Méthode pour le calcul du champ magnétique bidimensionnel autour d'un conducteur de section rectangulaire : forces produites par ce champ sur un conducteur parallèle

Autor(en): **Lanzagorta, A.J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins : gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)**

Band (Jahr): **51 (1960)**

Heft 4

PDF erstellt am: **03.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-917018

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

GEMEINSAMES PUBLIKATIONSORGAN
DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS (SEV) UND
DES VERBANDES SCHWEIZERISCHER ELEKTRIZITÄTSWERKE (VSE)

Méthode pour le calcul du champ magnétique bidimensionnel autour d'un conducteur de section rectangulaire Forces produites par ce champ sur un conducteur parallèle

Par *A. J. Lanzagorta*, Bilbao

537.311.5

On connaît des méthodes générales de calcul du champ et des forces dans des configurations bi-dimensionnelles de conducteurs de section rectangulaire et densité du courant uniforme basées sur les équations de Maxwell. *Le but de ce travail est de présenter une méthode d'application assez générale directement basée sur la loi de* Biot-Savart.

Die allgemeinen Methoden der Berechnung des Feldes und der Kräfte in zweidimensionalen Anordnungen von Leitern rechteckigen Querschnittes und von homogener Stromdichte auf Grund der Maxwellschen *Gleichungen sind bekannt. Der Aufsatz schlägt eine Methode ziemlich allgemeiner Gültigkeit vor, welche sich unmittelbar auf das* Biot-Savartsche *Gesetz stützt.*

1. Equations pour le champ et la force

Pour un conducteur mince (fig. 1) on sait que la valeur du champ transversal dans un point quelconque est

$$H_x = 0{,}2\,\frac{I}{h}\ln\frac{d'}{d}\quad [\mathrm{Oe}] \qquad (1)$$

(intensité en ampères, longueurs en centimètres).

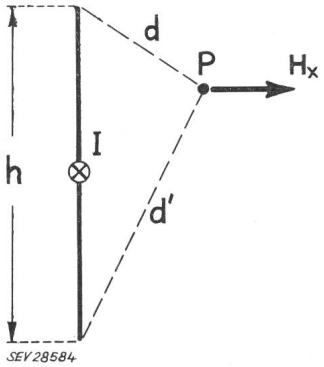

Fig. 1
Ruban mince de longueur infinie

H_x composante transversale du champ magnétique au point P [Oe]; I intensité totale [A]; d distance du point P à l'extrémité supérieure du ruban; d' distance du point P à l'extrémité inférieure du ruban; h hauteur du ruban [cm]

Si le conducteur possède de l'épaisseur, l'équation (1) peut être facilement généralisée (fig. 2):

$$H_x = 0{,}2\,\frac{I}{h}\ln\frac{D'}{D} \qquad (2)$$

D est la distance moyenne géométrique (d.m.g.) entre le point P et le côté supérieur du rectangle. D', le même pour le côté inférieur. La densité du courant dans le conducteur est supposée uniforme.

Pour le calcul de la composante de la force parallèle aux côtés longs qui est exercée sur un autre conducteur parallèle (fig. 3) on a:

$$F_y = 2{,}04\cdot 10^{-8}\,\frac{I_1}{h}\,I_2\cdot\ln\frac{D_s'}{D_s}\quad [\mathrm{kg/cm}] \qquad (3)$$

[D_s, d.m.g. entre la section S_2 (densité du courant uniforme) et le petit côté d'en haut du conducteur rectangulaire].

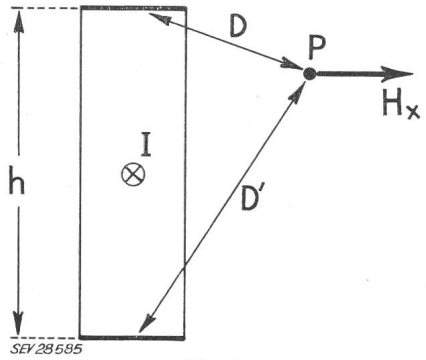

Fig. 2
Conducteur de section rectangulaire, densité du courant uniforme

H_x composante transversale du champ magnétique au point P [Oe]; I intensité totale [A]; D distance moyenne géométrique entre le point P et le côté supérieur de la section du conducteur; D' distance moyenne géométrique entre le point P et le côté inférieur; h hauteur du conducteur [cm]

Le calcul de la composante de la force parallèle aux côtés petits peut se faire en introduisant les d.m.g. aux côtés longs. Cependant, pour des sections allongées, le calcul ne résulte pas commode car il faudrait trop soigner la précision dans ces d.m.g.

