Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 87 (1969)

Heft: 12

Artikel: Wellenlage, Reibung und Öldurchsatz von Radial-Gleitlagern mit zwei zusammengeschobenen Kreisschalen (Zitronenspiellager)

Autor: Ott, H.H. / Grey, U.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70625

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

87. Jahrgang Heft 12 SCHWEIZERISCHE BAUZEITUNG 20. März 1969

HERAUSGEGEBEN VON DER VERLAGS-AKTIENGESELLSCHAFT DER AKADEMISCHEN TECHNISCHEN VEREINE, ZÜRICH

Wellenlage, Reibung und Öldurchsatz von Radial-Gleitlagern mit zwei zusammengeschobenen Kreisschalen (Zitronenspiellager)

DK 621.822.5.001.2

Von Prof. Dr. **H. H. Ott**, **J.-E. Buchter**, dipl.Ing. und **U. Frey**, dipl. Ing.

Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion ETH, Zürich

Zusammenfassung

Das Zitronenspiellager ist ein Radialgleitlager, das aus zwei radial zusammengeschobenen kreiszylindrischen 180°-Segmenten besteht. Solche Lager eignen sich vor allem für raschlaufende, schwach belastete Wellen. Für diese Lager werden der Zusammenhang zwischen Belastung und Wellenverlagerung, die Reibung und der Schmierstoffdurchsatz theoretisch berechnet, wobei Lager mit verschiedenen Breiten und Spielverhältnissen untersucht werden. Die Berechnungen sind unter Annahme einer konstanten Schmierstoffzähigkeit durchgeführt.

Bezeichnungen

Da ausschliesslich mit Grössengleichungen gearbeitet wird, kann ein beliebiges kohärentes Masssystem verwendet werden. Zu empfehlen ist das MKSA-System.

A	Austritt (Ende des Segmentes)
A'	Ende der Druckzone im Segment
B	Segmentbreite
B'	Breite des Ölfilms im teilweise gefüllten Spaltteil $\overline{A'A}$
D	Wellendurchmesser
ΔD	Durchmesser-Lagerspiel
E	Eintritt des Segmentes
H	Horizontalkomponente der Schmierstoffkraft auf Welle
$K_R = Q_{tot}/\psi_H R^3\omega$	Dimensionslose Durchsatzzahl (für gesamthaft beidseitig am Rand austretendes Schmiermittel)
L	Segmentlänge
M	Wellenzentrum
O	Krümmungsmittelpunkt der Kreisschalen
P	Vom Schmierstoff auf Welle wirkende Kraft
Q	Schmierstoffdurchsatz (Volumen pro Zeiteinheit)
R	Wellenradius
ΔR	Radius-Lagerspiel
S	Reibungskraft
ΔS	Reibungskraft im überdruckfreien Segmentteil
$So = p_m \psi_H^2/\eta\omega$	Sommerfeldzahl
U	Umfangsgeschwindigkeit der Welle
V	Vertikalkomponente der Schmierstoffkraft auf Welle
Z	Lagermittelpunkt
e	Exzentrizität (Abstand des Wellenzentrums vom Krümmungszentrum der Schale)
h	Spalthöhe
m	Parabel-Exponent
p	Überdruck im Schmierspalt (Überdruck gegenüber Umgebungsdruck)
$\hat{p}$	Druck in Mittelebene des Lagers
$p_m = P/BD$	mittlere spezifische Lagerbelastung
z	Koordinate in Achsrichtung
$\pi = p\,\psi_H^2/\eta\omega$	dimensionsloser Druck
$\hat{\Pi} = \hat{p}\,\psi_H^2/\eta\omega$	dimensionsloser Druck in Mittelebene
$\beta = B/D$	relative Lagerbreite
$\delta = \psi_V/\psi_H$	Spielverhältnis
$\varepsilon = e/\Delta R_H$	relative Exzentrizität
η	dynamische Zähigkeit
$\lambda = B/L$	relative Segmentbreite
φ	Winkel in Umfangsrichtung
$\chi = h/\Delta R_H$	relative Spalthöhe
$\psi = \Delta R/R = \Delta D/D$	relatives Lagerspiel
ω	Winkelgeschwindigkeit der Welle

Indices:

A'	am Ende der Druckzone
A	am Segment-Austritt
E	am Segment-Eintritt
H	horizontal
L	bezogen auf Länge der Druckzone
V	vertikal
o	Oberschale
u	Unterschale
res, tot	für ganzes Zitronenspiellager
$\overline{()}$	Mittelwert
$\hat{()}$	in Mittelebene des Lagers

1. Einleitung

Für raschlaufende Turbomaschinen und Getriebe können einfache kreiszylindrische Gleitlager oft nicht verwendet werden, weil die Wellen in diesen Lagern bei hohen Drehzahlen nicht mehr stabil laufen. Man geht in solchen Fällen meist auf Mehrflächenlager über, bei denen anstelle der kreisförmigen Bohrung zwei oder mehr starre Segmente angeordnet sind. Es sind eine Reihe solcher Lager bekannt, wie zum Beispiel das Zitronenspiellager [1], [2], [3], das auf *W. Frössel* zurückgehende Mehrgleitflächenlager [4] oder das Dreikeillager [5].

Unter den erwähnten segmentierten Lagern verdient das Zitronenspiellager besondere Beachtung, da es hinsichtlich Geometrie und Herstellung wohl das einfachste nicht rein kreisförmige Lager ist. Das gewöhnliche Zitronenspiellager besteht aus zwei gleichen, sich über den halben Kreisumfang erstreckenden Kreisschalen, deren Zentren auf der Symmetrie-Achse der Schalen so verschoben sind, dass das Lagerspiel vermindert wird. Solche oder ähnliche Lager wurden in der Literatur mehrfach behandelt [1], [2], [3], doch fehlen insbesondere Angaben über den Einfluss der Lagerbreite auf den Schmiermitteldurchsatz und die Reibung. In [6] und [7] werden Zitronenspiellager endlicher Breite mit 150°-Segmenten behandelt. Die wesentlichen Unterschiede dieser Untersuchungen gegenüber der nachstehenden Abhandlung bestehen darin, dass die Segmentlängen ungleich sind und dass die Reibung in [6] und [7] nur annähernd berechnet wird.

