Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 58 (1967)

Heft: 11

Artikel: Berechnung von Trägerfrequenz-Sperren für Hochspannungsleitungen bei vorgeschriebener Ohmscher Komponente der Sperrenimpedanz

Autor: Rodewald, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-916257

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

Berechnung von Trägerfrequenz-Sperren für Hochspannungsleitungen bei vorgeschriebener Ohmscher Komponente der Sperrenimpedanz

Von *A. Rodewald*, Basel

621.315.051.2 : 621.3.052.63

Die Impedanz einer Trägerfrequenz-Sperre für eine Hochspannungsleitung muss heute im allgemeinen eine bestimmte Ohmsche Komponente aufweisen. Es wird gezeigt, dass man die Schaltung der Sperre mit Rücksicht auf die Ohmsche Komponente sehr übersichtlich mit Hilfe einer einfachen Netzwerksynthese entwerfen kann. Es werden nur Sperren untersucht, die aus einer im Zuge der Hochspannungsleitung angebrachten Induktivität und einer parallel zur Induktivität angeordneten Abstimmschaltung bestehen. Ein allgemeines Netzwerktheorem führt zu der wichtigen Aussage, dass sich eine bestimmte Ohmsche Komponente innerhalb eines vorgeschriebenen Frequenzbandes nicht mit einer beliebig kleinen Induktivität erreichen lässt. Es existiert ein unterer Grenzwert für die Induktivität, der jedoch nur dann erreicht wird, wenn die Abstimmschaltung unendlich viele Schaltelemente enthält.

On caractérise actuellement un circuit-bouchon pour ondes porteuses sur les réseaux à haute tension par la résistivité de son impédance. On démontre que pour l'étude de la composante résistive, le circuit-bouchon peut être calculé d'une manière très simple à partir de la synthèse du circuit. L'article traite uniquement des circuits de blocage composés d'une self montée en série sur une ligne à haute tension, et comportant un bloc d'accord disposé en parallèle. La théorie générale des réseaux énonce le fait important, que dans une bande de fréquence déterminée, une composante résistive donnée ne peut être obtenue que pour une valeur minima de l'inductance. Il existe une limite inférieure de cette inductance, qui ne peut toutefois être atteinte que si le bloc d'accord comporte un nombre infini d'éléments de circuit.

1. Einführung

Die Hochspannungsleitungen der Elektrizitätsversorgungsunternehmen werden vielfach — ausser für den Transport der elektrischen Energie von den Kraftwerken zu den Verbraucherzentren — dazu benutzt, Nachrichten zu übertragen. Es handelt sich meist um Nachrichten, die für den Betrieb des Hochspannungsnetzes von Bedeutung sind, wie z. B. Fernmeßsignale für die Lastverteiler, Fernsteuerbefehle für Schalter, Telephongespräche, Fernschreiben usw.

Fig. 1 zeigt schematisch eine Nachrichtenübertragung über eine Hochspannungsleitung: Der Nachrichtensender moduliert einen Hochfrequenzsender, der über einen Kopplungskondensator an die Hochspannungsleitung angeschlossen ist. Das modulierte Hochfrequenzsignal pflanzt sich längs der Hochspannungsleitung bis zum HF-Empfänger fort und wird dort demoduliert. Das demodulierte Signal wird dem Nachrichtenempfänger zugeführt.

Die in den Hochspannungsleitungen angebrachten Sperren 1 und 2 sind frequenzabhängige Schaltelemente, die den niederfrequenten Wechselstrom der Energieübertragung praktisch ungehindert durchlassen, jedoch den hochfrequenten Strömen der Nachrichtenübermittlung einen grossen Widerstand bieten. Hochfrequenzsperren haben zwei Aufgaben:

a) Sie sollen verhindern, dass wesentliche Anteile der vom HF-Sender erzeugten HF-Energie in die Netze I und II gelangen.

b) Sie machen die Nachrichtenübertragung über die Hochspannungsleitung unabhängig vom starkstromtechnischen Schaltzustand der Netze I und II. So kann man z. B. die Leitung beidseitig unmittelbar hinter den Sperren erden, ohne dadurch die Nachrichtenübermittlung wesentlich zu beeinflussen.

Im normalen Betriebsfall fliessen in einer Hochspannungsleitung und damit auch in den Hochfrequenzsperren niederfrequente Wechselströme von $10^2 ... 10^3$ A, während im Störungsfall für einige Sekunden Kurzschlußströme von $10^4 ... 10^5$ A auftreten können. Diese für ein HF-Gerät ungewöhnlich hohen Ströme haben einen wesentlichen Einfluss auf die Konstruktion der Sperre und die Struktur der Sperrenschaltung.

Die folgende Untersuchung hat den Entwurf von HF-Sperren mit Hilfe der Netzwerksynthese zum Gegenstand. Der synthetische Entwurf geht von der mathematischen Funktion der gewünschten Frequenzcharakteristik aus und ergibt im allgemeinen nicht nur eine, sondern mehrere Schaltungen. Davon sind jedoch nur diejenigen als HF-Sperre für eine Hochspannungsleitung brauchbar, die für den Durchlass des niederfrequenten Wechselstromes gewisse Bedingungen erfüllen. Für die Strombahn des niederfrequenten Wechselstromes durch die Sperre kommen praktisch nur Induktivitäten in Frage, denn der Wechselstromwiderstand einer Induktivität

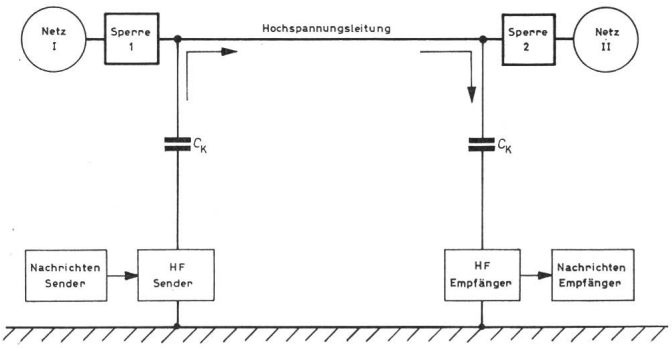


Fig. 1
Schematische Darstellung einer Trägerfrequenzverbindung über eine Hochspannungsleitung
C_K Kopplungskondensator

