Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 118 (2000)

Heft: 24

Artikel: Zur Prüfung der Druckfestigkeit von Betonproben: theoretische Überprüfung der Normen SIA 162, Ziffer 5 13 1, SIA 162/1, Ziffer 3 01, und SIA V162.051, Ziffer 11.3.5

Autor: Wyler, Erich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-79936

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Erich Wyler, Burgdorf

Zur Prüfung der Druckfestigkeit von Betonproben

Theoretische Überprüfung der Normen SIA 162, Ziffer 5 13 1, SIA 162/1, Ziffer 3 01, und SIA V162.051, Ziffer 11.3.5

Der Beitrag zeigt anhand theoretischer Untersuchungen auf, dass die bisherigen Prüfverfahren zur Ermittlung der Druckfestigkeit bei Betonproben unbefriedigend sind, und er macht Vorschläge für die Behebung dieser Mängel.

Bei der Ermittlung der Betonqualität nach Norm SIA 162 und SIA 162/1 ist die Druckfestigkeit von Prüfkörpern zu bestimmen. Die Erfahrungen mit dieser Betonprüfung zeigen, dass das Resultat der Prüfung stark von der Anzahl der Prüfkörper abhängt. Häufig werden vom Testverfahren auch Betonproben, die erwiesenermassen einer bestimmten Festigkeitsklasse entsprechen, nicht als Beton dieser Qualität erkannt. Dieser Effekt ist bei kleinem Stichprobenumfang besonders ausgeprägt. Dies führt in der Praxis dazu, dass das Verfahren in Zweifel gezogen wird und man nicht mehr ohne weiteres bereit ist, ein negatives Resultat diskussionslos zu akzeptieren. Der Grund für diese negativen Effekte liegt darin, dass das Verfahren aus theoretischer Sicht unbefriedigend aufgebaut ist und wesentliche Aspekte der klassischen Testtheorie unberücksichtigt lässt. Aus diesem Grunde werden die Normen SIA 162, Ziffer 5 13 1 und SIA 162/1, Ziffer 3 01 einer theoretischen Analyse unterzogen. Auf der Grundlage dieser Analyse wird dann das Verfahren modifiziert und ein Vorschlag zur Weiterentwicklung dieser Normen gemacht. Der Vorteil des modifizierten und theoretisch korrekten Testverfahrens liegt darin, dass man weiss, welche Effekte man tatsächlich misst. Insbesondere können auch die Eigenschaften des Testverfahrens angegeben werden und Aussagen zur Qualität des Testverfahrens gemacht werden. Zum Schluss wird das Testverfahren der Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01 dem entsprechenden Verfahren der Norm SIA V162.051, Ziffer 11.3.5 (ENV 206) gegenübergestellt. Da auch dieses Verfahren zu unbefriedigenden Resultaten führt, werden auch hierfür Vorschläge für eine Weiterentwicklung der Norm gemacht. Dabei wird eine einfache Methode vorgestellt, wie diese und ähnliche Fragestellungen durch den Anwender untersucht werden können.

Die Druckfestigkeitsprüfung der Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01

Bei der Produktion von Werkbeton sind gemäss Norm SIA 162/1 verschiedene Kontrollen durchzuführen, um eine ausreichende Betonqualität sicherzustellen. Wir untersuchen nur den Teil für die Prüfung der Betondruckfestigkeiten im Rahmen der laufenden Kontrolle (Ziffer 3 01). Dazu sind mindestens 30 Betonprüfkörper auf ihre Druckfestigkeit zu überprüfen.

Beim Beton werden verschiedene Qualitäten unterschieden. Bei der Betonqualität B a/b bezeichnet die erste Zahl a den Erwartungswert der Würfeldruckfestigkeit, ausgehend vom geforderten Mindestwert b unter Berücksichtigung der doppelten Standardabweichung von 5 N/mm². Die zweite Zahl b steht also für den beim Nachweis der Tragsicherheit massgebenden Mindestwert der Würfeldruckfestigkeit. Dieser Mindestwert entspricht ungefähr dem 2%-Fraktilwert der Gauss'schen Normalverteilung. Beton der Qualität B a/b muss folgende Bedingung erfüllen:

$$f_{cwm}(n) - \lambda(n)\cdot s(n) \geq f_{cw,min} \quad \text{mit}$$

$$s(n)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f_{cwi}-f_{cwm}(n))^2}; \quad f_{cwm}(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_{cwi}$$

$f_{cwm}(n)$ mittlere Würfeldruckfestigkeit der n Prüfkörper
$\lambda(n)$ Beiwert
$s(n)$ (empirische) Standardabweichung
$f_{cw,min}$ vorgeschriebener Mindestwert ($f_{cw,min} = b$) der Würfeldruckfestigkeit
f_{cwi} Würfeldruckfestigkeit des i-ten Prüfkörpers
n Anzahl Prüfkörper

Anzahl Prüfkörper n	30	40	50	75	100
Beiwert $\lambda(n)$	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0

(Diese Bezeichnungen gelten für den gesamten Artikel.)