Die vorliegende Arbeit behandelt das aus zwei gleichen Halbschalen bestehende Zitronenspiellager, das auf der Schalen-Symmetrieachse belastet ist und mit einem Schmiermittel (Öl) von konstanter Zähigkeit und Dichte versorgt wird (Bild 1). Insbesondere werden die Einflüsse des Vertikalspiels und der Lagerbreite untersucht. Man spricht beim Zitronenspiellager deshalb von «Vertikal»-Spiel, weil das Lager meist gemäss Bild 1 mit vertikaler Schalen-Symmetrieachse eingebaut wird, so dass die Spielverminderung vertikal erfolgt. Das Lager muss nicht notwendigerweise auch in der Symmetrieachse be-

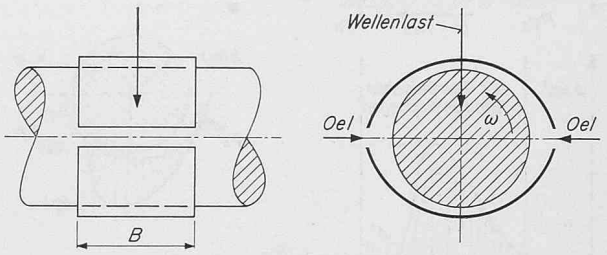


Bild 1. Schematischer Aufbau des Zitronenspiellagers

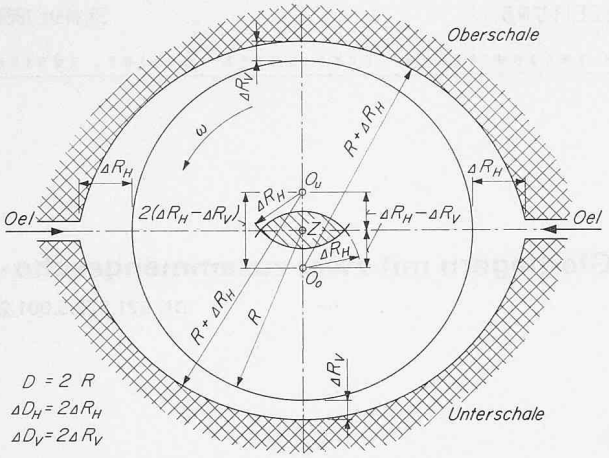


Bild 2. Schnitt durch Zitronenspiellager mit Welle in symmetrischer Mittellage. Schraffiertes Kreisbogen-Zweieck = Bewegungsbereich für das Wellenzentrum

lastet sein, doch wird dieser häufig vorkommende Fall hier vorausgesetzt.

2. Geometrie des Zitronenspiellagers

Wir betrachten ein horizontal geteiltes Radiallager, bei dem gemäss Bild 2 eine Welle vom Radius R durch zwei Halbschalen mit dem Krümmungsradius $R + \Delta R_H$ umschlossen wird. Die Halbschalen sind vertikal so gegeneinander verschoben, dass bei symmetrischer (zentrischer) Wellenlage an der höchsten und tiefsten Stelle des Lagers ein Schmierspalt von der Dicke ΔR_V verbleibt. Die Krümmungsradiendifferenz ΔR_H erscheint bei symmetrischer Wellenlage in der Trennfuge als radiales Horizontalspiel; deshalb wird die Krümmungsradiendifferenz so bezeichnet und trägt den Index H. Für die Radialspiele wird $\Delta R_H \ll R$ und $\Delta R_V \ll R$ vorausgesetzt. Wenn mit Durchmesserspiel statt mit Radialspiel gerechnet wird, gilt $\Delta D_H = 2\,\Delta R_H$. Das im Zentrum von Bild 2 liegende schraffierte Kreisbogen-Zweieck stellt den Bereich dar, in dem sich das Wellenzentrum bewegen kann. Beim Zitronenspiellager spielt das Verhältnis des Vertikal- zum Horizontalspiel eine wichtige Rolle. Wir bezeichnen es mit δ und definieren

$$\delta \equiv \frac{\Delta R_V}{\Delta R_H} = \frac{\Delta D_V}{\Delta D_H} = \frac{\psi_V}{\psi_H} \tag{1}$$

Das Schmiermittel wird von beiden Seiten her in der Horizontalfuge zugeführt; der praktisch immer vorhandene leichte Überdruck in der Grösse von $(0{,}5\ldots1{,}5)\cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ wird hier als klein vernachlässigt und überdruckfreier Zu- und Abfluss vorausgesetzt. Die Breite der Ölzufuhrnuten wird in Umfangsrichtung als klein angenommen, so dass die Ober- und Unterschale zu 180° angenommen werden. Die Axialbreite des Lagers beträgt B; seine relative Breite ist als $\beta = B/D$ definiert.

Die an der Welle angreifende stationäre Vertikalkraft beträgt P_{res}. Wir stellen uns die Welle von aussen (einschliesslich Wellengewicht) durch eine nach unten wirkende Kraft P_{res} belastet vor. Damit die Welle im Gleichgewicht ist, muss durch den Schmierfilm in den Segmenten eine gleich grosse, nach oben gerichtete Kraft erzeugt werden.

Das beschriebene Zitronenspiellager kann so hergestellt werden, dass in der Trennfuge eine Blech-Beilage von der Dicke $\Delta D_H - \Delta D_V = 2\,(\Delta R_H - \Delta R_V)$ eingelegt und das zusammengespannte Lager auf den Durchmesser $D + \Delta D_H = 2\,(R + \Delta R_H)$ kreisrund ausgedreht wird. Nach Herausnehmen der Beilage weist das Lager die gewünschte Spaltform auf.