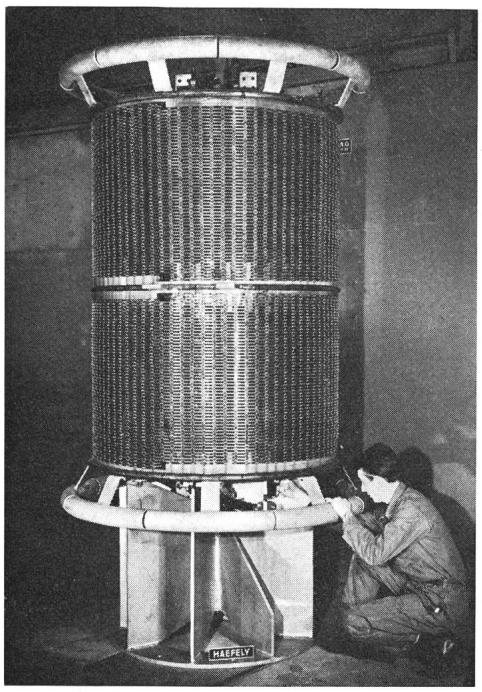


Fig. 2
Trägerfrequenz-Sperre für eine 500-kV-Leitung
Induktivität der Hauptspule 440 µH, dynamischer Kurzschlussstrom 107 kA, Dauerstrom 2000 A

entspricht der gestellten Forderung nach einem geringen Widerstand bei tiefen Frequenzen und einem grossen Widerstand bei hohen Frequenzen. Dagegen erreichen Längskondensatoren einer Hochspannungsleitung mit Rücksicht auf die möglichst ungehinderte Übertragung der niederfrequenten Ströme sehr grosse Kapazitätswerte, so dass sie als Schaltelemente für Hochfrequenzsperrkreise ungeeignet sind. Auch Ohmsche Widerstände sind als Strombahn für die niederfrequenten Ströme durch die Sperre wegen der damit verbundenen Verlustwärme unbrauchbar.

Bei der Wahl der Schaltung im Hinblick auf die Herstellungskosten ist zu beachten, dass nicht alle Schaltelemente gleich teuer sind. Die Spulen, die von den erwähnten hohen niederfrequenten Strömen durchflossen werden, müssen entsprechend stark dimensioniert sein und sind deshalb besonders teuer. Fig. 2 vermittelt einen Eindruck von der Grösse einer solchen Spule. Die Herstellungskosten einer Sperre werden im wesentlichen durch die Grösse dieser Induktivitäten bestimmt. Aus diesem Grunde muss man bestrebt sein, die Schaltung so zu entwerfen, dass die hohen Ströme durch möglichst kleine Induktivitäten fliessen können.

2. Formulierung der Aufgabe

Im folgenden werden Schaltungen untersucht, bei denen jeweils die Strombahn für den niederfrequenten Wechselstrom durch nur *eine* Induktivität gebildet wird. Der die HF-Sperre repräsentierende Zweipol hat somit die in Fig. 3 dargestellte Struktur. Der Gesamtzweipol mit den Klemmen 1 und 2 besteht aus einer Parallelschaltung der Induktivität L mit dem Zweipol Z'. Der Zweipol Z' enthält nur passive Schaltelemente, d.h. Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände.

Im Pflichtenheft einer HF-Sperre sind neben den Betriebs- und Kurzschlußströmen der Hochspannungsleitung im allgemeinen folgende Daten vorgeschrieben:

a) Das Frequenzband, in dem der HF-Sender betrieben wird;

b) Der Minimalwert des Realteils der Sperrenimpedanz (Ohmsche Komponente) innerhalb des angegebenen Frequenzbandes.

Es ist sinnvoll, nicht den Betrag der Impedanz, sondern den Minimalwert der Ohmschen Komponente vorzuschreiben, da die Blindkomponente der Sperrenimpedanz mit einer entsprechenden Blindkomponente der Impedanz des Netzes I bzw. II (Fig. 1) einen Serienschwingkreis bilden kann. Die Blindkomponente der Sperrenimpedanz liefert in diesem Fall keinen Beitrag zur Sperrung der Trägerfrequenz, und das einwandfreie Funktionieren der Nachrichtenübertragung ist nur durch die Ohmsche Komponente gesichert.

Beim Entwurf einer Schaltung nach Fig. 3 mit Hilfe der Netzwerksynthese geht man zweckmässigerweise wie folgt vor:

a) Anstelle einer Ohmschen Komponente $\mathrm{Re}(\omega) \geqq R$ im Bereich $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$ wird zunächst die Ohmsche Komponente vom Betrag 1 im normierten Frequenzbereich $-1 \leqq \Omega \leqq +1$ approximiert. Man wählt zu diesem Zweck eine mathematische Funktion $H(\Omega)$, die $\geqq 1$ im Bereich $-1 \leqq \Omega \leqq +1$ ist. Mit Rücksicht auf die Realisierbarkeit als Realteil einer Impedanzfunktion muss die Struktur der Funktion $H(\Omega)$ den in der Netzwerktheorie vorgeschriebenen Bedingungen entsprechen.

b) Aus der Funktion $H(\Omega)$ lässt sich mit der von *Gewertz* [1][1]) angegebenen Methode die zugehörige vollständige Scheinwiderstandsfunktion $Z(\Omega)$ bestimmen.

c) Die normierte Scheinwiderstandsfunktion $Z(\Omega)$ wird in eine Schaltung entwickelt. Die Entwicklung hat so zu erfolgen, dass sich direkt zwischen den beiden Klemmen des Zweipols eine Kapazität C_H befindet (Fig. 4a). Die Struktur der restlichen Schaltung ist beliebig.

d) Aus der normierten Schaltung nach Fig. 4a ergibt sich nach einer Widerstandsentnormierung, einer Frequenzentnormierung und schliesslich einer Bandtransformation die gewünschte Schaltung der HF-Sperre (Fig. 4c) mit der Induktivität L zwischen den beiden Klemmen des Zweipols.

Man erkennt aus der in Fig. 4 dargestellten Entwicklung, dass die im Hinblick auf eine wirtschaftliche Dimensionierung der Sperre besonders interessierende Induktivität L erst im letzten Rechenschritt, nämlich bei der Bandtransformation «entsteht». Die Grösse der Induktivität L ist umgekehrt proportional zur Grösse der Kapazität C_H. Das bedeutet, dass man das Optimierungsproblem im Hinblick auf eine möglichst kleine Induktivität L schon in der normierten Schaltung lösen kann, indem man die Bedingungen für eine möglichst grosse Kapazität C_H aufsucht.