Ein Zahlenbeispiel

Die einleitend formulierte Kritik, dass das Testverfahren Beton einer vorgegebenen Festigkeitsklasse nicht korrekt erkennt, wird an einem Beispiel erläutert. Dazu betrachten wir Beton der Qualität B 35/25. Mit dieser Bezeichnung verbindet man die Vorstellung, dass die Druckfestigkeit eines Prüfkörpers, der mit diesem Beton hergestellt worden ist, einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ = 35 N/mm² und theoretischer Standardabweichung σ = 5 N/mm² gehorcht[1]. Lediglich 2,275% aller Betonproben würden bei diesen Annahmen den kritischen Mindestwert von 25 N/mm² unterschreiten. Führt man aber mit Beton dieser Qualität das obige Testverfahren mit 30 Prüfkörpern durch, so erhält man mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ein negatives Testresultat! In Bild 1 sind für verschiedene weitere Werte von μ und σ die Wahrscheinlichkeiten p tabelliert, dass eine Versuchsreihe von 30 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man den Beton auf die Qualität B 35/25 hin testet und voraussetzt, dass die Druckfestigkeiten der Betonproben unabhängig und normalverteilt sind mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

1
Wahrscheinlichkeiten p, dass eine Versuchsreihe von 30 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man den Beton auf die Qualität B 35/25 testet. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in N/mm²

p	σ=2	σ=3	σ=4	σ=5	σ=6	σ=7	σ=8
μ=30	0,4713	0,9871	0,9997	1	1	1	1
μ=31	0,0839	0,9011	0,9967	0,9998	1	1	1
μ=32	0,0041	0,6461	0,9768	0,9987	0,9999	1	1
μ=33	0	0,3040	0,9011	0,9923	0,9993	0,9999	1
μ=34	0	0,0839	0,7259	0,9678	0,9967	0,9996	0,9999
μ=35	0	0,0130	0,4713	0,9011	0,9871	0,9983	0,9997
μ=36	0	0,0011	0,2323	0,7693	0,9604	0,9939	0,9990
μ=37	0	0,0001	0,0839	0,5774	0,9011	0,9819	0,9967
μ=38	0	0	0,0219	0,3679	0,7961	0,9543	0,9906
μ=39	0	0	0,0041	0,1944	0,6461	0,9011	0,9768
μ=40	0	0	0,0005	0,0839	0,4713	0,8141	0,9492

p	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$	$\sigma=6$	$\sigma=7$	$\sigma=8$
$\mu=30$	0,5614	0,8334	0,9211	0,9550	0,9705	0,9765	0,9700
$\mu=31$	0,3828	0,7363	0,8733	0,9289	0,9548	0,9661	0,9628
$\mu=32$	0,2321	0,6220	0,8112	0,8941	0,9337	0,9523	0,9532
$\mu=33$	0,1248	0,5005	0,7363	0,8501	0,9065	0,9346	0,9410
$\mu=34$	0,0595	0,3828	0,6516	0,7971	0,8731	0,9125	0,9257
$\mu=35$	0,0252	0,2779	0,5614	0,7363	0,8332	0,8858	0,9071
$\mu=36$	0,0094	0,1913	0,4703	0,6692	0,7873	0,8543	0,8850
$\mu=37$	0,0031	0,1248	0,3818	0,5979	0,7361	0,8183	0,8593
$\mu=38$	0,0009	0,0772	0,3025	0,5248	0,6805	0,7779	0,8300
$\mu=39$	0,0002	0,0453	0,2321	0,4524	0,6218	0,7337	0,7972
$\mu=40$	0,0001	0,0252	0,1728	0,3828	0,5612	0,6862	0,7612

2
Wahrscheinlichkeiten p, dass eine Versuchsreihe von 5 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man den Beton auf die Qualität B 35/25 testet. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in N/mm²

Bild 1 zeigt deutlich, wie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test zu einer Ablehnung der Qualitätshypothese B 35/25 führt, mit zunehmendem Erwartungswert und abnehmender Standardabweichung abnimmt. Markant ist aber vor allem auch die starke Diskriminierung von Beton, der im gewünschten Bereich $\mu = 35\ N/mm^2$ und $\sigma = 5\ N/mm^2$ liegt. Das Testverfahren führt deshalb dazu, dass die Druckfestigkeit eines Betons, der den Test B 35/25 besteht, besser ist als das Testresultat vorgibt. Die Druckfestigkeit eines solchen Betons entspricht eher der Qualität B 40/30 als der Qualität B 35/25. Wie die obigen Zahlen berechnet werden, wird weiter unten erklärt.

Einleitend wurde festgehalten, dass sich dieser Effekt noch akzentuierter bemerkbar macht, wenn kleine Stichprobenumfänge betrachtet werden. Neben dem oben beschriebenen Testverfahren (Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01 381), das für die am meisten verwendete Betonsorte zur Anwendung gelangt, gelten für die Betonnebensorten einfachere Prüfverfahren (Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01 383). Wäre B 35/25 eine Betonnebensorte, so dürfte die Betondruckfestigkeit anhand von 5 Prüfkörpern nach folgendem Verfahren überprüft werden:

$f_{cwm}(5) - \lambda(5)\cdot s(5) \geq f_{cw,min}$ mit $\lambda(5) = 2{,}9$ und $f_{cw,min} = 25\ N/mm^2$

Analog zu Bild 1 erhält man für dieses Verfahren die in Bild 2 zusammengestellten Wahrscheinlichkeiten, dass eine Versuchsreihe von fünf Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt. Dieser Tabelle ist zu entnehmen, dass der Wert für $\mu = 35\ N/mm^2$ und $\sigma = 5\ N/mm^2$ zwar tiefer und daher besser geworden ist. Trotzdem weisen vor allem die «guten» Werte für μ und σ, d.h. $\mu > 35\ N/mm^2$ und $\sigma < 5\ N/mm^2$ deutlich schlechtere Wahrscheinlichkeiten auf. Besteht eine Betonsorte diesen Test, so würde dieser eher einem Beton der Qualität B 45/35 als einem B 35/25 entsprechen. Dies illustriert den erwähnten Effekt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das aktuelle Testverfahren für die Betondruckfestigkeiten zu einer Festigkeitsreserve führt, ohne dass diese allerdings explizit angesprochen und ausgewiesen wird. Im Folgenden beschränken wir uns wieder auf die erste Testvariante gemäss Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01 381.