3. Druckverlauf in einem allgemeinen Schmierspalt und resultierende Tragkraft.

Die Tragfähigkeit eines hydrodynamisch arbeitenden Gleitlagers beruht darauf, dass sich in einem Schmierspalt von geeigneter Geometrie infolge der Wellendrehung eine Druckzone aufbaut. Die Verteilung des Überdruckes p im Spalt eines Radiallagers wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial(R\varphi)}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial(R\varphi)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) - 6\,\eta\,R\,\omega\,\frac{\partial h}{\partial(R\varphi)} = 0 \tag{2}$$

beschrieben, wobei φ den Winkel in Umfangsrichtung, z die Koordinate parallel zur Wellenachse, $h(\varphi)$ die örtliche Spalthöhe[1]), η die konstante Schmiermittelzähigkeit und ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle bedeuten. Diese Gleichung setzt voraus, dass für die Spalthöhe $h \ll R$ gilt, dass die Oberflächen von Welle und Lagerschale unelastisch und glatt sind, dass ein inkompressibler, an der Welle haftender Schmierstoff von konstanter Zähigkeit vorliegt, dass alle Grössen nicht von der Zeit abhängen und dass im Schmierspalt ein laminarer Strömungszustand herrscht. Es handelt sich dabei um die üblichen Voraussetzungen der klassischen Lager-Theorie.

Die äusseren Randbedingungen für einen endlich breiten Schmierspalt lauten bei überdruckfreiem Zu- und Abfluss des Öls $p = 0$ an allen Rändern. Löst man die Gleichung (2) für einen allgemeinen Schmierspalt mit divergentem Auslauf, so ergibt die mathematische Lösung Unterdrücke, die physikalisch nicht möglich sind. Deshalb muss in solchen Fällen auf der Austritts-Seite mit den Gümbelschen Randbedingungen gerechnet werden, nach denen das Ende der Druckzone dort liegt, wo gleichzeitig

$$p = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial p}{\partial(R\varphi)} = 0 \tag{3}$$

wird. Bild 3 zeigt die Druckverläufe mit den erwähnten Randbedingungen.

Wenn ein Druckverlauf $(EA'A)$ mit tangentialem Druckauslauf gemäss Bild 3 vorliegt, ist der Schmierspalt im drucklosen Bereich $(A'A)$ nur teilweise mit Öl gefüllt, was bei der Berechnung der Reibung für diesen Teil zu berücksichtigen ist (Reibungsberechnung nach Frössel).

Für Schmierspalte, bei denen wie im vorliegenden Fall h über die Breite des Lagers konstant ist, das heisst $h = h(\varphi)$ gilt, kann näherungsweise angenommen werden, dass die axiale Druckverteilung durch eine Parabel geeigneten Grades dargestellt werden kann (Bild 4). Der Druck an irgend einer Stelle z ist dann

$$p = \hat{p}\left[1 - \left(\frac{|z|}{B/2}\right)^m\right] \tag{4}$$

Mit diesem Ansatz werden automatisch die Randbedingungen an den Seitenrändern erfüllt. Nimmt man an, dass der Parabelexponent für den ganzen Spalt konstant, das heisst von φ unabhängig ist, und führt

[1]) Allgemein gilt für die Spalthöhe $h = h(\varphi, z)$; in unserem Fall entfällt die Abhängigkeit von z.

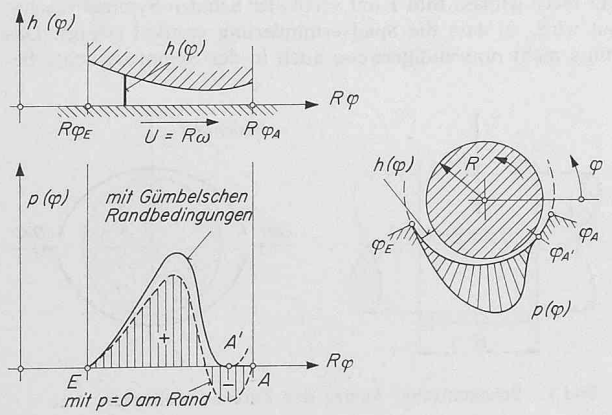


Bild 3 (links). Einfluss der Randbedingungen auf die Druckverteilung längs des Umfangs

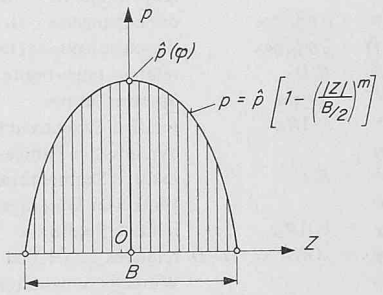


Bild 4 (rechts). Axiale Druckverteilung in einem Schmierspalt

man die angesetzte Axialdruckverteilung nach Gleichung (4) in Gleichung (2) ein, so erhält man, wenn ausserdem auf dimensionslose Grössen übergegangen wird, die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\chi^3 \frac{d\hat{\Pi}}{d\varphi}\right) - 6\,\frac{m+1}{m}\,\frac{d\chi}{d\varphi} - \frac{m+1}{\beta^2}\,\chi^3\,\hat{\Pi} = 0 \qquad (5)$$

Die Definitionsgleichungen für den dimensionslosen Druck $\hat{\Pi}$ in der Lagermittelebene, für die dimensionslose Spaltfunktion χ und für die relative Lagerbreite β sind in der Zusammenstellung der Bezeichnungen enthalten.

Der Parabelansatz für die Axialdruckverteilung hat zur Folge, dass das Ende der Druckzone (vgl. Bild 3) über die ganze Lagerbreite bei konstantem φ liegt. Exakt berechnete Druckverläufe und Messungen zeigen, dass dies näherungsweise zutrifft.

Die Lösung der Differentialgleichung (5) für einen gegebenen Schmierspalt $h(\varphi)$, der in dimensionsloser Form durch die Funktion $\chi(\varphi)$ beschrieben wird, setzt voraus, dass der Parabelexponent m bekannt ist. Für schmale Lager strebt m gegen 2 und nimmt im Grenzfall des unendlich breiten (oder seitlich abgesperrten) Lagers den Wert Unendlich an. Bei der Festlegung des Exponenten m kann man von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Beispielsweise könnte gefordert werden, dass m so festzulegen wäre, dass das Druckmaximum im Spalt möglichst genau wiedergegeben wird. Im allgemeinen interessiert jedoch vor allem die Tragfähigkeit des Lagers, so dass man m so wählen wird, dass in erster Linie das Integral des Druckes über die ganze Druckzone mit der exakten Lösung möglichst gut übereinstimmt.