3. Die ideale Sperre und der Ausnutzungsgrad der wirklichen Sperre

Wie aus dem vorangegangenen Abschnitt hervorgeht, besteht das Hauptproblem beim Entwurf der Schaltung mit Hilfe der Netzwerksynthese in der Wahl einer zweckmässigen mathematischen Funktion $H(\Omega)$ mit der die rechteckförmige Charakteristik des Sollwertes der Ohmschen Komponente auf die in Fig. 4a dargestellte Art approximiert wird. Da im Pflichtenheft der Hochfrequenzsperre im allgemeinen nur vorgeschrieben wird, welchen Wert die Ohmsche Komponente nicht

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

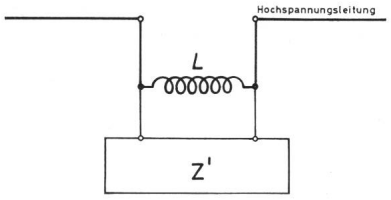
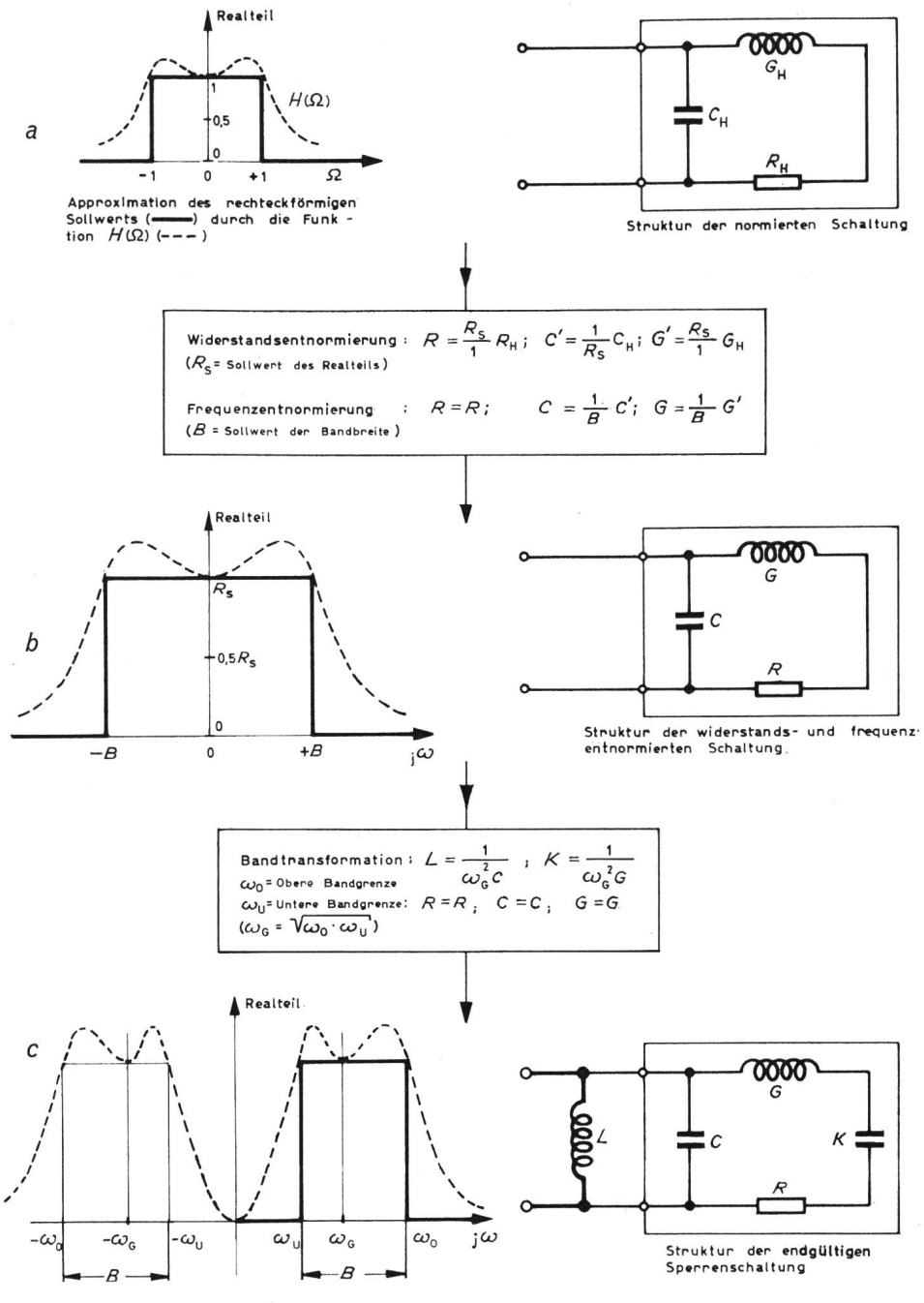


Fig. 3
Prinzipielle Struktur einer Trägerfrequenz-Sperre
mit der Induktivität L im Netzstromkreis und dem Zweipol Z' zur Abstimmung auf das gewünschte Frequenzband

Fig. 4
Schematische Darstellung des schrittweisen Überganges von der normierten Schaltung (*a*) über (*b*) zur endgültigen Sperre (*c*)



unterschreiten darf, ohne dass gleichzeitig eine obere Grenze festgelegt ist, kommt es im Hinblick auf die technische Funktion der Sperre nicht darauf an, dass die rechteckförmige Soll-Charakteristik besonders gut approximiert wird. Mit Rücksicht auf die Herstellungskosten der Sperrenschaltung sollte man jedoch nicht unnötig weit über den Sollwert hinausgehen.

Wollte man als elektrischen Idealfall — ohne Rücksicht auf die wirtschaftlich optimale Lösung — die in Fig. 4a dargestellte rechteckförmige Charakteristik des Sollwertes ohne die geringste Abweichung realisieren, so brauchte man unendlich viele Schaltelemente. Die Untersuchung dieses praktisch nicht realisierbaren Idealfalles hat insofern einen Sinn als sie die Grenzen erkennen lässt, die man theoretisch überhaupt erreichen kann. Es ist zweckmässig, sich beim Schaltungsentwurf vor Augen zu führen, wie weit man jeweils von dem erwähnten elektrischen Idealzustand entfernt ist.

Eine quantitative Aussage über die Abweichung vom Idealfall ergibt sich, wenn man die entsprechenden Widerstands-Frequenz-Flächen(WF-Flächen) miteinander vergleicht. Unter der WF-Fläche einer Funktion $H(\Omega)$ versteht man das Integral:

$$F_H = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\Omega)\,\mathrm{d}\,\Omega \qquad (1)$$

Das ist in der graphischen Darstellung die zwischen der mit einem linearen Maßstab versehenen Ω-Achse und der Kurve $H(\Omega)$ aufgespannte Fläche.

