calculs ont été effectués au Centre de Calcul de l'EPF-L. La compétence de son personnel a été très appréciée. Le travail a été en partie soutenu par le Fonds National (Crédit No 2.647.72) et par la Fondation Hasler (Projet AGEN No 16).

Bibliographie

[1] *G. E. Forsythe* and *W. R. Wasow:* Finite difference methods for partial differential equations. New York, John Wiley, 1960.
[2] *O. C. Zienkiewicz:* La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur. Paris, Ediscience, 1973.
[3] *A. Wexler:* Computation of electromagnetic fields. Trans. IEEE MTT 17(1969)8, p. 416...439.
[4] *R. F. Harrington:* Field computation by moment method. New York, Macmillan, 1968.
[5] *R. S. Varga:* Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1962.
[6] *P. Laasonen:* On the truncation error discrete approximation to the solutions of Dirichlet problems in a domain with corners. Journal of the Association for Computing Machinery 5(1958)1, p. 32...38.
[7] *J. Milne:* Numerical solution of differential equations. New York, John Wiley, 1953.
[8] *S. G. Mikhlin:* Variational methods in mathematical physics. Oxford/New York, Pergamon Press, 1964.
[9] *P. Silvester:* A general high-order finite-element waveguide analysis program. Trans. IEEE MTT 17(1969)4, p. 204...210.
[10] *D. A. MacDonald:* Solution of the incompressible boundary layer equations via the Galerkin Kantorovitch technique. Journal of the Institute of Mathematics and its applications 6(1970)2, p. 115...130.
[11] *R. M. Bulley:* Analysis of the arbitrarly shaped waveguide by polynomial approximation. Trans. IEEE MTT 18(1970)12, p. 1022...1028.
[12] *H. Motz:* The treatment of singularities of partial differential equations by relaxation methods. Quarterly of Applied Mathematics 4(1946)1, p. 371...377.
[13] *L. Fox:* Numerical solution of ordinary and partial differential equations. Oxford a. o., Pergamon Press, 1962.
[14] *L. Fox* and *R. Sankar:* Boundary singularities in linear elliptic differential equations. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications 5(1969)3, p. 340...350.
[15] *M. C. Decréton:* Treatment of singularities in the finite-element method. Thesis of the University of Manitoba, Canada, 1972.
[16] *D. J. Richards* and *A. Wexler:* Finite-element solutions within curves boundaries. Trans. IEEE MTT 20(1972)10, p. 650...657.
[17] *P. Daly:* Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods. Trans. IEEE MTT 19(1971)1, p. 19...25.
[18] *P. Silvester:* Finite-element programs for the scalar Helmholtz equation. IEEE International Convention Digest -(1971), p. 618...619.
[19] *B. M. MacDonald* and *A. Wexler:* Finite-element solution of unbounded field problems. Trans. IEEE MTT 20(1972)12, p. 841...847.
[20] *M. V. K. Chari* and *P. Silvester:* Finite-element analysis of magnetically saturated D-C machines. Trans. IEEE PAS 90(1971)5, p. 2362...2372.
[21] *A. Wexler:* Finite-element field analysis of an inhomogeneous, anisotropic, reluctance machine rotor. Trans. IEEE PAS 92(1973)1, p. 145...149.
[22] *G. G. MacFarlane:* Quasi-stationary field theory and its application to diagrams and junctions in transmission lines and wave guides: J. IEE Part IIIA 93(1946)4, p. 703...719.
[23] *L. Fox, P. Henrici* and *C. Moler:* Approximation and bounds for eigenvalues of elliptic operators. SIAM Journal of Numerical Analysis 4(1967)-, p. 89...102.

Adresse de l'auteur:
Marc C. Decréton, Chaire d'Electromagnétisme et d'Hyperfréquences, EPF-L, chemin de Bellerive, 16, 1007 Lausanne.