Vergleiche mit exakten Lösungen zeigen, dass der Parabelexponent wesentlich vom Seitenverhältnis $\lambda = B/L$ abhängt, wobei B die Breite des Schmierspaltes und L die Länge der Druckzone bedeuten (Bild 5). Ferner hat auch die Spaltform einen Einfluss auf m. Dabei zeigt sich, dass bei relativ einfachen Spaltformen, wie sie bei Lagern praktisch vorkommen, das Verhältnis der mittleren Spalthöhe $\overline{h}_L$ in der Druckzone zur Minimalspalthöhe h_{min} als Parameter eingeführt werden kann.

Für Kreisschalen hat sich der folgende heuristische Ansatz als brauchbar erwiesen:[2])

$$m = 2 + \left(\frac{3\,\overline{h}_L/h_{min}}{2 + \overline{h}_L/h_{min}}\right)\left(\frac{\lambda^2}{1 + 0{,}85\,\lambda}\right) \qquad (6)$$

Der Aufbau und die Konstanten des Ansatzes (6) wurden so gewählt, dass für eine Reihe von Kreisschalen mit verschiedenen Breiten und Umfangslängen bei gegebenen Wellenlagen (Exzentrizität und Lagewinkel) mit der Näherungsgleichung (5) genügend genau die gleiche Schalentragkraft erhalten wird wie bei Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2); solche genauen Lösungen stehen in [8] und [9] zur Verfügung. Der verwendete m-Ansatz (6) führt ferner auch auf gute Näherungen für Reibung und Schmiermitteldurchsatz.

[2]) unveröffentlichte Untersuchung aus dem Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion an der ETH Zürich.

Da in einem allgemeinen Fall mit den Randbedingungen (3) die Länge L der Druckzone vor der Lösung der Differentialgleichung (5) noch nicht bekannt ist, muss L zunächst geschätzt oder angenommen werden, damit m nach Gleichung (6) berechnet werden kann. Wenn das Ende des Druckberges nicht am hinteren Spaltrand liegt, ist somit für die Integration der Gleichung (5) ein Iterationsverfahren notwendig. Auf die praktische Durchführung der Integration der Differentialgleichung (5) wird hier nicht näher eingegangen. Geschlossene Lösungen sind schon wegen der Randbedingungen (3) im allgemeinen nicht möglich, so dass man zum Beispiel auf Differenzengleichungen und lineare Systeme übergehen wird.[3])

Die Komponenten der Gesamtkraft P, die von der Druckzone des Segmentes (vgl. Bild 3) auf die Welle ausgeübt wird, lauten mit der Vorzeichen-Konvention von Bild 6

$$\left.\begin{matrix} V \\ H \end{matrix}\right\} = -\int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \int_{\varphi_E}^{\varphi_A'} p \left\{\begin{matrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix}\right\} R\,d\varphi\,dz \qquad (7)$$

Die resultierende Kraft wird für ein Kreisschalensegment dimensionslos durch die Sommerfeldzahl nach der Definition

$$So \equiv \frac{P}{BD}\,\frac{\psi_H^2}{\eta\omega} \equiv \frac{p_m\,\psi_H^2}{\eta\omega} \qquad (8)$$

dargestellt. Der Ausdruck muss mit dem Horizontalspiel ψ_H gebildet werden, da dieses die relative Krümmungsradien-Differenz zwischen Schale und Welle darstellt.

Entsprechend Gleichung (7) können auch die Komponenten V und H dimensionslos geschrieben werden:

$$So_H = \frac{H}{BD}\,\frac{\psi_H^2}{\eta\omega} \quad (9a) \qquad So_V = \frac{V}{BD}\,\frac{\psi_H^2}{\eta\omega} \quad (9b)$$

Die Berechnung von So_H und So_V mit den Gleichungen (7) und (9) führt auf die Berechnung dimensionsloser Integrale, in denen anstelle des Druckes p der dimensionslose Druck $\hat{\Pi}(\varphi)$ auftritt.

4. Resultierende Tragkraft und Wellenlagen des Zitronenspiellagers

Im vorhergehenden Abschnitt wird die Ermittlung der resultierenden Kraft eines Segmentes mit einem vorgegebenen Spalt $h(\varphi)$ oder $\chi(\varphi)$ besprochen. Beim Zitronenspiellager ist diese Berechnung für zwei Segmente durchzuführen, wobei die Spaltfunktionen $h_u(\varphi)$ für die Unterschale und $h_o(\varphi)$ für die Oberschale durch die Lage des Wellenzentrums innerhalb des Spielbereiches der Welle gegeben sind. Bei irgend einer Wellenlage wird sich dann nach Bild 7 aus den Kräften P_u und P_o der Einzelschale eine Resultierende P_{res} ergeben, die im allgemeinen nicht vertikal liegt. Wenn aber die äussere Belastung

[3]) Die numerischen Beispiele der vorliegenden Arbeit wurden mit einem Computer-Programm berechnet, das *Z. Varga*, dipl. Ing., Inst. für Grundlagen der Maschinenkonstruktion ETH, ausgearbeitet hat.