Si la densité du courant n'est pas uniforme et varie dans la direction du côté long du rectangle (fig. 4) on peut indiquer une formule plus générale.

$$F_x = -\,2{,}04\cdot 10^{-8}\,I_2\left[\int_0^h \frac{\mathrm{d}\iota}{\mathrm{d}_x}\cdot\ln D(x)\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \Sigma_n\,\Delta_k\,\iota\cdot\ln D(x_k)\right]\quad [\mathrm{kg/cm}];\ \iota \text{ en } [\mathrm{A/cm}] \qquad (4)$$

L'équation (3) peut s'obtenir de (4) en faisant

$$\Delta_1 \iota = -\Delta_2 \iota = \frac{I_1}{h}; \quad \frac{d\iota}{dx} = 0$$

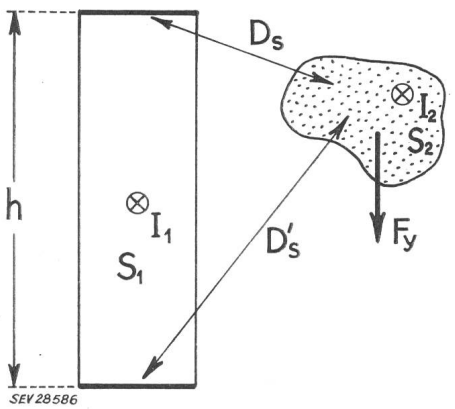

Fig. 3

Conducteur de section rectangulaire, densité du courant uniforme, et conducteur de section arbitraire, densité du courant uniforme

F_y force axiale [kg/cm]; D'_s distance moyenne géométrique entre la section S_2 et le côté inférieur de la section rectangulaire; I_2 intensité totale dans le conducteur de section S_2 [A]; I_1 intensité totale dans le conducteur de section S_1 [A]; D_s distance moyenne géométrique entre la section S_2 et le côté supérieur de la section rectangulaire; h hauteur de S_1 [cm]

Pour le cas particulier de la fig. 5 on trouve:

$$F_x = 2{,}04 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{I}{h - \frac{1}{2}(c + c')} I_2 \cdot \ln \frac{D'}{D} \qquad (5)$$

[D', d.m.g. entre le rectangle de côté c' et le conducteur de section arbitraire].

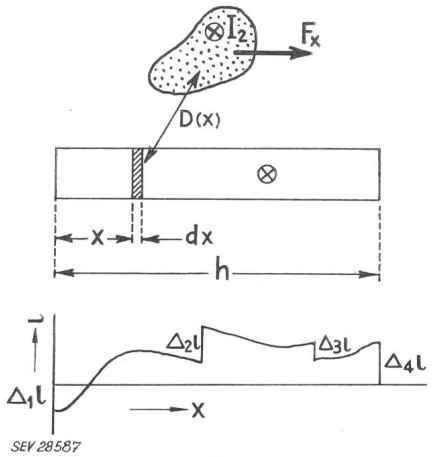

Fig. 4

La densité du courant ι dans le conducteur de section rectangulaire est variable dans la direction de côté long. La densité du courant dans l'autre conducteur est uniforme

F_x force axiale [kg/cm]; I_2 intensité [A]; $D(x)$ distance moyenne géométrique (d. m. g.) entre un élément de surface de la section rectangulaire et la surface de la section de l'autre conducteur; x distance de l'élément de surface à l'extrémité de gauche du conducteur rectangulaire; h hauteur du conducteur rectangulaire [cm]

2. Calcul des distances moyennes géométriques

Pour rendre utilisables les équations (2) et (3) nous allons présenter des moyens de calculer, de façon suffisamment commode et précise, la d.m.g. pour un certain nombre de cas pratiques.