Das Ziel der Prüfung

Wie bereits erwähnt, möchte man mit dem Test sicherstellen, dass Beton der Qualität B a/b eine minimale Betondruckfestigkeit $f_{cw,min}$ mit höchstens einer kleinen Wahrscheinlichkeit p unterschreitet. Wird für p der Wert 0,02275 gewählt, der Beton soll also das Qualitätsziel

$$P[f_{cwi} < f_{cw,min}] \leq 0{,}02275$$

erfüllen, so bezeichnet der Minimalwert $f_{cw,min}$ gerade das 2,275%-Fraktil der mit der Betonqualität B a/b verknüpften Referenzverteilung $N(\mu_o, \sigma_o^2)$, das im Falle einer Normalverteilung mit der Formel

$$f_{cw,min} = \mu_o - 2\sigma_o$$

berechnet werden kann. Dieser Zusammenhang gilt für jede Wahl von μ_o und σ_o. Bild 3 zeigt die Situation für die Betonqualität B 35/25, der die Referenzverteilung $N(\mu_o, \sigma_o^2)$ mit $\mu_o = 35\ N/mm^2$ und $\sigma_o = 5\ N/mm^2$ zugrunde liegt.

Beim Prüfverfahren der Norm SIA 162/1 geht es also darum, aufgrund der n Stichprobenwerte abzuschätzen, ob der 2,275%-Fraktilwert der den Betonproben zugrundeliegenden Normalverteilung den entsprechenden Fraktilwert der Referenzverteilung über- oder unterschreitet. Dies ist eine klassische Fragestellung der statistischen Testtheorie.

Der klassische Ansatz der Testtheorie

Da die im Testverfahren verwendeten Grössen vom Zufall abhängen, handelt es sich bei diesem Test um einen statistischen Test, also um eine Entscheidungsregel im Rahmen eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells (Kasten unten). Um nicht vom eigentlichen Ziel der Überprüfung der Betondruckfestigkeit abzulenken, wollen wir zu den Punkten Modellannahmen und deren Überprüfung lediglich festhalten, dass die Annahmen, die Betondruckfestigkeiten $f_{cw1}, f_{cw2}, \ldots, f_{cwn}$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, einer statistischen Überprüfung standhalten.

Bei der Formulierung der Nullhypothese ist die Zielsetzung des Tests im Auge zu behalten. Bezeichnet

- $\mu - 2\sigma$ den 2,275%-Fraktilwert der Verteilung der Prüfkörper $N(\mu, \sigma^2)$ und
- $\mu_o - 2\sigma_o$ den entsprechenden Wert der Referenzverteilung $N(\mu_o, \sigma_o^2)$,

so lautet die Nullhypothese:

- $\mu - 2\sigma \geq \mu_o - 2\sigma_o = f_{cw,min}$

Da der statistische Test gegenüber Beton mit einer zu geringen Druckfestigkeit reagieren soll, die Nullhypothese also verworfen werden soll, wenn begründete Anzeichen für eine zu geringe Druckfestigkeit bestehen, lautet die Alternative des Tests:

- $\mu - 2\sigma < \mu_o - 2\sigma_o = f_{cw,min}$

Um zu entscheiden, ob man die Nullhypothese verwerfen soll oder nicht, benötigt man eine Teststatistik (Zufallsvariable), die von den Stichprobenwerten abhängt, und im Sinne der formulierten Nullhypothese und in Abgrenzung zur Alternative den gesuchten Effekt misst.

Da wir in unserem Falle auf den 2,275%-Fraktilwert testen wollen, bietet sich als Teststatistik eine Zufallsvariable der Form

$$T = f_{cwm}(n) - \lambda(n)\cdot s(n)$$

an, wobei λ(n) eine noch zu bestimmende Konstante darstellt. Man ersetzt also in der Formulierung

$$\mu - 2\sigma$$

Die Entwicklung eines statistischen Tests gliedert sich in folgende Schritte:

- Treffen von Modellannahmen
- Überprüfen des Modells
- Formulieren der Nullhypothese
- Formulieren der Alternative
- Festlegen der Teststatistik
- Berechnen des Verwerfungsbereichs
- Berechnen der Teststatistik anhand der Stichprobe und Entscheid
- Berechnen der Güte des Tests

die theoretischen Werte μ und σ durch die empirischen Schätzfunktionen $f_{cwm}(n)$ (Mittelwert) und $s(n)$ (empirische Standardabweichung). Je nach Wahl von $\lambda(n)$ kann jetzt die Verteilung von T und zusammen mit dem festgelegten Signifikanzniveau auch der Verwerfungsbereich des Tests bestimmt werden.

