Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 61 (1970)

Heft: 2

Artikel: Zur Stern-Vieleck-Umwandlung

Autor: Herzog, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915900

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Stern-Vieleck-Umwandlung [1])

Von *W. Herzog*, Mainz

250-257

621.316.765.1

Bei der Umwandlung eines mindestens vierstrahligen Sternes in ein Vieleck entsteht eine höhere Anzahl von Elementen. Um Gleichheit zu erzielen, kann man Bedingungen zwischen den Vieleckelementen aufstellen. Es wird gezeigt, dass eine geeignete und ausreichende Auffüllung des Sternes eine Umwandlung in ein Vieleck mit beliebigen Elementen erlaubt. Die Auffüllung des Sternes gestattet die Anwendung der Sternschaltungen für Filterzwecke.

Lors de la conversion d'un couplage en étoile présentant au moins quatre branches en un couplage polygonal, il en résulte un nombre plus élevé d'éléments. Afin d'obtenir l'égalité, on peut établir des conditions entre éléments du polygone. L'auteur montre qu'un remplissage approprié et suffisant de l'étoile permet une conversion en un polygone d'un nombre quelconque d'éléments et, ainsi, l'application des couplages en étoile dans le cas de filtres.

1. Umwandlung mit Bedingungen

Ist n die Anzahl der Ecken eines Vielecks, so lautet die Formel für die Summe S der direkten und diagonalen Verbindungen:

$$S = n\,\frac{n-1}{2} \tag{1}$$

Nur für einen dreistrahligen Stern ($n = 3$) ist die Anzahl der Vieleckverbindungen gleich der Anzahl der Sternstrahlen. Schon der vierstrahlige Stern ist einem Viereck mit sechs Elementen gleichzusetzen. Bestehen zwei Bedingungen zwischen den sechs Elementen, so kann der vierstrahlige Stern in das Viereck umgewandelt werden und umgekehrt.

Dieses Problem wurde bereits behandelt [1][2]). Zur Erläuterung genügt die Übernahme der Fig. 2 und 3 dieses Aufsatzes (s. Fig. 1).

Für den symmetrischen Fall ist die Umwandlung in Fig. 2 wiedergegeben. Es entsteht eine Brücke mit drei verschiedenen Zweigen sowie den beiden zusätzlichen Querwiderständen R_{12}. Die Umwandlung in eine Brücke mit zwei verschiedenen Zweigen ergibt [2]:

$$X_1 = R_{12}$$

$$X_2 = R_{12}$$

Verlegt man die Querwiderstände in die Brücke, so entstehen die Zweige:

$$X_1' = \frac{R_{12}}{2} = R_{10} + R_{20}$$

$$X_2' = \frac{R_{12}}{2} = R_{10} + R_{20} \tag{2}$$

Das gleiche Ergebnis liefert die Anwendung des Satzes von Bartlett auf den Stern in Fig. 2.

Für Filterzwecke muss daher der Stern ergänzt werden ([1], Fig. 6). Es erscheint somit sinnvoll, den Stern derart zu ergänzen, dass die Umwandlung ein bedingungsfreies, also beliebiges Vieleck ergibt.

Die Ergänzung der Sternelemente auf die Anzahl der Vieleckelemente S [Gl. (1)] genügt jedoch nicht, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

[1]) Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz.
[2]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

2. Vergleich eines ergänzten vierstrahligen Sternes mit einem Viereck

Entsprechend der Ergänzung [1], Fig. 6, sei die in Fig. 3 (in welcher zur Vereinfachung jede Verbindung einem Widerstand entspricht) wiedergegebene Darstellung untersucht. Die allgemeinen Umwandlungsformeln [3; 1]:

$$R_{\nu\mu} = \frac{R_{\nu 0}\,R_{\mu 0}}{R_0}$$

$$\frac{1}{R_0} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_{\nu 0}} \tag{3}$$

$$\nu \neq \mu \qquad \nu = 1 \ldots n \qquad \mu = 1 \ldots n$$

ergeben für den vierstrahligen Stern:

$$R_{12} = \frac{R_{10}\,R_{20}}{R_0}$$

$$R_{13} = \frac{R_{10}\,R_{30}}{R_0}$$

$$R_{14} = \frac{R_{10}\,R_{40}}{R_0}$$

$$R_{23} = \frac{R_{20}\,R_{30}}{R_0} \tag{4}$$

$$R_{24} = \frac{R_{20}\,R_{40}}{R_0}$$

$$R_{34} = \frac{R_{30}\,R_{40}}{R_0}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{30}} + \frac{1}{R_{40}}$$