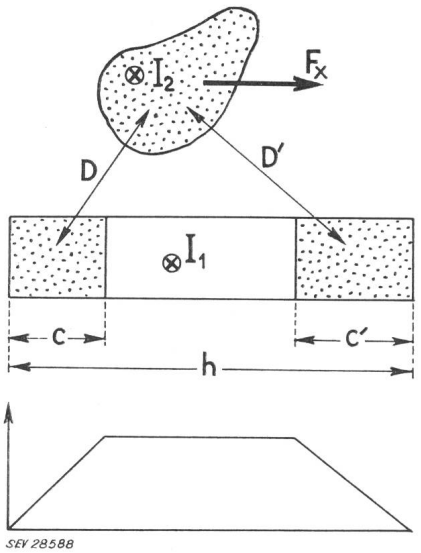

Fig. 5

Variation linéaire de la densité du courant dans le conducteur de section rectangulaire (d'abord croissante, puis constante, finalement décroissante; valeur zero aux extrémités)

D et D' distances moyennes géométriques entre les sections pointillées; c distance dans laquelle la densité du courant croît de gauche à droite [cm]; c' distance dans laquelle la densité du courant décroît de gauche à droite [cm]
Pour les autres désignations, voir les figures précédentes

a) Point et segment de droite de longueur a

Les courbes de la fig. 6 donnent directement la valeur de $\ln \frac{D}{a}$ en fonction des coordonnées du point par rapport au segment.

Pour des points qui se trouvent hors de la portée de la fig. 6 on utilisera les courbes de la fig. 7 qui indiquent la différence entre ln D et le logarithme de la distance au point moyen du segment.

b) La d.m.g. entre les points de la surface d'un rectangle et les points de l'un de ses côtés

est donnée directement dans les fig. 8 et 9.

Le cas le plus général que nous nous proposons d'atteindre est celui de

c) la d.m.g. entre un rectangle et un segment de droite parallèle a l'un de ses côtés.

Pour ce cas on peut utiliser la formule suivante (fig. 10):

$$\ln D_{cS} = \ln \sqrt{X^2 + Y^2} + \varepsilon_b (Y, X) + \\ + \varepsilon_c \left(X, Y \pm \frac{b}{2}\right) + \varepsilon_a \left(X \pm \frac{c}{2}, Y \pm \frac{b}{2}\right) \qquad (6)$$

$\varepsilon_b (Y, X)$ représente la valeur de ε au point $\left(\frac{Y}{b}, \frac{X}{b}\right)$ (fig. 10).

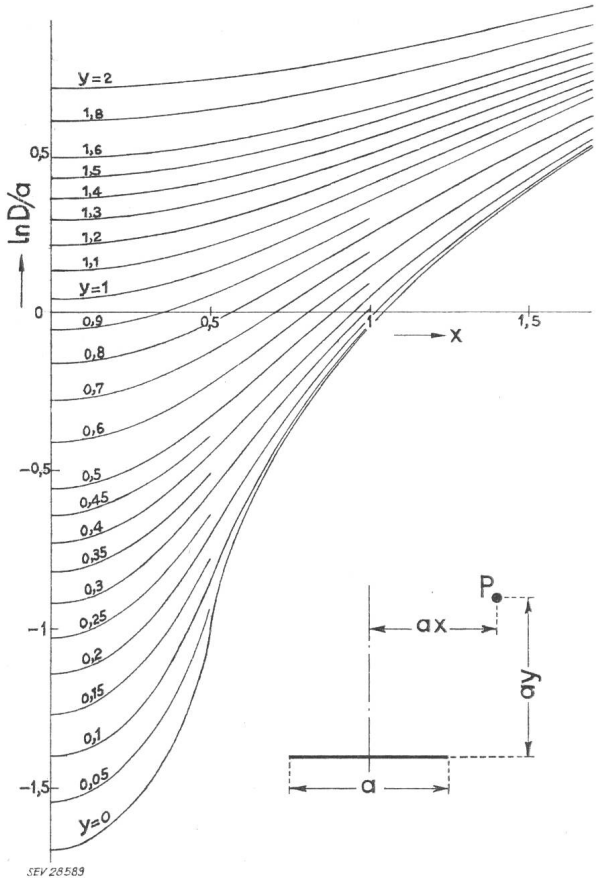

Fig. 6

Distance moyenne géométrique D entre un segment de droite et un point quelconque:

$$\ln \frac{D}{a} = \left(\frac{1}{2} + x\right) \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + y^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2}$$

$$+ y \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2} + x}{y} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2} - x}{y} \right) - 1$$