Und genau an dieser Stelle wurden bei der SIA Norm 162/1, Ziffer 3 01 die vorgezeichneten Pfade der Testtheorie verlassen. Anstelle $\lambda(n)$ anhand von geeigneten Eigenschaften festzulegen und den Verwerfungsbereich anhand eines Signifikanzniveaus zu bestimmen, wurde eine Entscheidungsregel formuliert, die sich theoretisch nicht begründen lässt. Die Entscheidungsregel

- $f_{cwm}(n) - \lambda(n)\cdot s(n) \geq \mu_o - 2\sigma_o$: Nullhypothese akzeptieren
- $f_{cwm}(n) - \lambda(n)\cdot s(n) < \mu_o - 2\sigma_o$: Nullhypothese verwerfen

wobei für $\lambda(n)$ der entsprechende 2%-Fraktilwert der t-Verteilung genommen wird, erscheint aus dem Blickwinkel der Testtheorie willkürlich. Aus diesem Grunde verlassen wir diesen Ansatz und verfolgen wieder den klassischen Ansatz der Testtheorie. Da man häufig als Teststatistik eine Schätzfunktion für die Grösse, die man testen will, verwendet und da

$$\hat{f}_{2,275\%} = f_{cwm}(n) - 2\,\alpha_n\cdot s(n)$$

$$\text{mit } \alpha_n = \frac{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\text{und } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \text{ für } x>0$$

ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für $f_{2,275\%}$ ist, wählen wir als Teststatistik die Zufallsvariable

$$T = f_{cwm}(n) - 2\cdot\alpha_n\cdot s(n), \text{ d.h. } \lambda(n) = 2\alpha_n$$

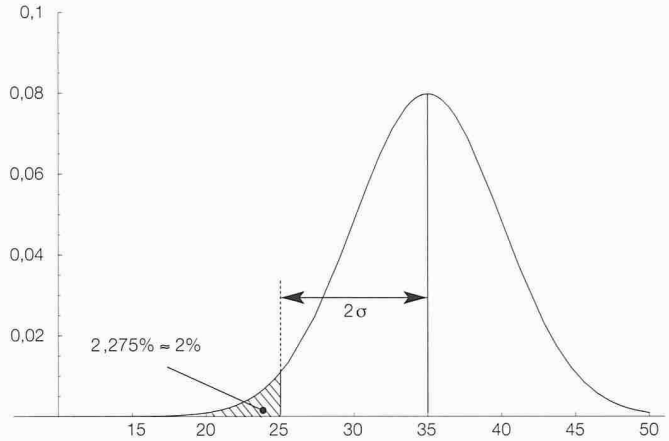
Für die Werte von α_n erhält man:

n	α_n	n	α_n
2	1,25331	9	1,03166
3	1,12838	10	1,02811
4	1,0854	11	1,02527
5	1,06385	12	1,02296
6	1,05094	13	1,02103
7	1,04235	14	1,0194
8	1,03624	15	1,018

Für $n > 10$ kann auch die Näherungsformel $\alpha_n \approx (4n-3)/(4n-4)$ verwendet werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Betondruckfestigkeiten $f_{cw1}, f_{cw2}, \ldots, f_{cwn}$ stochastisch unabhängig und identisch normalverteilt sind mit

$$f_{cwi} \sim N(\mu_o, \sigma_o^2),\ i = 1, 2, \ldots, n$$



3
Der 2,275%-Fraktilwert der Normalverteilung

kann die Verteilung von T berechnet werden. Man erhält (Kasten rechts):

$$P[T \leq x] = P[f_{cwm}(n) - 2\cdot\alpha_n\cdot\sqrt{s^2(n)} \leq x] =$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{x+2\cdot\alpha_n\sqrt{v}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-\frac{n(u-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}\, \frac{v^{a-1}e^{-\frac{v}{b}}}{b^a\Gamma(a)}\, du\, dv$$

$$\text{mit } \Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt,\quad a = \frac{n-1}{2},\ b = \frac{2\sigma^2}{n-1}$$

Mit dieser Formel wurden auch die Werte von Bild 1 berechnet ($n = 30$, $x = f_{cw,min}$, $2\cdot\alpha_n$ ersetzen durch den Wert 2,5).

Nun können wir abhängig vom Signifikanzniveau α den Verwerfungsbereich des Tests berechnen. Mit dem Signifikanzniveau legt man die Grösse des Fehlers erster Art fest, das ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Hypothese verwirft, obwohl sie eigentlich richtig wäre. Der Fehler erster Art beträgt: $\alpha = P[T \leq t_{krit}]$, gegeben die Verteilung von H_o.

Für unsere Teststatistik $T = f_{cwm}(n) - 2\cdot\alpha_n\cdot s(n)$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ und $n = 30$ erhält man, wenn man für H_o die Referenzverteilung $N(35, 25)$ wählt:

Zur Berechnung der Verteilungsfunktion von T:

- $f_{cwm}(n) \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/n)$
  $E[f_{cwm}(n)] = \mu_0$
- $s^2(n) \sim \Gamma[(n-1)/2, 2\sigma_0^2/(n-1)]$
  $E[s^2(n)] = \sigma_0^2$
  $$E[s(n)] = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\sigma_0$$
- $f_{cwm}(n)$, $s(n)$ stochastisch unabhängig

Die Wahrscheinlichkeitsdichten von Normal- und Gammaverteilung:

$$N(\mu_0, \sigma_0^2):\ f_{\mu,\sigma_0^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\Gamma(a, b):\ f_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}}{b^a\Gamma(a)} \text{ mit } \Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$$

$t_{krit} = 22{,}3285\ N/mm^2$. Die Entscheidungsregel für Beton der Qualität B 35/25 lautet also:

- $T \geq 22{,}3285\ N/mm^2$: Nullhypothese nicht verwerfen
- $T < 22{,}3285\ N/mm^2$: Nullhypothese verwerfen.