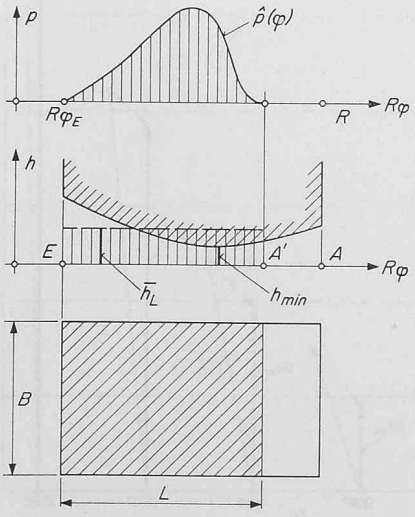


Bild 5. Figur zur Definition der mittleren Spalthöhe des druckbeaufschlagten Spaltteils (L = Länge der Druckzone)

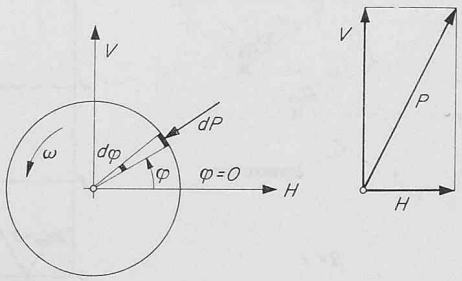


Bild 6. Vom Schmiermittel auf die Welle ausgeübte Druckkraft

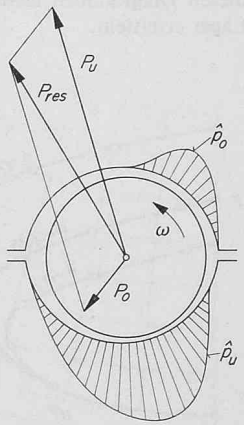


Bild 7. Segmenteinzelkräfte und Resultierende beim Zitronenspiellager

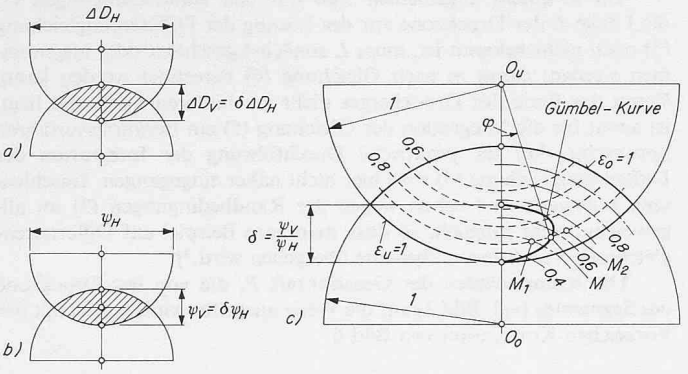


Bild 8. Bewegungsbereich des Wellenzentrums mit Gümbel-Kurve
a) Darstellung mit Durchmesserspielen ΔD_H und ΔD_V
b) dimensionslose Darstellung mit Auftragung der relativen Spiele ψ_H und ψ_V
c) dimensionslose Darstellung mit auf ΔR_H bezogenen Längen

vertikal liegt, kommen als Betriebspunkte nur solche Lagen des Wellenzentrums in Frage, die eine vertikale, nach oben gerichtete Resultierende P_{res} liefern. Den geometrischen Ort aller Wellenlagen, die eine vertikale Lagerkraft ergeben, bezeichnet man als *Gümbel-Kurve*. Bild 8 zeigt schematisch den Bewegungsbereich der Welle mit der Gümbel-Kurve. Ausserdem sind die Kreise konstanter relativer Exzentrizitäten ε_u und ε_o für die Unter- und Oberschale eingezeichnet.

Die Gümbel-Kurven werden zum Beispiel so ermittelt, dass für eine gewählte relative Exzentrizität ε_u (beispielsweise $\varepsilon_u = 0{,}9$) die Wellenlage systematisch variiert wird (Lagen M_1, M_2...auf Bild 8), bis man den gesuchten Punkt M auf ε_u gefunden hat, der eine vertikale Lagerkraft liefert. Es zeigt sich, dass die Wellenlage auf der Gümbel-Kurve wie bei allen Lagern nur von der resultierenden Sommerfeldzahl

$$So_{res} \equiv \frac{P_{res}}{BD}\,\frac{\psi_H^2}{\eta\omega} \equiv \frac{p_{res}\; m\; \psi_H^2}{\eta\omega} \qquad (10)$$

abhängt.

Auf Bild 9 sind die Gümbelkurven von Lagern mit $\beta = 1$ und den Spielverhältnissen $\delta = 1/3$, $\delta = 1/4$ und $\delta = 1/5$ dargestellt. Die den Kurvenpunkten zugeordneten Sommerfeldzahlen für die Gesamtbelastung nach Gleichung (10) sind Bild 12 zu entnehmen.

Bild 10 zeigt für $\delta = 1/4$ den Einfluss der relativen Lagerbreite β. Die Kurven liegen nahe beieinander, und es kann in erster Näherung mit einer einzigen, mittleren Kurve gerechnet werden. Die bei einer bestimmten Wellenlage erreichten Sommerfeldzahlen sind hingegen nach Bild 13 stark von der relativen Breite β abhängig. Dies bedeutet, dass eine Änderung der Lagerbreite vor allem im mittleren Bereich der Gümbel-Kurve wesentliche Verschiebungen der Wellenlage bewirkt.

Bild 11 zeigt für den Fall $\beta = 1$ und $\delta = 1/4$ die Vektordiagramme bei verschiedenen *So*-Zahlen.

Die Bilder 12 und 13 zeigen den Zusammenhang zwischen relativer Exzentrizität in der Unterschale und der Sommerfeldzahl. Mit diesen Diagrammen lassen sich somit die minimalen Spalthöhen im Lager ermitteln.

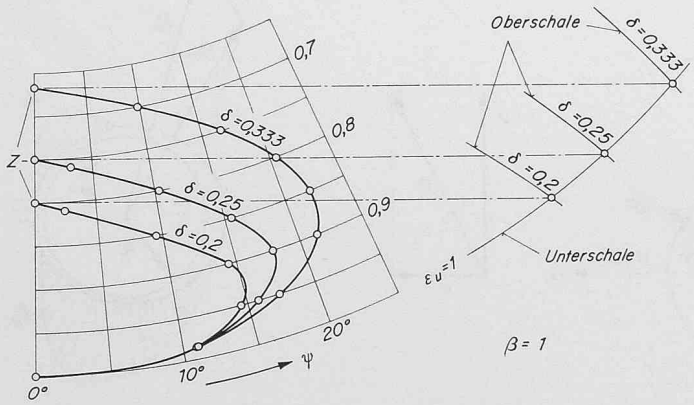


Bild 9. Berechnete Wellenlagen in Zitronenspiellagern mit verschiedenen δ-Werten bei konstanter relativer Breite β