a longueur du segment

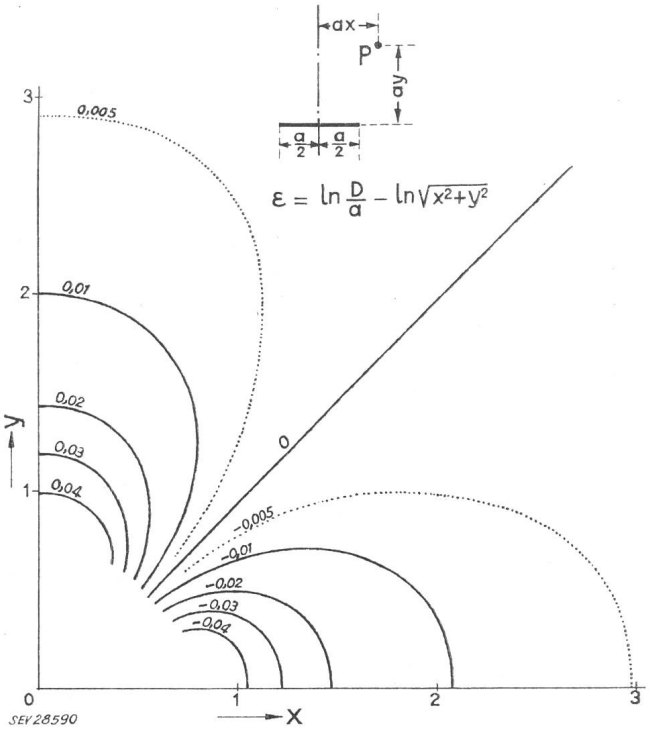

Fig. 7

Différence entre le logarithme de la distance moyenne géométrique D entre un point et un segment et le logarithme de la distance du point au centre du segment

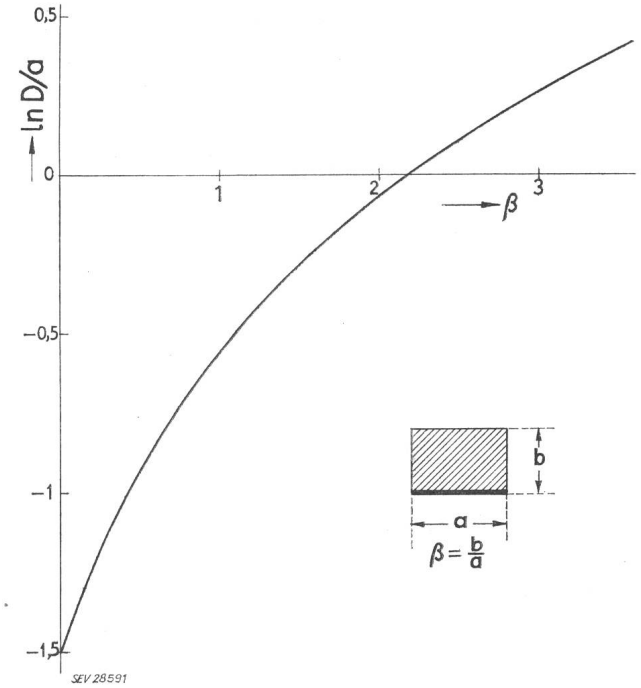

Fig. 8

Distance moyenne géométrique D entre la surface d'un rectangle et l'un de ses côtés:

$$\ln \frac{D}{a} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{6}\right) \ln (1 + \beta^2) + \frac{\beta^2}{3} \ln \beta + \frac{1}{3\beta} \operatorname{arc\,tg} \beta + \beta \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\beta} - \frac{11}{6}$$