4
Wahrscheinlichkeiten p, dass eine Versuchsreihe von 30 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man mit dem theoretisch exakten Testverfahren den Beton auf die Qualität B 35/25 testet. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in N/mm^2

p	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$	$\sigma=6$	$\sigma=7$	$\sigma=8$
$\mu=30$	0	0,0433	0,5964	0,9287	0,9894	0,9982	0,9996
$\mu=31$	0	0,0034	0,2973	0,7950	0,9604	0,9926	0,9984
$\mu=32$	0	0,0001	0,0978	0,5763	0,8879	0,9752	0,9944
$\mu=33$	0	0	0,0205	0,3340	0,7527	0,9329	0,9831
$\mu=34$	0	0	0,0027	0,1489	0,5629	0,8502	0,9565
$\mu=35$	0	0	0,0002	0,0500	0,3595	0,7200	0,9004
$\mu=36$	0	0	0	0,0125	0,1918	0,5532	0,8171
$\mu=37$	0	0	0	0,0023	0,0843	0,3781	0,6943
$\mu=38$	0	0	0	0,0003	0,0302	0,2267	0,5459
$\mu=39$	0	0	0	0	0,0088	0,1181	0,3923
$\mu=40$	0	0	0	0	0,0021	0,0531	0,2552

Beiwert k2 [N/mm²]	n=30	n=40	n=50	n=75	n=100
a-b = 6	1,60	1,38	1,23	1,00	0,86
a-b = 8	2,14	1,84	1,64	1,33	1,15
a-b = 10	2,67	2,30	2,05	1,67	1,44
a-b = 12	3,21	2,76	2,46	2,00	1,73
a-b = 14	3,72	3,22	2,87	2,33	2,02

5
Beiwert k2

Um die Qualität des Tests beurteilen zu können, berechnet man entweder den Fehler zweiter Art des Tests, das ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Hypothese nicht verwirft, obwohl die Alternative richtig wäre. Der Fehler zweiter Art beträgt $\beta(\mu, \sigma) = P[T > t_{krit}]$, gegeben H_A mit μ und σ. Oder man berechnet die Macht des Tests.

Macht $= 1 - \beta(\mu, \sigma) = P[\ T \leq t_{krit}]$, gegeben H_A mit μ und σ

Bei der Macht des Tests handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass man die Hypothese verwirft, wenn H_A mit μ und σ gegeben sind. Je grösser die Macht des Tests für Parameterwerte μ und σ, die zu einer Verteilung der Alternative gehören, desto besser das Testverfahren. In Bild 4 ist für einige Werte von μ und σ die Macht p aufgeführt.

Man erkennt wie sich der Bereich mit den hohen Wahrscheinlichkeiten im Vergleich zu Bild 1 nach oben verschoben hat und Parameterpaare, die mit der Qualität B 35/25 verträglich sind, korrekt akzeptiert werden. Deren Macht bzw. deren Wahrscheinlichkeit für das irrtümliche Verwerfen der Nullhypothese ist also klein.

Auf der Seite der Parameterpaare, die zu den Verteilungen der Alternative gehören, muss festgehalten werden, dass auch Parameterpaare noch erfolgreich den Test passieren, deren 2,275%-Fraktilwert im Bereich von 21 bis 25 N/mm² liegt (z.B. $31 \leq \mu \leq 35, \sigma = 5$). Die Macht für diese Werte ist also eher tief. Dies würde für einen Sicherheitszuschlag auf der Seite des kritischen Wertes t_{krit} von etwa 3 N/mm² sprechen.

Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01, aus dem Blickwinkel der Testtheorie

Aufgrund obiger Analyse lässt sich die eingangs aufgeführte Druckfestigkeitsprüfung der Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01, wie folgt «neu» formulieren: Beton der Qualität B a/b muss folgende Bedingung erfüllen:

$$f_{cwm}(n) - k1 \cdot s(n) + k2 \geq f_{cw,min}$$

Da $n \geq 30$, berechnet sich k1 gemäss der Formel $k1 = (4n-3)/(2n-2)$
Für k2 gelten die Angaben aus Bild 5

Hiezu sind folgende Bemerkungen zu machen:

- Der Test hat ebenfalls einen Referenzbeton als Grundlage
- Als Fraktilwert wurde der 2,275%-Wert gewählt
- Als Signifikanzniveau wurde $\alpha = 5\%$ gewählt
- Da der Beiwert k1 für $n \geq 30$ nur wenig variiert, kann er gleich 2 gesetzt werden. Die Werte von k2 müssen dann geringfügig angepasst werden
- Der Test kann für beliebige p-Fraktilwerte verallgemeinert werden
- Auf einen Sicherheitszuschlag, der zur Herabsetzung des Beiwerts k2 führte, wurde bei diesem Ansatz verzichtet.

Vergleich mit der Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5 (ENV 206)

In der Norm SIA V 162.051 werden andere Betonqualitäten festgelegt, und die Qualitätstests sind teilweise anders aufgebaut. Für die gegenseitige Zuordnung der Festigkeitsklassen der Normen SIA 162/1 und SIA V 162.051 gibt Bild 6 Auskunft.