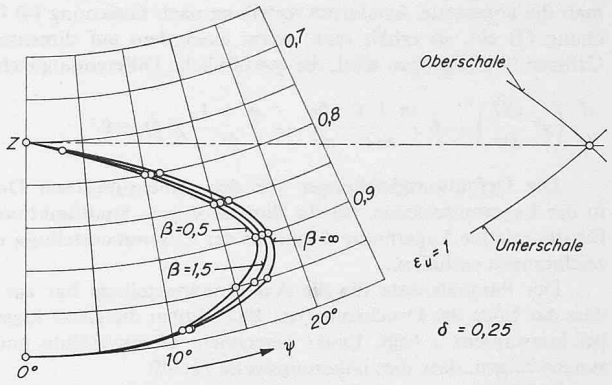


Bild 10. Berechnete Wellenlagen in Zitronenspiellagern mit verschiedenen relativen Breiten β und festem Spielverhältnis $\delta = 0{,}25$

5. Reibung

Die Reibung eines Gleitlagers wird durch die Reibungszahl angegeben, die als Verhältnis der totalen Reibungskraft amWellenumfang und der Gesamttragkraft P_{res} definiert ist.

$$\mu = \frac{S_{res}}{P_{res}} \qquad (11)$$

S_{res} ist somit die Summe der Reibungskräfte, die in der Ober- und Unterschale wirken.

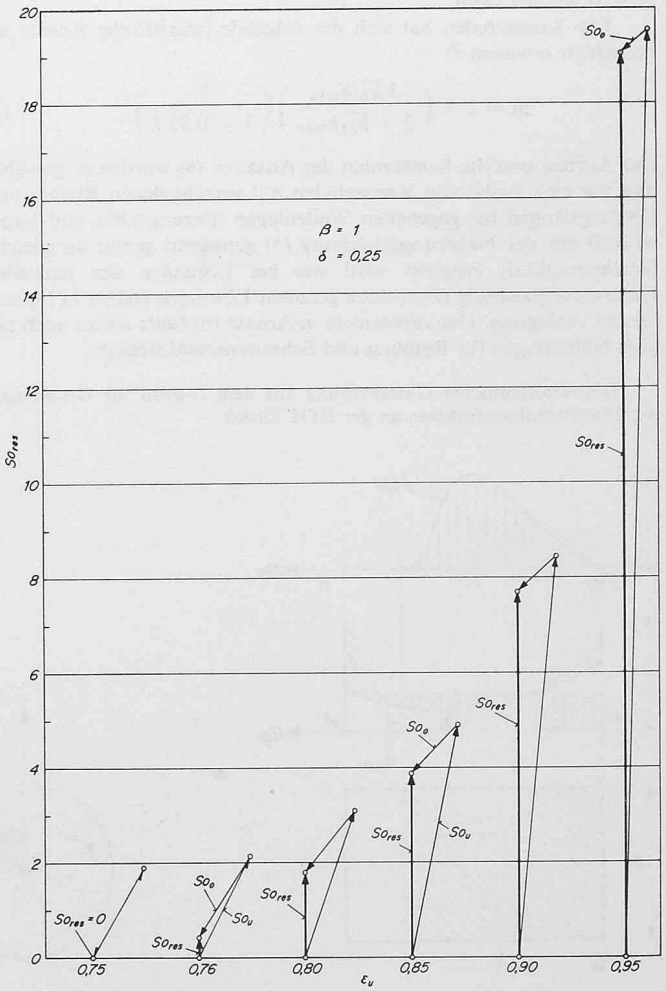


Bild 11. Kräftediagramm für ein Zitronenspiellager mit $\beta = 1$ und $\delta = 0{,}25$ bei verschiedenen *So*-Zahlen

Bild 12. Berechnete Sommerfeldzahlen von Zitronenspiellagern mit verschiedenen δ-Werten bei konstanter relativer Breite β

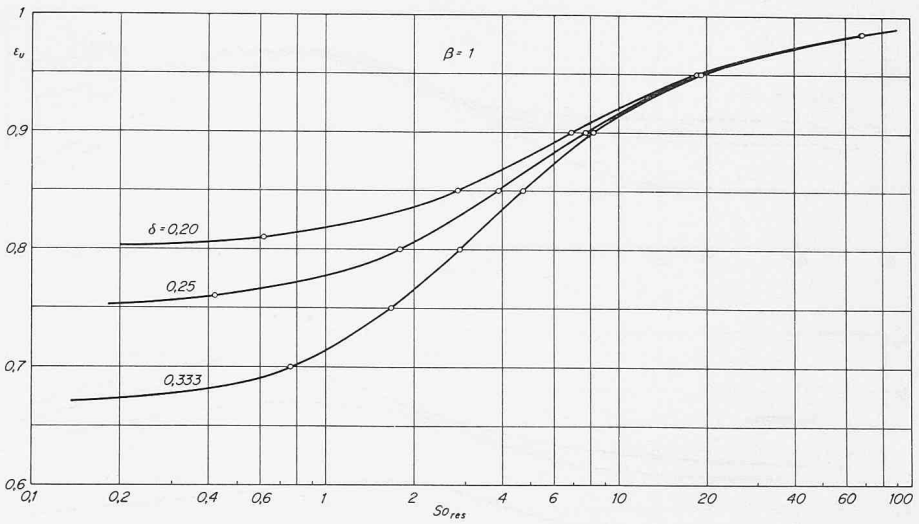
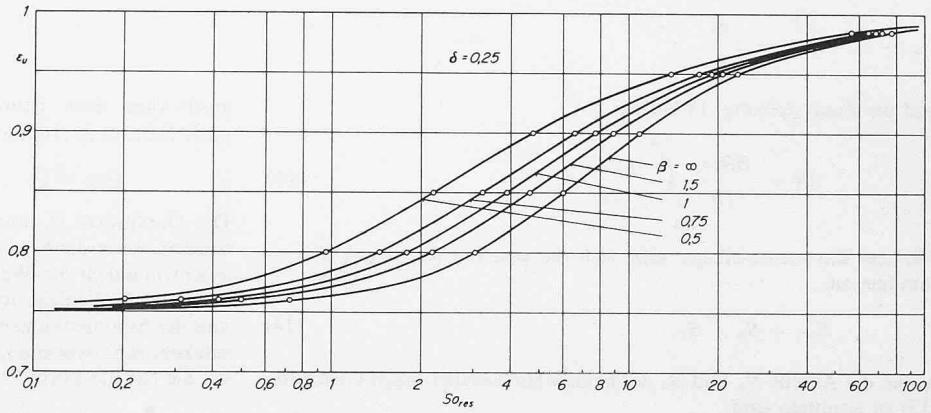