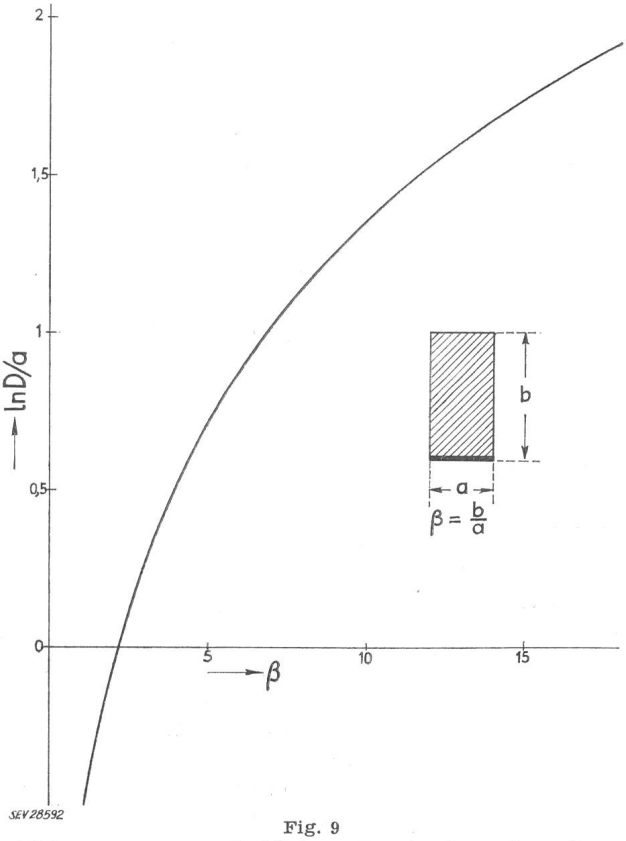

Fig. 9

Distance moyenne géométrique D entre la surface d'un rectangle et l'un de ses côtés pour $\frac{1}{\beta} = \alpha < 1$:

$$\ln \frac{D}{a} = \ln \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{\pi}{6} \alpha - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^4}{180} - \frac{\alpha^6}{840} \cdots$$

$\varepsilon_c \left(X, Y \pm \frac{b}{2}\right)$ représente la valeur moyenne de ε dans le segment entre $\left(\frac{X}{c}, \frac{Y + b/2}{c}\right)$ et $\left(\frac{X}{c}, \frac{Y - b/2}{c}\right)$,

$\varepsilon_a\left(X \pm \frac{c}{2}, Y \pm \frac{b}{2}\right)$ la moyenne de ε dans l'intérieur du rectangle avec sommets aux points

$$\left(\frac{X \pm c/2}{a}, \frac{Y \pm b/2}{a}\right)$$

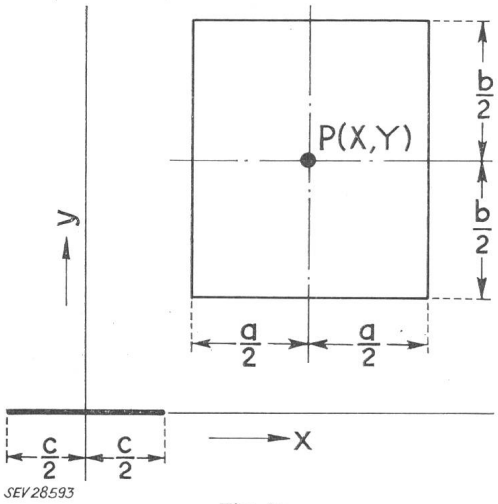

Fig. 10

Surface rectangulaire et segment de droite parallèle à l'un des côtés du rectangle

$P(X, Y)$ centre du rectangle; a longueur du côté parallèle au segment; b longueur du côté perpendiculaire au segment; c longueur du segment

Les équations:

$$\ln D_{cS} = \ln \sqrt{X^2 + Y^2} + \varepsilon_a(X, Y) + \\ + \varepsilon_b\left(Y, X \pm \frac{a}{2}\right) + \varepsilon_c\left(X \pm \frac{a}{2}, Y \pm \frac{b}{2}\right) \quad (7)$$

$$\ln D_{cS} = \ln \sqrt{X^2 + Y^2} + \varepsilon_b(Y, X) + \\ + \varepsilon_a\left(X, Y \pm \frac{b}{2}\right) + \varepsilon_c\left(X \pm \frac{a}{2}, Y \pm \frac{b}{2}\right) \quad (8)$$

sont aussi valables.

La somme des deux premiers termes des équations (6), (7) et (8) peut être directement évaluée dans la fig. 6.

Ainsi, $\ln \sqrt{X^2 + Y^2} + \varepsilon_a(X, Y) = \ln \frac{D}{a}\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right) + \ln a.$

Le choix de la formule la plus convenable dépend des dimensions de la configuration.

On peut remarquer que $\varepsilon(x, y)$ est une fonction harmonique dans tout le plan à l'exception du segment entre les points (— 0,5 , 0) et (0,5 , 0). La valeur moyenne dans l'intérieur d'un cercle qui ne comprenne pas des points du segment est égale à la valeur au centre du cercle. Cela est aussi approximativement valable pour un carré qui ne soit pas trop grand ni trop près du segment singulier.