In der Norm SIA V 162.051 wird auf die Angabe eines Referenzbetons verzichtet. Zudem haben die Zahlenangaben bei den Qualitäten eine unterschiedliche Bedeutung. Es gilt:

- SIA 162/1: Qualitätsbezeichnung B a/b mit a: Erwartungswert und b: 2,275%-Fraktilwert
- SIA V 162.051: Qualitätsbezeichnung C a/b mit a: 5%-Fraktilwert für zylindrische Prüfkörper und b: 5%-Fraktilwert für kubische Prüfkörper.

6
Betonfestigkeitsklassen nach Norm SIA 162 und SIA V 162.051. Die Angaben verstehen sich in N/mm²

SIA 162	20/10	25/15	30/20	35/25	45/35	50/40	55/45	60/50	65/55
SIA V 162.051	12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/50	45/55	50/60

Das Testverfahren nach Ziffer 11.3.5, das dem vorhin behandelten Verfahren der Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01, entspricht, weist zu diesem grosse Ähnlichkeiten auf (Bild 7), besteht jedoch aus zwei Bedingungen.

Wir vergleichen nun diese beiden Tests auch numerisch anhand der einander zugeordneten Festigkeitsklassen B 35/25 und C 25/30 für kubische Prüfkörper. Wir berechnen wiederum für verschiedene Werte von μ und σ die Wahrscheinlichkeiten p, dass der Test zu einem negativen Testresultat führt. In Bild 1 sind die Werte für den Test der Norm SIA 162/1 für die Betonqualität B 35/25 bereits aufgeführt. Wir berechnen nun noch die entsprechenden Werte des Testes der Norm SIA V 162.051 für die Betonqualität C 25/30. Dazu müssen bei 15 Prüfkörpern die beiden Bedingungen

- $f_{cwm}(n) - 1{,}48 \cdot s(n) \geq 30$ N/mm²
- $\min(f_{cwi}) + 4 \geq 30$ N/mm²

geprüft werden. Da bei diesem Testverfahren gleichzeitig zwei Bedingungen geprüft werden müssen, ist die theoretische Berechnung anspruchsvoller. Aus diesem Grunde verwenden wir anstelle des exakten ein einfacheres, empirisches Berechnungsverfahren. Bei der Methode handelt es sich um eine Simulationsrechnung, die bei genügender Anzahl von Simulationsschritten sehr gute Resultate liefert. Die Methode wird im letzten Abschnitt erläutert. Die Resultate dieser Simulationsrechnung sind in Bild 8 dargestellt. Für jeden Wert wurden 100 000 Tests zu 15 Prüfkörpern simuliert. Dies garantiert eine Genauigkeit von zwei bis drei Stellen nach dem Komma.

Wenn man die Werte der Bilder 1 und 8 miteinander vergleicht, erkennt man, dass beide Tests für Beton mit einer Druckfestigkeit, die mit $\mu = 35$ N/mm² und $\sigma = 5$ N/mm² normalverteilt ist, ähnlich schlechte Werte liefern. Die Wahrscheinlichkeiten für die Verwerfung der Tests betragen 90% und 89%. Die Zuordnung der Betonqualitäten erweist sich im Falle B 35/25 und C 25/30 als gerechtfertigt. Ferner stellt man fest, dass die Werte des Tests SIA V 162.051 stärker streuen als die Werte des Tests SIA 162/1. Dies hängt vor allem damit zusammen, dass in der Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, die Anzahl der zu untersuchenden Prüfkörper kleiner ist. Je grösser nämlich die Anzahl der Prüfkörper ist, desto besser kann der Test zwischen zulässigen und nicht zulässigen Betonqualitäten unterscheiden.

Interessant ist, dass auch die zweite Bedingung über den Minimalwert recht einschneidend wirkt. Verzichtete man auf die Bedingung über den Fraktilwert, so betrüge mit dieser zweiten Bedingung allein

die Verwerfungswahrscheinlichkeit für Beton mit $\mu = 35$ N/mm² und $\sigma = 5$ N/mm² immer noch 42%.

Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, aus dem Blickwinkel der Testtheorie

Da die Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, hinsichtlich ihrer theoretischen Grundlagen ähnliche Mängel aufweist wie die Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01, wird auch für diese Norm eine Neuformulierung gegeben. Obwohl das Vorgehen ähnlich ist wie bei der Norm SIA 162/1, Ziffer 3 01, sind einige Punkte bei der Entwicklung dieses Test besonders hervorzuheben:

- Referenzbeton: Obwohl in der Norm SIA V 162.051 auf die Angabe eines Referenzbetons verzichtet wird, ordnen wir der Festigkeitsklasse C a/b für den Fall kubischer Prüfkörper eine Normalverteilung $N(\mu_o, \sigma_o^2)$ als Referenzverteilung zu mit $\mu_0 = b + 1{,}645\,\sigma_o$) und $\sigma_o = 5$ N/mm² (für den 5%-Fraktilwert gilt nämlich die Formel $b = \mu_o - 1{,}645\sigma_o$). Der Klasse C 25/30 entspricht damit die Referenzverteilung N (38,225/25), die ein wenig besser ist als die gemäss Zuordnungstabelle der Festigkeitsklasse B 35/25 entsprechende Verteilung.

- Nullhypothese und Alternative: Nullhypothese $\mu - 1{,}645\,\sigma \geq \mu_o - 1{,}645\,\sigma_o = f_{cw,min}$ (5%-Fraktilwert) und Alternative $\mu - 1{,}645\,\sigma < \mu_o - 1{,}645\,\sigma_o = f_{cw,min}$.