Bild 13. Berechnete Sommerfeldzahlen von Zitronenspiellagern mit relativen Breiten β und festem Spielverhältnis $\delta = 0{,}25$



Die Reibungskraft S für einen einzelnen Schmierspalt berechnet sich in bekannter Weise nach der Gleichung

$$S = -\left[\int_{\varphi_E}^{\varphi_{A'}+\frac{B}{2}} \int_{-\frac{B}{2}} \left(\frac{1}{2}\frac{dp}{d\varphi}\chi\psi_H + \frac{\eta\omega}{\chi\psi_H}\right) R\, dz\, d\varphi + \Delta S\right] \qquad (12)$$

Durch das negative Vorzeichen vor der ganzen Klammer wird ausgedrückt, dass die Reibungskraft der Wellendrehung entgegenwirkt. Für die Integrationsgrenzen ist Bild 3 massgebend. ΔS ist die Reibungskraft, die im Bereich A' bis A wirkt. In diesem Gebiet herrscht der Überdruck Null und der Spalt ist nur teilweise mit Öl gefüllt. Der Ölfilm löst sich hier in Strähnen auf. Bei Annahme einer linearen Geschwindigkeitsverteilung über der Spalthöhe und unter Einhaltung der Kontinuitätsgleichung ist die Breite der Strähnen an der Stelle φ insgesamt

$$B'(\varphi) = B\,\frac{\chi_{A'}}{\chi(\varphi)}$$

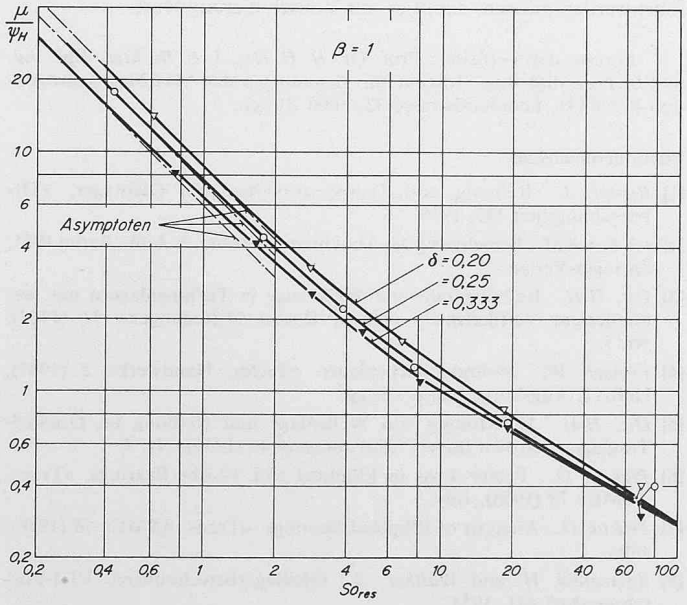


Bild 14. Berechnete, auf ψ_H bezogene Reibungszahlen von Zitronenspiellagern mit verschiedenen δ-Werten bei konstanter relativer Breite β

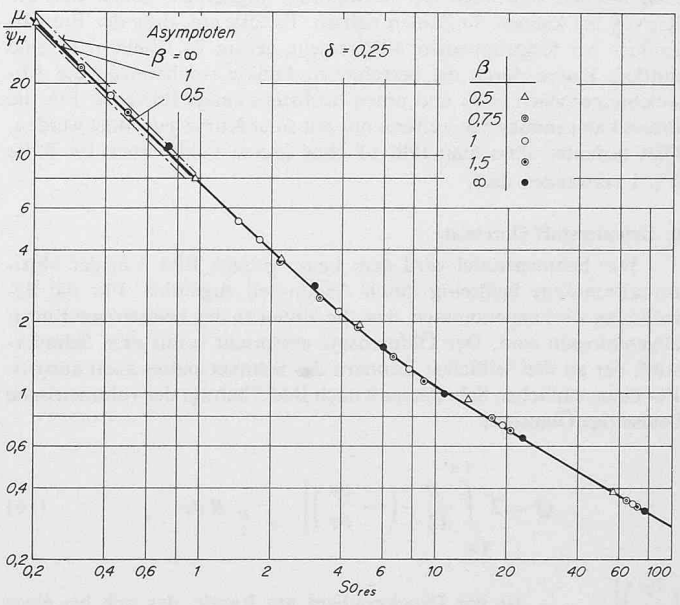


Bild 15. Berechnete, auf ψ_H bezogene Reibungszahlen von Zitronenspiellagern mit relativen Breiten β und festem Spielverhältnis $\delta = 0{,}25$

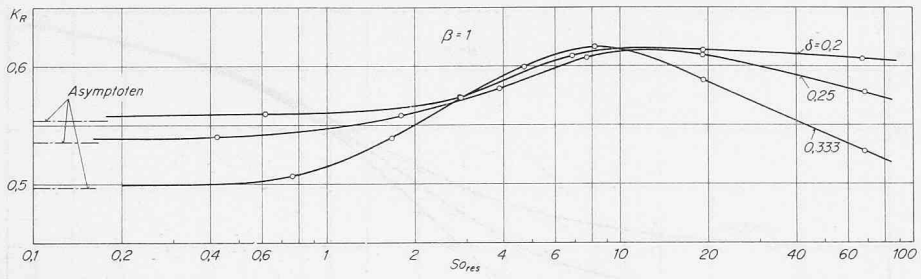


Bild 16. Berechneter dimensionsloser Schmierstoffdurchsatz von Zitronenspiellagern mit verschiedenen δ-Werten bei konstanter relativer Breite β