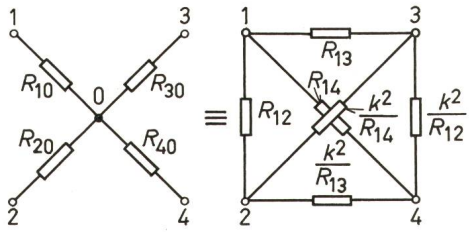

Fig. 1
Umwandlung des vierstrahligen Sterns in ein bedingtes Viereck
$R_{10} \ldots R_{40}$, $R_{12} \ldots R_{14}$ beliebige Scheinwiderstände, k wählbare Grösse mit der Dimension eines Widerstandes

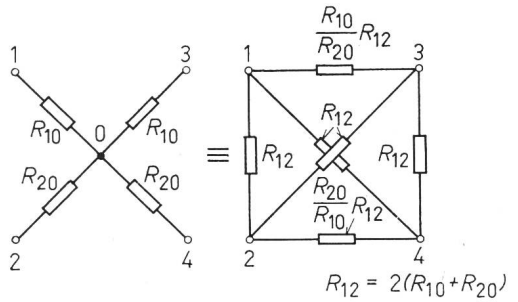

Fig. 2
Umwandlung eines symmetrischen vierstrahligen Sterns in ein Viereck
R_{10}, R_{20}, R_{12} beliebige Scheinwiderstände

Für die Zweige 14 und 23 gilt mit den Ergänzungswiderständen E_{14} und E_{23}:

$$R_{14}' = R_{14} \,||\, E_{14} \qquad R_{23}' = R_{23} \,||\, E_{23} \tag{5}$$

wobei das Zeichen || Parallelschaltung der durch dasselbe getrennten Grössen bedeutet.

Diese Zweige sind infolge der beliebigen Ergänzungen beliebig.

Aus Fig. 3 lässt sich für die nicht ergänzten Zweige entnehmen:

$$R_{12}\, R_{34} = R_{13}\, R_{24} \tag{6}$$

und somit bleibt eine Bedingung übrig. Es genügt also nicht, zwei beliebige Ergänzungen hinzuzufügen. Die in Gl. (6) gegebene Möglichkeit zwischen den Vieleckzweigen muss unterbunden werden.

3. Umwandlung des ergänzten vierstrahligen Sterns in ein beliebiges Viereck

In Fig. 4 wird eine andere Ergänzungsmöglichkeit wiedergegeben. Für die nichtergänzten Zweige R_{13}, R_{23}, R_{24}, R_{34} gibt es keine Möglichkeit, eine Paarbildung wie in Gl. (6) vorzunehmen, da im Index 3 dreimal, jedoch 1 nur einmal vorkommt. Die für die Umwandlung des Sterns in das Viereck geltenden Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
R_{12}' &= \frac{R_{10}\, R_{20}}{R_0} \,\Big\|\, E_{12} \\
R_{13} &= \frac{R_{10}\, R_{30}}{R_0} \\
R_{14}' &= \frac{R_{10}\, R_{40}}{R_0} \,\Big\|\, E_{14} \\
R_{23} &= \frac{R_{20}\, R_{30}}{R_0} \\
R_{24} &= \frac{R_{20}\, R_{40}}{R_0} \\
R_{34} &= \frac{R_{30}\, R_{40}}{R_0} \\
\frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{30}} + \frac{1}{R_{40}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Aus diesen Formeln lassen sich die Gleichungen für die Umwandlung des Vierecks in einen Stern mit den Ergänzungswiderständen wie folgt gewinnen:

Aus den Gln. (7) für die Zweige des Vierecks ohne Strich bildet man:

$$\begin{aligned}
\frac{R_{10}}{R_{20}} &= \frac{R_{13}}{R_{23}} \\
\frac{R_{10}}{R_{40}} &= \frac{R_{13}}{R_{34}} \\
\frac{R_{10}}{R_{30}} &= \frac{R_{10}}{R_{20}} \cdot \frac{R_{20}}{R_{30}} = \frac{R_{13}}{R_{23}} \cdot \frac{R_{24}}{R_{34}} \\
\frac{R_{20}}{R_{30}} &= \frac{R_{24}}{R_{34}} \\
\frac{R_{40}}{R_{30}} &= \frac{R_{24}}{R_{23}}
\end{aligned} \tag{8}$$

und setzt diese Werte in die Formel für R_0 ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_{10}} \left(1 + \frac{R_{10}}{R_{20}} + \frac{R_{10}}{R_{30}} + \frac{R_{10}}{R_{40}}\right) = \\
&= \frac{1}{R_{10}} \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{23}} + \frac{R_{13}}{R_{23}} \cdot \frac{R_{24}}{R_{34}} + \frac{R_{13}}{R_{34}}\right) \\
\frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_{30}} \left(\frac{R_{30}}{R_{10}} + \frac{R_{30}}{R_{20}} + 1 + \frac{R_{30}}{R_{40}}\right) = \\
&= \frac{1}{R_{30}} \left(\frac{R_{23}}{R_{13}} \cdot \frac{R_{34}}{R_{24}} + \frac{R_{34}}{R_{24}} + 1 + \frac{R_{23}}{R_{24}}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Mit der Abkürzung:

$$A = R_{23}\, R_{34} + R_{13}\, R_{34} + R_{13}\, R_{24} + R_{13}\, R_{23} \tag{10}$$

schreiben sich die Gln. (9):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_{10}} \cdot \frac{A}{R_{23}\, R_{34}} \\
\frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_{30}} \cdot \frac{A}{R_{13}\, R_{24}}
\end{aligned} \tag{11}$$

Das Produkt der Gln. (11) liefert mit der unter den Gln. (7) zu findenden Formel für R_{13}:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_0^2} &= \frac{1}{R_{10}\, R_{30}} \cdot \frac{A^2}{R_{23}\, R_{34}\, R_{13}\, R_{24}} = \\
&= \frac{1}{R_0\, R_{13}} \cdot \frac{A^2}{R_{23}\, R_{34}\, R_{13}\, R_{24}}
\end{aligned} \tag{12}$$

und daraus:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{A^2}{R_{23}\, R_{34}\, R_{13}^2\, R_{24}} \tag{13}$$

Den Gln. (11) entnimmt man:

$$\begin{aligned}
R_{10} &= \frac{R_0\, A}{R_{23}\, R_{34}} = \frac{R_{13}^2\, R_{24}}{A} \\
R_{30} &= \frac{R_0\, A}{R_{13}\, R_{24}} = \frac{R_{13}\, R_{23}\, R_{34}}{A}
\end{aligned} \tag{14}$$

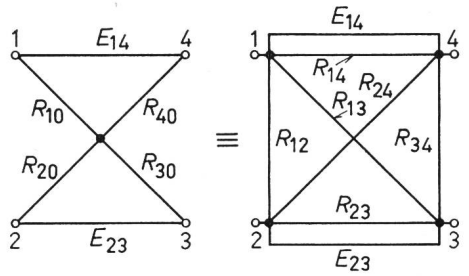

Fig. 3
Umwandlung des ergänzten vierstrahligen Sterns in ein Viereck mit einer Bedingung
E_{14}, E_{23}, R_{mn}
$m \neq n$, m, n = 1...4 beliebige Scheinwiderstände