- Wahl der Teststatistiken: Analog zum Verfahren der Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, wird die Nullhypothese anhand von zwei Teststatistiken geprüft:

  Teststatistik 1:
  $T_1 = f_{cwm}(n) - 1{,}645 \cdot \alpha_n \cdot s(n)$, mit α_n wie vorher

  Teststatistik 2:
  $T_2 = \min(f_{cwi}) = \min(f_{cw1}, f_{cw2}, \ldots, f_{cwn})$.

- Verteilung der Teststatistiken: Es wird wieder vorausgesetzt, die Druckfestigkeiten $f_{cw1}, f_{cw2}, \ldots, f_{cwn}$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert μ_o und Standardabweichung σ_o. Die Verteilung von T_1 berechnet sich analog zu vorhin. Für die Verteilung von T_2 gilt:

$$P[T_2 \leq x] = 1-(1-\Phi(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}))^n$$

$\Phi(.)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

- Verwerfungsbereiche der Teststatistiken: Für das Signifikanzniveau wählen wir $\alpha = 5\%$. Wir legen die Verwerfungsbereiche so fest, dass gilt:

  $P[T_1 \leq t1_{krit}] = P[T_2 \leq t2_{krit}]$, gegeben die Verteilung von H_o

  $\alpha = P[T_1 \leq t1_{krit}$ oder $T_2 \leq t2_{krit}]$, gegeben die Verteilung von H_o.

Es ist zu beachten, dass die Teststatistiken T_1 und T_2 stochastisch abhängig sind. Dies macht die Berechnung anspruchsvoll. Aus diesem Grunde führen wir die Berechnung nicht exakt, sondern näherungsweise mit dem Simulationsverfahren durch.

Unter Beachtung dieser Punkte lässt sich das Testverfahren der Norm SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, für kubische Prüfkörper (nur Kontrolle 1 mit $n \geq 6$) wie folgt «neu» formulieren: Beton der Qualität C a/b muss folgende Bedingung erfüllen:

$$f_{cwm}(n) - k1 \cdot s(n) + k2 \geq f_{cw,min}$$
$$\min(f_{cwi}) + k3 \geq f_{cw,min}$$

Für den Fall kubischer Prüfkörper, d.h. $f_{cw,min} = b$, gelten folgende Beiwerte:

n	6	15
Beiwert k1	1,73	1,67
Beiwert k2 [N/mm²]	6,4	3,9
Beiwert k3 [N/mm²]	4,4	6,1

Für $n = 7, 8, \ldots, 14$ werden die Beiwerte k1, k2 und k3 durch Interpolation bestimmt.

7
Die Testverfahren der Normen SIA 162/1, Ziffer 3 01, und SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5

SIA 162/1, Ziffer 3 01: (laufende Kontrolle)
$f_{cwm}(n) - \lambda(n) \cdot s(n) \geq f_{cw,min}$
$f_{cw,min} = b$

n	30	40	50	75	100
λ(n)	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0

SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5 (Kontrolle mit $n \geq 6$)
$f_{cwm}(n) - \lambda(n) \cdot s(n) \geq f_{cw,min}$
$\min(f_{cwi}) + k \geq f_{cw,min}$
$f_{cw,min} = a$ oder b, je nach Art der Prüfkörper

n	6	7	8	9	70	11	...	15
λ(n)	1,87	1,77	1,72	1,67	1,62	1,58	...	1,48
k	3	3	3	3	4	4	...	4

In Bild 9 ist für dieses neue Testverfahren abhängig von μ und σ die Macht p aufgeführt, wenn man auf die Festigkeitsklasse C 25/30 testet und 15 Prüfkörper untersucht. Man erkennt, dass der Test für Beton mit einer Druckfestigkeit, die mit $\mu = 35$ N/mm² und $\sigma = 5$ N/mm² normalverteilt ist, bereits mit einer Wahrscheinlichkeit von 39% verworfen wird. Dies hängt damit zusammen, dass man für diesen Test einen anderen Referenzbeton gewählt hat. Dementsprechend besitzt der Test für Beton mit einer Druckfestigkeit, die normalverteilt ist mit $\mu = 38$ N/mm² und $\sigma = 5$ N/mm², eine Macht von 6%, was wie erwartet etwa dem Fehler erster Art von 5% entspricht.

Die Simulationsrechnung, eine Methode für den Anwender

In den vorangehenden Abschnitten wurde verschiedentlich anstelle der exakten Berechnung eine Simulationsrechnung für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten durchgeführt. Dies ist eine in der Praxis häufig verbreitete Methode, wenn die exakte Berechnung technisch anspruchsvoll ist und die Resultate nur mit beschränkter Genauigkeit ausgewiesen werden müssen.