In Fig. 5 ist der elektrische Idealfall

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} 0 \text{ für } -\infty \leqq \Omega \leqq -1 \\ 1 \text{ für } -1 \leqq \Omega \leqq +1 \\ 0 \text{ für } +1 \leqq \Omega \leqq +\infty \end{cases} \qquad (2)$$

zusammen mit einer realisierbaren Zweipolfunktion

$$H(\Omega) \geqq \begin{cases} 0 \text{ für } -\infty < \Omega < -1 \\ 1 \text{ für } -1 \leqq \Omega \leqq +1 \\ 0 \text{ für } +1 < \Omega < +\infty \end{cases} \qquad (3)$$

dargestellt. Man erkennt, dass dem elektrischen Idealfall eine WF-Fläche von

$$F_i = 2 \cdot \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] \cdot 1 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right] = 2 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}\right]$$

entspricht. Da nach den Gl. (2) und (3) für alle Werte von Ω

$$H(\Omega) \geqq H_i(\Omega)$$

ist, kann man schliessen, dass die der Funktion $H(\Omega)$ entsprechende WF-Fläche F_H grösser ist als F_i:

$$F_H = \int_{+\infty}^{-\infty} H(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega \geqq F_i$$

Von allen Funktionen, die den Wert Eins im Bereich $-1 \leqq \Omega \leqq +1$ nicht unterschreiten, hat die Funktion $H_i(\Omega)$ die kleinste WF-Fläche. F_i ist also die normierte Soll-WF-Fläche. Es liegt deshalb nahe, die WF-Fläche einer beliebigen Funktion $H(\Omega)$ auf die Sollfläche F_i zu beziehen und das Verhältnis

$$\eta_H = \frac{F_i}{F_H} \qquad (5)$$

als den Ausnutzungsgrad der Funktion $H(\Omega)$ zu bezeichnen.

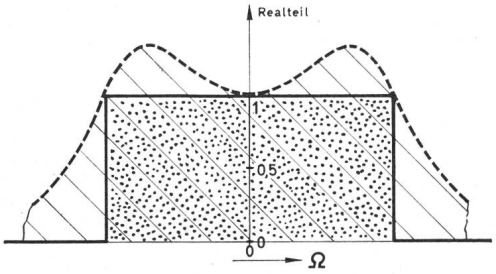


Fig. 5

Zum Vergleich der idealen Sperr-Charakteristik (———) mit dem Realteil einer mit endlichem Aufwand realisierbaren Zweipolfunktion (– – – –)

normierte WF-Fläche des realisierbaren Zweipols

normierte WF-Fläche der idealen Sperre

Der Begriff der Widerstands-Frequenz-Fläche ist für die folgenden Betrachtungen insofern sehr nützlich, als er die beiden im Pflichtenheft einer Sperre geforderten Grössen, nämlich die Bandbreite und die Ohmsche Komponente, zu einer einzigen Kennziffer zusammenfasst. Es wird sich zeigen, dass zu jeder Schaltung eine ganz bestimmte WF-Fläche gehört.

Die Verbindung zwischen der von einer Funktion $H(\Omega)$ erzeugten WF-Fläche und den Elementen der zugehörigen Schaltung wird durch den sog. Widerstands-Flächen-Satz [2] hergestellt. Dieser Satz besagt folgendes:

Besteht ein Zweipol aus einer Parallelschaltung einer Kapazität C_H mit einem beliebigen komplexen Widerstand, so gilt zwischen der Ohmschen Komponente $H(\Omega)$ des resultierenden komplexen Widerstandes und der Kapazität C_H die Beziehung:

$$F_H = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\Omega)\,\mathrm{d}\,\Omega = \frac{\pi}{C_H} \tag{6}$$

Gl. (6) ergibt die zwischen den Klemmen des idealen Zweipols wirksame Kapazität C_i, wenn man F gleich F_i setzt:

$$C_i = \frac{\pi}{F_i} = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Dies ist die grösste Kapazität, die man beim Entwurf einer Schaltung zwischen den Klemmen des normierten Zweipols überhaupt erhalten kann. Analog ergibt sich eine der Fläche F_H entsprechende Kapazität C_H. Man kann den Ausnutzungsgrad der Funktion R_H auf verschiedene Weise schreiben:

$$\eta_H = \frac{F_i}{F_H} = \frac{2}{\int_{-\infty}^{+\infty} H(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega} \tag{5a}$$

$$\eta_H = \frac{C_H}{C_i} = \frac{2}{\pi} C_H \tag{5b}$$

Wie Gl. (5a) zeigt, kann man den Ausnutzungsgrad direkt aus der Funktion $H(\Omega)$ durch eine Integration bestimmen. Falls die Integration aus irgendwelchen Gründen auf Schwierigkeiten stossen sollte, kann man nach der Methode von *Gewertz* die zu $H(\Omega)$ gehörige Zweipolfunktion ermitteln und aus der entsprechenden Schaltungsentwicklung die Kapazität C_H bestimmen. Gl. (5b) liefert dann den Ausnutzungsgrad.

4. Der Ausnutzungsgrad und die Induktivität

Die Induktivität L, die im Mittelpunkt des wirtschaftlichen Optimierungsproblems steht, ergibt sich — wie bereits dargelegt — aus der normierten Kapazität C_H durch Widerstands- und Frequenz-Entnormierung sowie eine Bandtransformation:

$$L = \frac{R}{2\pi C_H} \cdot \frac{f_o - f_u}{f_o f_u} \tag{8}$$

Es bedeuten:

f_u die untere Grenze des Frequenzbandes;

f_o die obere Grenze des Frequenzbandes;

R die zugelassene unter Grenze der Ohmschen Komponente innerhalb des zu sperrenden Frequenzbandes.

Führt man noch mit Hilfe von Gl. (5b) den Ausnutzungsgrad η_H in Gl. (8) ein, so folgt:

$$L = \frac{R}{\pi^2 \eta_H} \cdot \frac{f_o - f_u}{f_o f_u} \tag{8a}$$

Gl. (8a) lässt deutlich erkennen, dass eine bestimmte Ohmsche Komponente innerhalb eines vorgeschriebenen Frequenzbandes nicht mit einer beliebig kleinen Induktivität zu erreichen ist, da η_H höchstens den Wert 1 annehmen kann. Kennt man anderseits für verschiedene Schaltungen die entsprechenden Ausnutzungsgrade, so kann man — wenn die Induktivität L vorgegeben ist — die Art der Schaltung und damit den Schaltungsaufwand für eine gewünschte Ohmsche Komponente bestimmen.