3. Quelques applications

Les exemples suivants visent au calcul des champs et forces dans les enroulements des transformateurs.

a) Champ à l'extrémité d'un conducteur rectangulaire

On sait que, si le conducteur est supposé sans épaisseur, le champ magnétique aux extrémités devient infini. Il est aisé de le calculer quand on tient compte de l'épaisseur. Les d.m.g. entre le point P et les petits côtés sont trouvées par *2a)*.

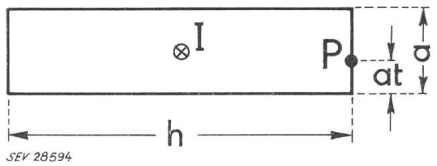

Fig. 11

La composante du champ perpendiculaire aux côtés longs au point P à la distance at du sommet le plus proche est approximativement égale ($h \gg a$) à: $0{,}2 \frac{I}{h} \ln \frac{h}{a\,f(t)}$ [Oe]

La valeur de $f(t)$ varie entre $f(0) = \frac{1}{e}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$

Pour les autres désignations, voir les figures précédentes

b) Deux rectangles inégaux, disposés comme indiqué à la fig. 12

La force axiale entre les rectangles *1* et *2* est égale à celle que s'exercerait entre *1* et *3* en supposant en *3* la même densité du courant que celle qui existe réellement en *2*. Les d.m.g. à considérer sont

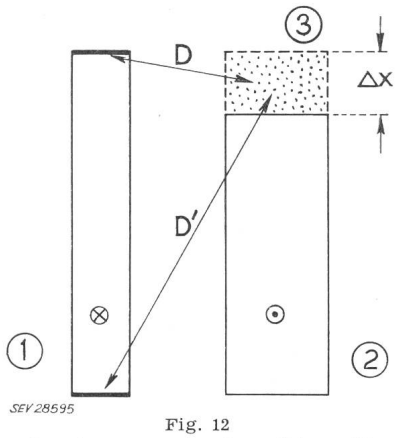

Fig. 12

Considération des d. m. g. entre les côtés petits de (1) et la surface rectangulaire qu'il faudrait ajouter à la section du conducteur (2) pour atteindre la hauteur de la section du conducteur (1)

Pour les autres désignations, voir les figures précédentes

à calculer par *2c)*. On ne tombe pas dans une grave erreur si l'on prend au lieu de la d.m.g. D', la distance entre le centre du rectangle *3* et le milieu du côté inférieur de *1*.

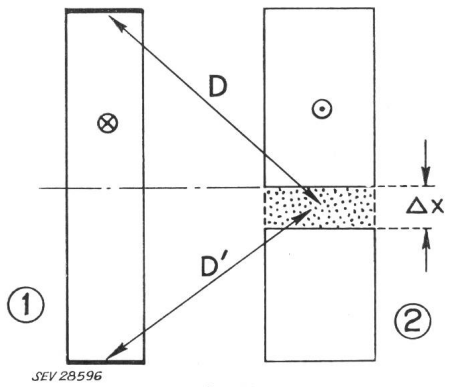

Fig. 13

Lacune asymétrique dans la partie centrale du conducteur (2)

Pour les désignations, voir les figures précédentes

c) Deux rectangles égaux à l'exception d'une lacune asymétrique dans l'un deux (fig. 13)

On peut voir que D et D' diffèrent de peu et, pour la même dimension de lacune, la force axiale est beaucoup plus petite que pour le cas *b)*. Pour *b)* la force croît proportionnellement à Δx, tandis que pour *c)*, en proportion à Δx^2, Δx petit.

d) On peut aménager une lacune symétrique dans le conducteur 1 (fig. 14)

de façon que, malgré l'existance d'une lacune asymétrique dans le conducteur *2*, il n'apparaisse

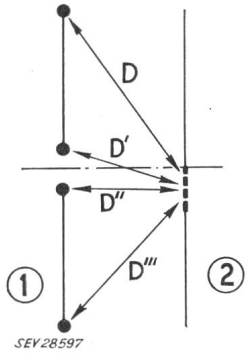

Fig. 14

Distances moyennes géométriques D, D', D'' et D''' entre les extrêmes des segments qui constituent l'ensemble (1) et la lacune de l'ensemble (2)

pas de force axiale totale. Cela survient quand les d.m.g. entre les extrêmes du conducteur *1* et la lacune de *2* sont telles que

$$\frac{D}{D'''} = \frac{D'}{D''}$$

La configuration de la fig. 15 remplit approximativement cette condition.