8
Wahrscheinlichkeiten p, dass eine Versuchsreihe von 15 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man den Beton auf die Qualität C 25/30 testet. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in N/mm²

p	σ=2	σ=3	σ=4	σ=5	σ=6	σ=7	σ=8
μ=30	1	1	1	1	1	1	1
μ=31	0,9954	0,9988	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
μ=32	0,8864	0,9842	0,9954	0,9979	0,9987	0,9996	0,9996
μ=33	0,4454	0,8850	0,9708	0,9898	0,9951	0,9975	0,9987
μ=34	0,0771	0,6217	0,8867	0,9609	0,9840	0,9921	0,9955
μ=35	0,0034	0,2866	0,7023	0,8875	0,9550	0,9785	0,9890
μ=36	0,0001	0,0783	0,4487	0,7505	0,8903	0,9479	0,9730
μ=37	0	0,0126	0,2218	0,5637	0,7824	0,8934	0,9444
μ=38	0	0,0015	0,0849	0,3614	0,6396	0,8053	0,8956
μ=39	0	0,0002	0,0247	0,1982	0,4707	0,6883	0,8242
μ=40	0	0	0,0067	0,0957	0,3131	0,5539	0,7288

p	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$	$\sigma=6$	$\sigma=7$	$\sigma=8$
$\mu=30$	0,2219	0,7992	0,9544	0,9858	0,9949	0,9975	0,9984
$\mu=31$	0,0271	0,5073	0,8511	0,9529	0,9825	0,9920	0,9962
$\mu=32$	0,0012	0,2179	0,6657	0,8803	0,9524	0,9799	0,9902
$\mu=33$	0,0004	0,0632	0,4272	0,7508	0,8974	0,9548	0,9777
$\mu=34$	0	0,0122	0,2243	0,5739	0,8014	0,9077	0,9545
$\mu=35$	0	0,0023	0,0987	0,3924	0,6703	0,8349	0,9141
$\mu=36$	0	0,0005	0,0339	0,2319	0,5189	0,7334	0,8565
$\mu=37$	0	0,0001	0,0113	0,1228	0,3689	0,6157	0,7793
$\mu=38$	0	0	0,0038	0,0590	0,2424	0,4848	0,6798
$\mu=39$	0	0	0,0012	0,0269	0,1476	0,3579	0,5703
$\mu=40$	0	0	0,0006	0,0117	0,0844	0,2491	0,4573

9

Wahrscheinlichkeiten p, dass eine Versuchsreihe von 15 Prüfkörpern zu einem negativen Testresultat führt, wenn man mit dem theoretisch exakten Testverfahren den Beton auf die Qualität C 25/30 testet. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in N/mm²

Wir erläutern die Methode am Beispiel des ursprünglichen Tests für die Betonqualität B 35/25. Die einzelnen Rechenschritte können beispielhaft auch mit einem Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt werden. Die Resultate in diesem Artikel wurden jedoch mit einem eigens zu diesem Zweck entwickelten Simulationsprogramm berechnet. Die Methode gliedert sich in folgende Schritte:

- Erzeugen von 30 normalverteilten Zufallszahlen mit Erwartungswert 35 N/mm² und Standardabweichung 5 N/mm²
- Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung der 30 Werte
- Test bestanden?
- Wiederholen der obigen drei Schritte. Für eine Genauigkeit von etwa zwei Stellen nach dem Komma sind gegen 10 000 solcher Wiederholungen erforderlich
- Ermittlung der Häufigkeit für ein negatives Testresultat. Die Theorie sagt, dass mit zunehmender Anzahl von Wiederholungen, diese Häufigkeit letztlich gegen den theoretisch exakten Wert konvergiert.

Da eine solche Simulationsrechnung, die auch unter dem Namen Monte-Carlo-Methode bekannt ist, auch vom Ingenieur in der Praxis durchgeführt werden kann, ist es nicht erstaunlich, dass diese Technik bei vielen komplexen Ingenieurproblemen Anwendung findet. Und dank der anhaltenden Fortschritte in der Computertechnik ist sie auch rechentechnisch unproblematisch.

Schlussfolgerungen

Obwohl die Druckfestigkeitsprüfungen für Betonproben der Normen SIA 162, Ziffer 5 13 1, SIA 162/1, Ziffer 3 01, und SIA V 162.051, Ziffer 11.3.5, aus theoretischem Blickwinkel unbefriedigend sind, führen die Normen zu einer konservativen Klassierung des Betons in Festigkeitsklassen und erfüllen daher einen wichtigen Grundsatz einer praxistauglichen Norm. Trotzdem sollten die Normen im Sinne der gemachten Vorschläge angepasst werden, dies vor allem deshalb, weil ein theoretisch abgestütztes Verfahren begründ- und nachvollziehbare Resultate liefert und weil seine Eigenschaften auch angegeben werden können. Insbesondere sollte ein allfälliger Sicherheitsfaktor, der bei den genannten Normen implizit und diffus im Verfahren integriert ist, explizit angegeben werden.

Adresse des Verfassers:
Erich Wyler, Dr. sc. math., Hochschule für Technik und Architektur Burgdorf, Abteilung für Bauingenieurwesen, Pestalozzistrasse 20, 3400 Burgdorf

Anmerkung

[1]Die Grössen μ (= Erwartungswert) und σ (= theoretische Standardabweichung) stehen für die theoretischen Kennzahlen der Normalverteilung. Im Gegensatz dazu bezeichnen $f_{cw}(n)$ (= Mittelwert) und s(n) (= empirische Standardabweichung) die aus den gemessenen Würfeldruckfestigkeiten berechneten empirischen Grössen. Sie hängen vom Zufall ab und sind deshalb Zufallsvariablen.

Literatur

Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: Norm SIA 162: Betonbauten. Zürich, 1993

Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: Norm SIA 162/1: Betonbauten Materialprüfung. Zürich, 1995

Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: Norm SIA V 162.051: Beton: Eigenschaften, Herstellung, Verarbeitung und Gütenachweis. Zürich, 1994

Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N.: Continuous Univariate Distributions, Volume 1, John Wiley & Sons, 1994

Arnold S.F.: Mathematical Statistics. Prentice-Hall, 1990