In Fig. 6 ist Gl. (8a) mit der Induktivität L und dem Ausdruck $R \cdot \frac{f_o - f_u}{\pi^2 f_o f_u}$ als Veränderlicher und η_H als Parameter graphisch dargestellt. Jeder Schaltung ist in diesem Diagramm eine Gerade mit der Steigerung $1/\eta_H$ zugeordnet. Die Gerade

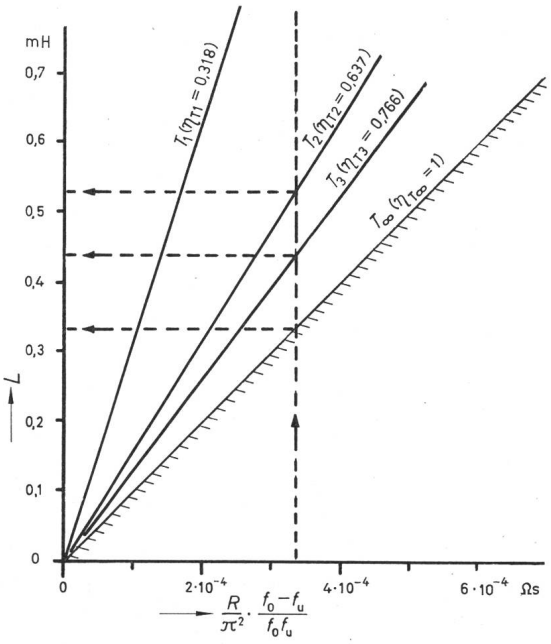


Fig. 6

Die Induktivität L in Funktion der minimalen Ohmschen Komponente R und der Bandgrenzen f_o und f_u

(Parameter: Tschebyscheff-Funktionen verschiedenen Grades als Realteil)

Beispiel: $f_o = 75$ kHz; $f_u = 50$ kHz; $R = 500\ \Omega$

$$\frac{R}{\pi^2} \cdot \frac{f_o - f_u}{f_o f_u} = 3{,}38 \cdot 10^{-4}$$

Aus dem Diagramm ergeben sich folgende Induktivitäten:

$L_{T1} = 1{,}06$ mH; $L_{T2} = 0{,}53$ mH; $L_{T3} = 0{,}441$ mH; $L_{T\infty} = 0{,}338$ mH

mit der Steigung 1 entspricht der idealen Sperre, die nur mit unendlich vielen Schaltelementen zu realisieren ist. Da die Ausnutzungsgrade η_H von Schaltungen mit endlich vielen Schaltelementen immer kleiner als Eins sind, ist der Existenzbereich aller möglichen Sperren-Schaltungen in Fig. 6 durch die Ordinaten-Achse und die Gerade mit der Steigung 1 begrenzt. Die in dieses Gebiet eingezeichneten Geraden für verschiedene Werte von η entsprechen den Schaltungen, die im folgenden berechnet werden.

5. Die Methode von Gewertz

Zum besseren Verständnis des Rechnungsganges soll zunächst die Methode von *Gewertz* kurz beschrieben werden. Wie bereits erwähnt, gestattet es diese Methode, aus dem vorgegebenen algebraischen Ausdruck des Realteils einer Impedanzfunktion die vollständige Impedanzfunktion zu bestimmen.

In der Netzwerktheorie wird gezeigt (siehe z.B. [1], dass sich die Impedanzfunktion eines Zweipols immer in die Form

$$Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m} = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, p^\nu}{\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu \, p^\nu} = \frac{A(p)}{B(p)} \tag{9}$$

bringen lässt. Die Koeffizienten a_ν und b_ν sind grösser oder höchstens gleich Null. Für den Grad der Nenner- und Zählerpolynome gelten die Relationen:

$$m = n - 1$$

oder

$$m = n$$

oder

$$m = n + 1$$

$p = \sigma + j\Omega$ ist eine komplexe Variable. Im Imaginärteil $j\Omega = j2\pi f$ der Variablen ist die technische Frequenz f enthalten.

Gewertz hat *für rein imaginäre p*, d.h. $p = j\Omega$ die in Form der Gl. (9) vorliegende Impedanzfunktion derart in Real- und Imaginärteil zerlegt, dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil aus Teilsummen des Zählerpolynoms $A(p)$ und des Nennerpolynoms $B(p)$ bestehen. Die Zerlegung geht im einzelnen so vor sich: Im Zähler und im Nenner der Gl. (9) werden aus den Gliedern mit geraden Potenzen von p und aus den Gliedern mit ungeraden Potenzen von p je zwei Teilsummen gebildet:

$$A(p) = GA + UA$$

mit

$$GA = a_0 + a_2 p^2 + a^4 p^4 + \ldots$$

und

$$UA = a_1 p + a_3 p^3 + \ldots$$

$$B(p) = GB + UB$$

mit

$$GB = b_0 + b_2 p^2 + b^4 p^4 + \ldots$$

und

$$UB = b_1 p + b_3 p^3 + \ldots$$

Es ist also:

$$Z(p) = \frac{GA + UA}{GB + UB} \tag{10}$$

GA, UA, GB und UB sind Polynome in der rein imaginären Variablen $p = j\Omega$. Nun hat jedes beliebige Polynom $F(p)$ mit reellen Koeffizienten und rein imaginärem p folgende Eigenschaften:

a) Der Realteil von $F(p)$ besteht aus der Summe der geradzahligen Potenzen von p

$$GF(p) = \mathrm{Re}\, F(p) \tag{11}$$

b) Der Imaginärteil von $F(p)$ besteht aus der Summe der ungeradzahligen Potenzen von p

$$UF(p) = j\mathrm{Im}\, F(p) \tag{12}$$

c) Ist $\underline{F}(\underline{p})^*$ die zu $F(p)$ konjugiert komplexe Funktion, so gilt

$$GF(p) = \underline{GF}(\underline{p})^*, \tag{13}$$

$$UF(p) = -\,\underline{UF}(\underline{p})^*, \tag{14}$$

und

$$F(p) \cdot \underline{F}(\underline{p})^* = |F(p)|^2 \tag{15}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun Gl. (9) auf die gewünschte Form gebracht werden. Zähler und Nenner werden zu diesem Zweck mit der zu $B(p)$ konjugiert komplexen Funktion $\underline{B}(\underline{p})^*$ multipliziert.

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)\,\underline{B}(\underline{p})^*}{B(p)\,\underline{B}(\underline{p})^*} = \frac{(GA + UA)\cdot(G\underline{B}^* + U\underline{B}^*)}{B(p)\cdot \underline{B}(\underline{p})^*} \tag{16}$$

Mit Gl. (13), (14) und (15) folgt:

$$Z(p) = \frac{(GA + UA)\cdot(GB - UB)}{|B(p)|^2}$$

$$Z(p) = \frac{GA\cdot GB - UA\cdot UB}{|B(p)|^2} + \frac{UA\cdot GB - GA\cdot UB}{|B(p)|^2} \tag{17}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (17) ist offenbar der Realteil und der zweite Term der Imaginärteil der Impedanz $Z(p)$.