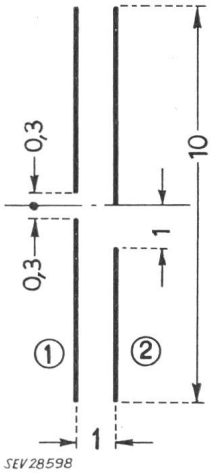

Fig. 15

Malgré l'asymétrie, il n'existe pratiquement pas de composante axiale de la force entre l'ensemble des conducteurs (1) et l'ensemble des conducteurs (2)

e) Compression totale au milieu d'un conducteur rectangulaire (fig. 16)

On calcule la force axiale sur la moitié supérieure de *2*, celle due à *1* et celle qui est exercée par la partie inférieure de *2*. D_1, D_1' et D_2' sont à determiner par *2c)*, D_2 par *2b)*.

f) Comme l'antérieur, mais il existe une lacune symétrique dans le conducteur 2 (fig. 17)

Le calcul de D_2 par *2c)* peut être peu commode. Par *2b)*:

$$\ln D_2 = \frac{10{,}5 \cdot \ln D\,(10{,}5) - 0{,}5 \cdot \ln D\,(0{,}5)}{10} =$$

$$= \frac{10{,}5 \cdot 1{,}402 - 0{,}5 \cdot (-0{,}92)}{10} = 1{,}516$$

En méprisant l'épaisseur on aurait obtenu pour $\ln D_2$ 1,508 au lieu de 1,516.

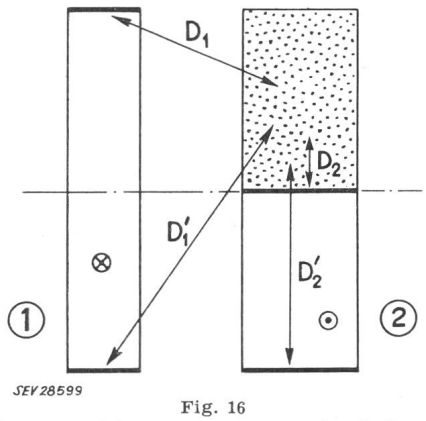

Fig. 16

Considération des distances moyennes géométriques D entre la moitié supérieure de la section (2) et les segments de droite indiqués

Pour les désignations, voir les figures précédentes

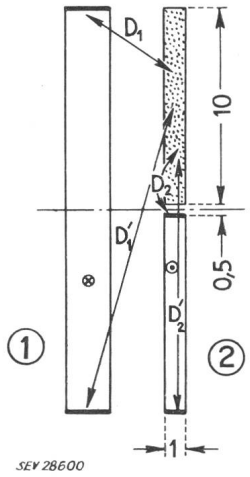

Fig. 17

Force totale sur la moitié supérieure de l'ensemble (2) Compression au milieu de l'ensemble (2)

Pour les désignations, voir les figures précédentes

4. Conclusion

Le calcul du champ magnétique transversal et des forces axiales pour des configurations allongées à deux dimensions «plan-parallèles» conduit dans chaque cas particulier à des équations assez longues quoi qu'elles ne contiennent que des fonctions logarithmiques. Les termes de ces formules peuvent être groupés en un certain nombre de logarithmes des distances moyennes géométriques entre éléments de la configuration. Les équations prennent alors une forme simple et unifiée. Quand on dispose des moyens de trouver rapidement les distances moyennes géométriques ou leurs logarithmes, les calculs numériques sont facilités considérablement. Sans entrer dans le calcul détaillé, il est parfois aisé d'estimer d'un coup d'œuil l'allure du champ transversal, ainsi que les conséquences qu'une variation des dimensions porte sur la magnitude des forces.

Cette méthode peut être d'intérêt pour le calcul des forces axiales dans les bobinages des transformateurs, dans la mesure où les résultats de calculs basés sur des champs à deux dimensions soient adaptables à la solution de problèmes dans le champ cylindrique.

Adresse de l'auteur:

A. J. Lanzagorta, ingénieur, Industrias Aguirena, S. A., Erandio-Bilbao (Espagne).