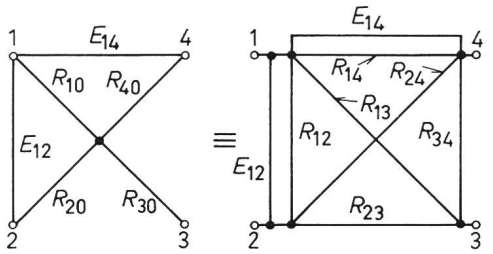

Fig. 4
Umwandlung des ergänzten vierstrahligen Sterns in ein beliebiges Viereck
E_{14} beliebiger Scheinwiderstand, sonst wie Fig. 3

und weiterhin mit den Gln. (8):

$$R_{20} = \frac{R_{23}}{R_{13}} R_{10} = \frac{R_{13} R_{23} R_{24}}{A}$$

$$R_{40} = \frac{R_{24}}{R_{23}} \cdot R_{30} = \frac{R_{13} R_{24} R_{34}}{A} \tag{15}$$

Zur Ermittlung der Ergänzungswiderstände dienen die Gln. (7):

$$E_{12} = \frac{\frac{R_{10} R_{20}}{R_0} \cdot R_{12}'}{\frac{R_{10} R_{20}}{R_0} - R_{12}'} = \frac{R_{13} R_{24} R_{12}'}{R_{13} R_{24} - R_{34} R_{12}'}$$

$$E_{14} = \frac{\frac{R_{10} R_{40}}{R_0} \cdot R_{14}'}{\frac{R_{10} R_{40}}{R_0} - R_{14}'} = \frac{R_{13} R_{24} R_{14}'}{R_{13} R_{24} - R_{23} R_{14}'} \tag{16}$$

4. Umwandlung des ergänzten fünfstrahligen Sterns in ein Fünfeck

Für die Beziehungen zwischen den Grössen des ergänzten Fünfsterns und des Fünfeckes in Fig. 5 gelten die Formeln:

$$R_{12}' = \frac{R_{10} R_{20}}{R_0} \Big\| E_{12}$$

$$R_{23}' = \frac{R_{20} R_{30}}{R_0} \Big\| E_{23}$$

$$R_{34}' = \frac{R_{30} R_{40}}{R_0} \Big\| E_{34} \tag{17}$$

$$R_{45}' = \frac{R_{40} R_{50}}{R_0} \Big\| E_{45}$$

$$R_{51}' = \frac{R_{50} R_{10}}{R_0} \Big\| E_{51}$$

$$R_{13} = \frac{R_{10} R_{30}}{R_0}$$

$$R_{14} = \frac{R_{10} R_{40}}{R_0}$$

$$R_{24} = \frac{R_{20} R_{40}}{R_0} \tag{18}$$

$$R_{25} = \frac{R_{20} R_{50}}{R_0}$$

$$R_{35} = \frac{R_{30} R_{50}}{R_0}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{20}} + \frac{1}{R_{30}} + \frac{1}{R_{40}} + \frac{1}{R_{50}} \tag{19}$$

Die Gln. (18) liefern:

$$\frac{R_{10}}{R_{20}} = \frac{R_{14}}{R_{24}}$$

$$\frac{R_{10}}{R_{30}} = \frac{R_{10}}{R_{20}} \cdot \frac{R_{20}}{R_{30}} = \frac{R_{14}}{R_{24}} \cdot \frac{R_{25}}{R_{35}}$$

$$\frac{R_{10}}{R_{40}} = \frac{R_{10}}{R_{50}} \cdot \frac{R_{50}}{R_{40}} = \frac{R_{13}}{R_{35}} \cdot \frac{R_{25}}{R_{24}}$$

$$\frac{R_{10}}{R_{50}} = \frac{R_{13}}{R_{35}} \tag{20}$$

$$\frac{R_{30}}{R_{20}} = \frac{R_{35}}{R_{25}}$$

$$\frac{R_{30}}{R_{40}} = \frac{R_{13}}{R_{14}}$$

$$\frac{R_{30}}{R_{50}} = \frac{R_{30}}{R_{40}} \cdot \frac{R_{40}}{R_{50}} = \frac{R_{13}}{R_{14}} \cdot \frac{R_{24}}{R_{25}}$$