Wichtig für die Lösung der eingangs gestellten Aufgabe ist nun die Umkehrung des Problems:

Wie kann $Z(p)$ gefunden werden, wenn $\mathrm{Re}\,[Z(j\Omega)]$ gegeben ist? Diese Frage lässt sich mit Hilfe von Gl. (17) wie folgt beantworten:

Der Nenner des Realteils von Gl. (17) ist aus dem Nennerpolynom $B(p)$ der Impedanzfunktion durch eine Multiplikation mit der konjugiert komplexen Funktion $\underline{B}(\underline{p})^*$ entstanden. Für rein imaginäre Werte von p kann man den Nenner von Gl. (17) umformen:

$$[B(p)\,\underline{B}(\underline{p})^*]_{p=j\Omega} = [B(p)\cdot B(-p)]_{p=j\Omega} = [B(-p^2)]_{p=j\Omega} \tag{18}$$

$B(p)$ hat als Nenner einer Impedanzfunktion nur Nullstellen mit negativem Realteil. Die Nullstellen liegen immer paarweise symmetrisch zur reellen σ-Achse. Demnach hat $B(-p)$ nur Nullstellen mit positivem Realteil. Die Nullstellen des Produktes $B(p)\cdot B(-p)$ liegen also spiegelbildlich zum Ursprung, d.h. spiegelbildlich zur imaginären $j\Omega$-Achse und zur reellen σ-Achse.

Nun sei der Realteil in der Form

$$\mathrm{Re}\,[Z(\Omega)] = \frac{C(\Omega^2)}{D(\Omega^2)} = \left[\frac{C(-p^2)}{D(-p^2)}\right]_{p=j\Omega} \tag{19}$$

gegeben. Die Nullstellen des Polynoms $D(-p^2)$ müssen spiegelbildlich zum Ursprung liegen, anderenfalls ist die Funktion in Gl. (19) als Realteil einer Impedanzfunktion ungeeignet. Vergleicht man Gl. (19) mit dem ersten Term von Gl. (17), so ergibt sich:

$$GA\cdot GB - UA\cdot UB = [C(-p^2)]_{p=j\Omega} \tag{20}$$

$$B(p)^2 = B(p)\cdot B(-p) = [D(-p^2)]_{p=j\Omega} \tag{21}$$

Der erste Schritt zur Ermittlung der Impedanzfunktion aus dem Realteil besteht darin, den Nenner $B(p)$ der Impedanzfunktion aus dem Polynom $D(-p^2)$ zu berechnen. Dies ist auf zweierlei Weise möglich:

a) Man bestimmt sämtliche Nullstellen von $D(-p^2)$. Sind p_ν, ($\nu = 1,2..., n$) die Nullstellen mit negativem Realteil und p^*_ν ($\nu = 1, 2, 3..., n$) die Nullstellen mit positivem Realteil, so gilt:

$$B(p) = \prod_{\nu=1}^{n} (p - p_\nu) \tag{22}$$

und

$$B(-p) = \prod_{\nu=1}^{n} (p - p^*)$$

b) Man macht einen Koeffizientenvergleich in der Gleichung

$$D(-p^2) = B(p) \cdot B(-p) = \tag{23}$$

$$= (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ...) \cdot (b_0 - b_1 p + b_2 p^2 - b_3 p^3 + ...)$$

Unter den verschiedenen Lösungen des sich beim Koeffizientenvergleich aus Gl. (23) entwickelnden Gleichungssystems sind nur die Lösungen auszuwählen, die positive Koeffizienten b_ν ergeben, entsprechend der für die Schaltungsrealisierung notwendigen Bedingung, dass $B(p)$ ein Hurwitzpolynom mit positiven Koeffizienten sein muss.

Ist $B(p)$ bekannt, so kann man den noch fehlenden Nenner $A(p)$ der Impedanzfunktion leicht berechnen, indem man $B(p)$ in Gl. (20) einsetzt. Die unbekannten Koeffizienten a_ν ergeben sich dann durch Koeffizientenvergleich.

6. Der Realteil in Form einer Potenzfunktion

Die Funktionen

$$R_{Pn}(p) = \left[\frac{2}{1 + (-1)^n \cdot p^{2n}}\right]_{p=j\Omega}; n = 1, 2, 3 ... \tag{24}$$

haben offenbar die in Abschnitt 2 geforderte Eigenschaft, längs der imaginären $j\Omega$-Achse für $-1 \leqq \Omega \leqq +1$ nirgends den Wert 1 zu unterschreiten.

Fig. 7 zeigt den Verlauf der Funktionen R_{P1}, R_{P2} und R_{P3} längs der $j\Omega$-Achse. Am Beispiel der Potenzfunktion zweiten Grades ($n = 2$) wird die Entwicklung der Impedanzfunktion aus dem gegebenen Realteil durchgeführt:

$$R_{P2}(p) = \frac{2}{1 + p^4} = \frac{C(-p^2)}{D(-p^2)} \tag{25}$$

Der Nenner $B(p)$ der gesuchten Impedanzfunktion ergibt sich aus dem Nenner der Gl. (25) durch Koeffizientenvergleich:

$$D(-p^2) = B(p) \cdot B(-p)$$

$$1 + p^4 = (b_0 + b_1 p + b_2 p^2) \cdot (b_0 - b_1 p + b_2 p^2)$$

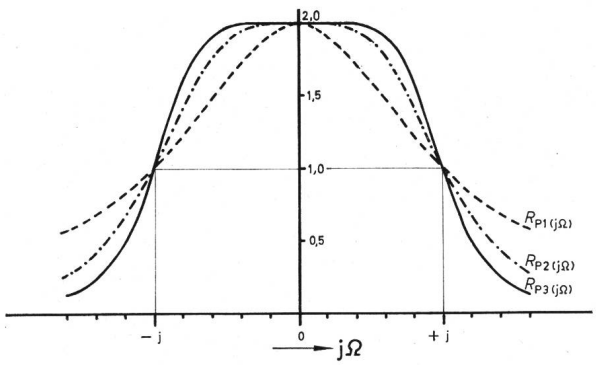


Fig. 7
Approximation des Widerstandswertes 1 über der normierten Bandbreite 1 mit Potenzfunktionen 1., 2. und 3. Grades

Der Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & b_0 = 1 \\ b_0 b_2 - b_1^2 + b_0 \quad & b_2 = 0 \\ & b_2 = 1 \end{aligned}$$

Beachtet man die erwähnte Zusatzbedingung, dass von den möglichen Lösungen des Gleichungssystems nur die mit durchweg positivem b_ν gesucht ist, dann folgt:

$$b_1 = \sqrt{2}$$

Somit ist:

$$B(p) = 1 + \sqrt{2} + p^2$$

Nun fehlt noch der Zähler $A(p)$ der Impedanzfunktion. Er wird ebenfalls durch Koeffizientenvergleich, und zwar mit Hilfe von Gl. (20) bestimmt:

$$GA \cdot GB - UA \cdot UB = C(-p^2) \tag{20}$$

$$(a_0 + a_2 p^2) \cdot (b_0 + b_2 p^2) - (a_1 p + a_3 p^3) \cdot (b_1 p + b_3 p^3) = 1$$

Die Lösung des durch den Koeffizientenvergleich entstehenden Gleichungssystems lautet:

$$a_0 = 2; a_1 = \sqrt{2}; a_2 = 0; a_3 = 0$$

Damit ist die gesuchte Impedanzfunktion berechnet. Sie lautet:

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{2 + p\sqrt{2}}{1 + p\sqrt{2} + p^2} \tag{26}$$

Die Kettenbruchentwicklung von Gl. (26) führt auf die entsprechende Schaltung:

$$Z(p) = \frac{1}{\dfrac{p\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{p\sqrt{2} + 2}} \tag{26a}$$

Aus dem Kettenbruch in Gl. (26a) liest man unmittelbar die in der zweiten Spalte von Tabelle I dargestellte Schaltung ab.

Der Ausnutzungsgrad der Schaltung ergibt sich mit Hilfe des Widerstands-Flächen-Satzes (6) aus der direkt zwischen den Zweipolklemmen vorhandenen Kapazität. Aus Gl. (5) folgt:

$$\eta_{P2} = \frac{2}{\pi} \cdot C_{P2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}45$$

In Tabelle I sind die Potenzfunktionen 1., 2. und 3. Grades die Impedanzfunktionen, die zugehörigen kanonischen Schaltungen und die Ausnutzungsgrade zusammengestellt.

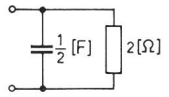
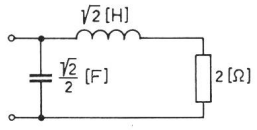
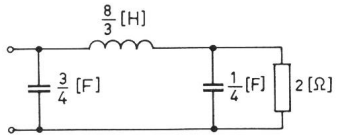
7. Tschebyscheff-Funktion als Realteil

Die im Abschnitt 6. beschriebenen Potenzfunktionen haben offensichtlich den Nachteil, dass die Ohmsche Komponente in der Bandmitte — beim normierten Tiefpass bei der Frequenz Null — den Sollwert um das Zweifache übersteigt. Dadurch wird jeweils nur ein geringer Bruchteil der von der Potenzfunktion erzeugten WF-Fläche ausgenützt und der Ausnutzungsgrad ist entsprechend gering.

Mit Hilfe von Tschebyscheff-Funktionen lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, bei gleichem Schaltungsaufwand

Impedanzfunktionen, Schaltungen und Ausnutzungsgrade für die Potenzfunktionen 1., 2. und 3. Grades

Tabelle I

Realteil	$R_{P1} = \dfrac{2}{1-p^2}$	$R_{P2} = \dfrac{2}{1+p^4}$	$R_{P3} = \dfrac{2}{1-p^6}$
Impedanzfunktion	$Z_{P1}(p) = \dfrac{2}{1+p}$	$Z_{P2}(p) = \dfrac{2+\sqrt{2}p}{1+\sqrt{2}p+p^2}$	$Z_{P3}(p) = \dfrac{2+\frac{8}{3}p+\frac{4}{3}p^2}{1+2p+2p^2+p^3}$
Schaltung			
Ausnutzungsgrad η	0,318	0,45	0,478

bessere Ausnutzungsgrade erzielen. Der Betrag der Tschebyscheff-Funktionen

$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ist bekanntlich im Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$ nirgends grösser als 1. Für die Ohmsche Komponente der Impedanzfunktion wird nun die Funktion

$$R_{Tn}(\Omega) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon[T_n(\Omega)]^2}$$

gewählt. $R_{Tn}(\Omega)$ unterschreitet an keiner Stelle im Bereich $-1 \leqq \Omega \leqq +1$ den Wert 1. Mit Hilfe des Parameters ε kann man vorschreiben, wie weit die Funktion den Wert 1 höchstens überschreiten soll.

Entwickelt man aus den Realteilen die zugehörigen Impedanzfunktionen und daraus wiederum die Schaltungen, so ist der Parameter ε natürlich auch in den Formeln enthalten, die sich für die verschiedenen Schaltelemente ergeben. Es zeigt sich nun, dass bei einer Variation des Parameters ε für jede Eingangskapazität des normierten Zweipols — der sich mit Hilfe einer bestimmten Tschebyscheff-Funktion ergibt — ein Maximum existiert. Da die Eingangskapazität des normierten Zweipols nach Gl. (5b) unmittelbar mit dem Ausnutzungsgrad der Schaltung zusammenhängt, kommt der Existenz dieser Maxima besondere Bedeutung zu.

Mit der Tschebyscheff-Funktion 2. Grades ergibt sich zum Beispiel folgender Rechnungsgang:

$$R_{T2}(\Omega) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon(2\Omega^2-1)^2}$$

$$R_{T2}(p) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon(2p^2+1)^2} \qquad (p = j\Omega) \qquad (28)$$

$$R_{T2}(p) = \frac{1}{4\varepsilon}\cdot\frac{1+\varepsilon}{p^4+p^2+\frac{1}{4}} \qquad (28a)$$

Die Pole von Gl. (28a) liegen bei:

$$p_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 \pm j\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

Von diesen vier Polen liegen:

$$p_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + j\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}}$$

und

$$p_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - j\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}}$$

in der linken Hälfte der komplexen Ebene. Die beiden anderen Pole liegen in der rechten Hälfte. Nach *Gewertz* ergibt sich nun die Impedanzfunktion zu:

$$Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{p^2 + p\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}} - 1} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}$$

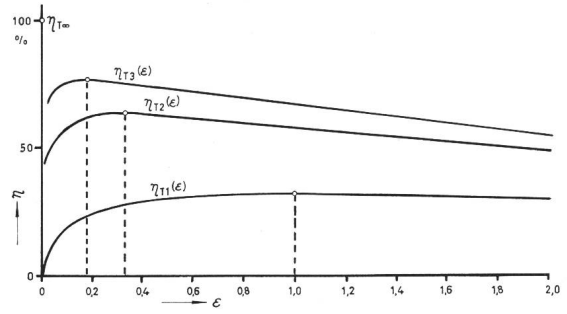


Fig. 8

Die Ausnutzungsgrade η der Schaltungen mit Tschebyscheff-Realteil 1., 2. und 3. Grades sowie unendlich hohen Grades in Abhängigkeit vom Parameter ε