Setzt man die Werte der Gln. (20) in die geeignet umgewandelte Gl. (19) ein, so erhält man mit der Abkürzung A':

$$A' = R_{24} R_{35} + R_{14} R_{35} + R_{14} R_{25} + R_{13} R_{25} + R_{13} R_{24} \tag{21}$$

die Beziehungen:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{10}} \cdot \frac{A'}{R_{24} R_{35}}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{30}} \cdot \frac{A'}{R_{14} R_{25}} \tag{22}$$

und aus dem Produkt mit der ersten Gl. (18):

$$\frac{1}{R_0^2} = \frac{1}{R_{10} R_{30}} \cdot \frac{A'^2}{R_{14} R_{25} R_{24} R_{35}} =$$

$$= \frac{1}{R_0 R_{13}} \cdot \frac{A'^2}{R_{14} R_{25} R_{24} R_{35}} \tag{23}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{A'^2}{R_{13} R_{14} R_{25} R_{24} R_{35}}$$

Aus den Gln. (22) und (23) ergibt sich:

$$R_{10} = \frac{R_{13} R_{14} R_{25}}{A'} \qquad R_{30} = \frac{R_{13} R_{24} R_{35}}{A'} \tag{24}$$

und unter Hinzunahme der Gln. (20):

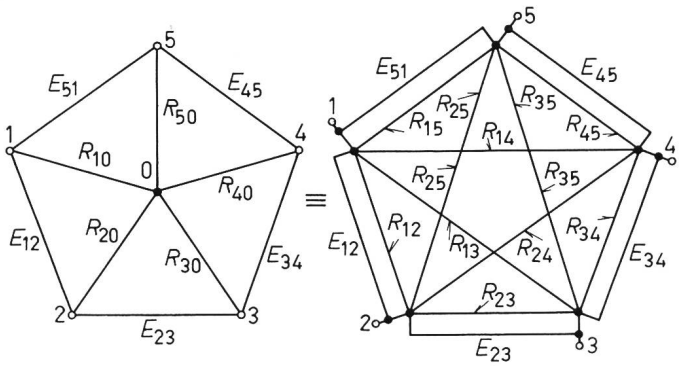

Fig. 5
Umwandlung des ergänzten fünfstrahligen Sterns in ein beliebiges Fünfeck
Wie Fig. 3, $m, n = 1...5$, E_{34}, E_{45}, E_{51} beliebige Scheinwiderstände

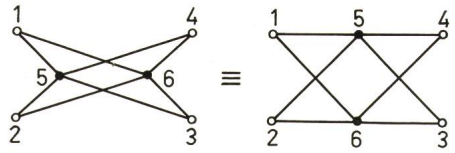

Fig. 6
Zwei parallelgeschaltete vierstrahlige Sterne und Umzeichnung in zwei Brücken in Kette

$$R_{20} = \frac{R_{13}\,R_{24}\,R_{25}}{A'}$$

$$R_{40} = \frac{R_{14}\,R_{24}\,R_{35}}{A'} \qquad (25)$$

$$R_{50} = \frac{R_{14}\,R_{25}\,R_{35}}{A'}$$

Die Ergänzungswiderstände berechnen sich aus den Gln. (17) zu:

$$E_{12} = \frac{\dfrac{R_{10}\,R_{20}}{R_0}\,R_{12}'}{\dfrac{R_{10}\,R_{20}}{R_0} - R_{12}'} = \frac{R_{13}\,R_{25}}{R_{13}\,R_{25} - R_{35}\,R_{12}'}$$

$$E_{23} = \frac{R_{13}\,R_{24}}{R_{13}\,R_{24} - R_{14}\,R_{23}'}$$

$$E_{34} = \frac{R_{24}\,R_{35}}{R_{24}\,R_{35} - R_{25}\,R_{34}'} \qquad (26)$$

$$E_{45} = \frac{R_{14}\,R_{35}}{R_{14}\,R_{35} - R_{13}\,R_{45}'}$$

$$E_{5i} = \frac{R_{14}\,R_{25}}{R_{14}\,R_{25} - R_{24}\,R_{51}'}$$

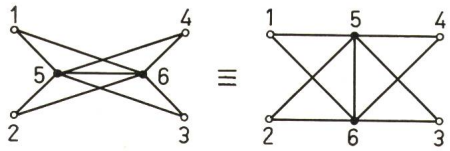

Fig. 7
Zwei verbundene fünfstrahlige Sterne und Umzeichnung in zwei Brücken in Kette mit Querverbindung