Maxima der Ausnützungsgrade

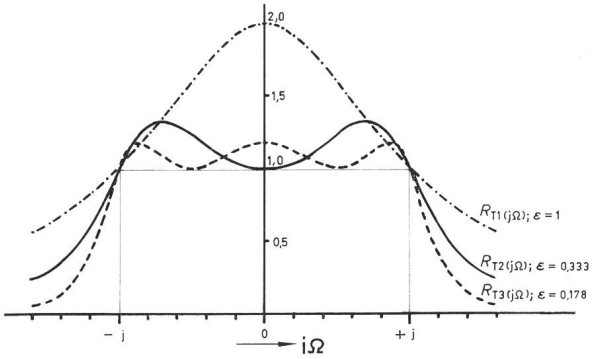
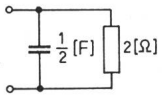
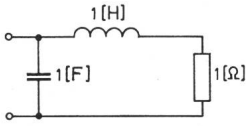
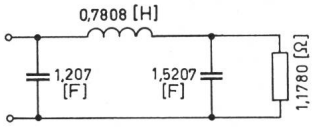


Fig. 9

Approximation des Widerstandswertes 1 über der normierten Bandbreite 1 mit Tschebyscheff-Polynomen verschiedenen Grades und jeweils optimalem ε

Tabelle II

		$R_{Tn}(\Omega) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\,[T_n(\Omega)]^2}$	
n	1	2	3
$T_n(\Omega)$	$T_1(\Omega) = \Omega$	$T_2(\Omega) = 2\,\Omega^2 - 1$	$T_3(\Omega) = 4\,\Omega^3 - 3\,\Omega$
$T_n(p)$; $(p = j\,\Omega)$	$T_1(p) = -j\,p$	$T_2(p) = -2\,p^2 - 1$	$T_3(p) = 4\,j\,p^3 + 3\,j\,p$
Realteil	$R_{T1}(p) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon p^2}$	$R_{T2}(p) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\,[2\,p^2+1]^2}$	$R_{T3}(p) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon p^2\,[4\,p^2+3]^2}$
Optimales ε	1	0,33	0,178
Impedanzfunktion (mit optimalem ε)	$Z_{T1}(p) = \frac{2}{1+p}$	$Z_{T2}(p) = \frac{1+p}{1+p+p^2}$	$Z_{T3}(p) = \frac{1,178 + 1,5662\,p + 1,3986\,p^2}{1 + 2,3171\,p + 1,8841\,p^2 + 1,6876\,p^3}$
Schaltung (mit optimalem ε)			
Ausnutzungsgrad η	0,318	0,637	0,766

Die Koeffizienten lassen sich — wie bereits beschrieben — leicht mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs ermitteln. Es ergibt sich schliesslich folgende Kettenbruchentwicklung der Impedanzfunktion:

$$Z(p) = \frac{1}{\left[\frac{2\,\varepsilon\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}-1}\right]p + \frac{1}{\frac{p}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}-1}} + 1}} \tag{29}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist offenbar die unmittelbar zwischen den Klemmen des Zweipols wirksame Kapazität:

$$C_{T3}(\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}-1} \tag{29a}$$

Mit Hilfe von Gl. (5b) folgt schliesslich der Ausnutzungsgrad der Schaltung:

$$\eta_{T3}(\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\cdot C_{T3}(\varepsilon) \tag{30}$$

Der Ausnutzungsgrad $\eta_{T3}(\varepsilon)$ hat ein Maximum bei $\varepsilon = 1/3$.

In Fig. 8 sind die Ausnutzungsgrade der Schaltungen in Abhängigkeit von ε und in Tabelle II die Impedanzfunktionen sowie die optimalen Schaltungen zusammengestellt, die sich mit Hilfe der Tschebyscheff-Funktionen 1., 2. und 3. Grades ergeben.

Fig. 9 vermittelt einen Überblick über den Verlauf der Funktionen $R_{Tn}(\Omega)$, $(n = 1, 2, 3)$ mit jeweils optimalem ε.

Vergleicht man die Tabelle II mit den entsprechenden Spalten der Tabelle I, so wird deutlich, dass man mit Hilfe der Tschebyscheff-Funktionen bei gleichem Aufwand an Schaltelementen bedeutend leistungsfähigere Schaltungen entwerfen kann als mit Potenzfunktionen. Mit 4 Schaltelementen des normierten Tiefpasses — d.h. 7 Schaltelementen des Bandpasses — ergibt beispielsweise der Entwurf mit der Potenzfunktion 3. Grades einen Ausnutzungsfaktor von 47,8%, während man mit der Tschebyscheff-Funktion 3. Grades die Schaltung zu 76,6% ausnützen kann.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die in Tabelle I bzw. II dargestellten Schaltungen mit Potenz- bzw. Tschebyscheff-Funktion 1. Grades nicht ohne weiteres für den Entwurf von Sperrenschaltungen verwendet werden können. Dies hängt damit zusammen, dass direkt zwischen den Klemmen des normierten Zweipols ein Ohmscher Widerstand vorhanden ist. Ein solcher Widerstand ist aber, wie bereits dargelegt, wegen der Verluste, die die netzfrequenten Ströme in ihm verursachen, unerwünscht. Die Schaltungen müssen deshalb, falls sie für den Entwurf von Sperren verwendet werden sollen, in andere transformiert werden. Mit dieser Transformation ändert sich aber im allgemeinen der Ausnutzungsgrad der Schaltung, es sei denn, man erhöht den Aufwand an Schaltelementen.

8. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, wie man mit Hilfe der Netzwerksynthese Trägerfrequenz-Sperren für Hochspannungsleitungen übersichtlich entwerfen kann. Da die Trägerfrequenz-Sperren im allgemeinen so ausgeführt werden, dass zu einer im Zuge der Hochspannungsleitung angebrachten Induktivität eine Abstimmschaltung parallel geschaltet wird, ist es nützlich zu wissen, welche Bandbreite man mit einer vorgegebenen Induktivität höchstens erreichen kann. Diese Frage wurde mit Hilfe eines Netzwerktheorems beantwortet.

Literatur

[1] *J. L. Stewart:* Theorie und Entwurf elektrischer Netzwerke. Berliner Union, Stuttgart, 1958.

[2] *J. Peters:* Einschwingvorgänge, Gegenkopplungen, Stabilität. Theoretische Grundlagen und Anwendungen. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1954.

Adresse des Autors:
Dr.-Ing. *Arnold Rodewald,* Emil Haefely & Cie. AG, Postfach, 4028 Basel.