5. Anwendung der Stern-Vieleck-Umwandlungen

Es gibt sehr viele Anwendungen der Umwandlung dreistrahliger Stern in ein Dreieck und umgekehrt. Auch für den vierstrahligen Stern, selbst ohne Ergänzung, gibt es Beispiele. Fig. 6 zeigt die Parallelschaltung der vierstrahligen Sterne mit

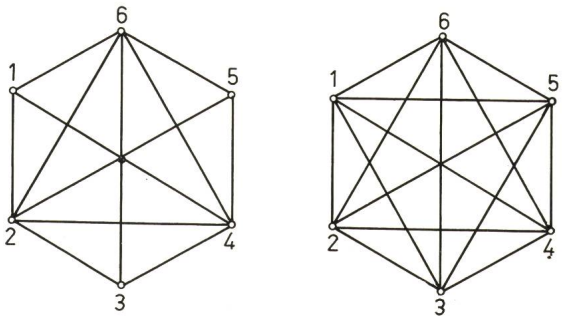

Fig. 8
Ergänzter sechsstrahliger Stern und beliebiges Sechseck

den Enden 1, 2, 3 und 4 und den Sternpunkten 5 und 6, die der Kettenschaltung zweier Brücken entspricht. Verbindet man die Sternpunkte 5 und 6, so entstehen zwei in fünf Punkten miteinander verbundene fünfstrahlige Sterne, die sich nach Fig. 7 als eine Kette von zwei Brücken mit einer Querverbindung darstellen lassen. Eine Erweiterung auf einen sechsstrahligen Stern zeigt Fig. 8. Eine Anwendung noch höherstrahliger Sterne dürfte zu kompliziert sein.

Literatur

[1] *W. Herzog:* Zur Umwandlung des n-Eckes in einen n-strahligen Stern. Bull. SEV 60(1969)8, S. 352...354.

[2] *W. Herzog:* Symmetrische Vierpole. NTZ 14(1961)10, S. 502...511.

[3] *K. Küpfmüller:* Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 8. Auflage, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1965, S. 26.

Adresse des Autors:
Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. *W. Herzog*, Direktor des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz, Joh.-Joachim-Becher-Weg 14, D–6500 Mainz.

Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

Grundlagen und Theorie
Techniques de base, théorie

Die Alterung von Isolierfolien durch Teilentladungen bei verschiedenartigen Spannungen

621.315.619:620.193.91

[Nach *W. Claussnitzer* und *G. Dronsek:* Die Alterung von Isolierfolie durch Teilentladungen bei verschiedenartigen Spannungen. PTB-Mitt. 79(1969)4, S. 252...256]

Nachdem Alterungsuntersuchungen an hochisolierenden Isolierfolien bei Teilentladungen im Luftspalt eines Plattenkondensators ergeben hatten, dass Raumladungen einer 50-Hz-Wechselspannung in die Folienoberfläche eindringen und die Durchgangsleitfähigkeit kurz vor dem Durchschlag sprunghaft erhöhen, stellte sich noch die Frage, ob der Raumladungsdurchschlag auch bei Gleichspannungen auftritt.

Anstelle von reiner Gleichspannung wurde für die Versuche pulsierende Gleichspannung gewählt, da sich gezeigt hatte, dass infolge von Ladungsansammlung auf der Folienoberfläche die Teilentladungen nach kurzer Zeit ausblieben. Alle Versuche wurden mit der gleichen Teilentladungsstromdichte ausgeführt, damit gleiches Glimmen im Luftspalt herrscht. Die Resultate für positive Gleichspannung sind in Fig. 1 dargestellt. Nach unterschiedlich langer Alterung mit Teilentladungen ergeben sich in Abhängigkeit von der Lagerungszeit verschiedene Abklingkurven des Durchgangsstromes. Bei Beanspruchung mit negativer pul-