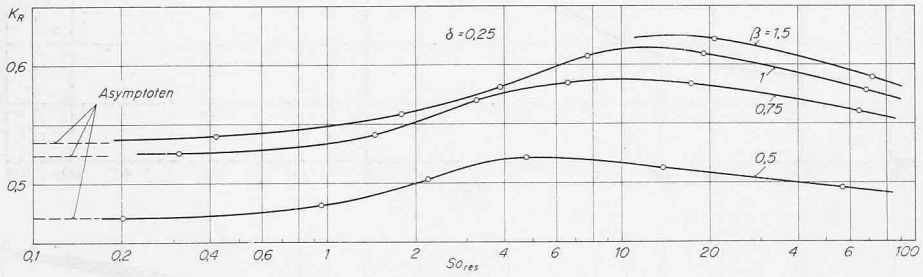


Bild 17. Berechneter dimensionsloser Schmierstoffdurchsatz von Zitronenspiellagern mit relatigen Breiten β und festem Spielverhältnis $\delta = 0,25$

und die Zusatzreibung ΔS beträgt

$$\Delta S = \frac{BR\omega\eta}{\psi_H} \int_{\varphi_{A'}}^{\varphi_A} \frac{\chi_A'}{\chi(\varphi)^2} \, d\varphi \tag{13}$$

Für das Zitronenspiellager setzt sich die gesamte Reibungskraft zusammen aus

$$S_{res} = S_u + S_o \tag{14}$$

wobei die Anteile S_u und S_o der beiden Halbschalen nach Gleichung (12) zu ermitteln sind.

Rechnet man die Gesamt-Reibungszahl nach Gleichung (11) aus, so zeigt es sich, dass das Reibungsverhalten des Lagers in der Form

$$\frac{\mu}{\psi_H} = f(So_{res}) \tag{15}$$

dargestellt werden kann. Dies bedeutet, dass die durch ψ_H dividierte Reibungszahl nur von der Sommerfeldzahl abhängt.

Die Ergebnisse der Reibungsrechnung sind in den Bildern 14 und 15 wiedergegeben. Bild 14 zeigt die bezogene Reibungszahl für $\beta = 1$ bei verschiedenen Spielverhältnissen und Bild 15 den Einfluss der Lagerbreiten bei einem festen Spielverhältnis $\delta = {}^1/_4$. In beiden Diagrammen sind auch die Asymptoten angegeben, denen sich die Kurven bei kleinen *So*-Zahlen nähern. Es fällt auf, dass der Breiteneinfluss bei festgehaltenem δ-Wert sehr gering ist. Zieht man eine mittlere Kurve durch die berechneten Punkte, so betragen die Abweichungen nach oben und unten höchstens einige Prozente. Für die Praxis kann somit ohne weiteres nur mit einer Kurve gerechnet werden. Dies bedeutet, dass man Bild 14 ohne grosse Fehler auch für Fälle $\beta \gtrless 1$ verwenden darf.

6. Schmierstoff-Durchsatz

Das Schmiermittel wird dem Lager gemäss Bild 2 in der Horizontaltrennfuge beidseitig durch Axialnuten zugeführt. Für die Berechnung wird angenommen, dass die Nuten an den beidseitigen Enden abgeschlossen sind. Der Öldurchsatz entspricht somit dem Schmierstoff, der an den seitlichen Rändern des Schmierspaltes axial austritt. Für einen einfachen Schmierspalt nach Bild 3 beträgt der volumetrische beidseitige Ölaustritt

$$Q = 2 \int_{\varphi_E}^{\varphi_{A'}} \frac{h^3}{12\,\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \Bigg|_{z = \frac{B}{2}} R \, d\varphi \tag{16}$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \Big|_{z = \frac{B}{2}}$ ist der Druckgradient am Rande, der sich bei einer Axialdruckverteilung nach Gleichung 4 und Bild 4 durch $\hat{p}$ und m ausdrücken lässt. Beim Zitronenspiellager ist Q für beide Schalen nach Gleichung (16) zu berechnen und zu summieren:

$$Q_{tot} = Q_o + Q_u \tag{17}$$

Die Durchsätze Q_o und Q_u können nach Gleichung (16) berechnet werden, wenn die Spaltform, die Schmierstoffzähigkeit und die Gleitgeschwindigkeit der Welle gegeben sind. Da auch beim Zitronenspiellager die Wellenlage und damit die Spaltform im wesentlichen nur von der Sommerfeldzahl abhängen, muss eine dimensionslose Durchsatzkennzahl existieren, die eine reine Funktion der Sommerfeldzahl ist. Sie hat die Form

$$K_R = \frac{Q_{tot}}{\psi_H \, R^3 \omega} \tag{18}$$

und es gilt der Zusammenhang

$$K_R = f(So_{res}) \tag{19}$$

wobei die Sommerfeldzahl nach Gleichung (10) zu rechnen ist. Durch den Index R soll bei K_R angedeutet werden, dass diese Grösse den am Rand austretenden Schmierstoff erfasst.

Die Bilder 16 und 17 zeigen die Durchsatz-Kennzahl für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Lager. Die K_R-Werte liegen im Bereich von 0,5 bis 0,6. Für grobe Rechnung kann mit 0,6 als Anhaltswert gerechnet werden. Die den theoretischen K_R-Werten entsprechenden Schmierstoffmengen sind die Minimalmengen, die dem Lager zugeführt werden müssen, damit es mit Vollschmierung läuft.

Adresse der Verfasser: Prof. Dr. *H. H. Ott*, *J.-E. Buchter*, dipl. Ing. und *U. Frey*, dipl. Ing., Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion der ETH, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich.

Literaturverzeichnis

[1] *Rumpf, A.:* Reibung und Temperaturverlauf im Gleitlager. VDI-Forschungsheft 393, 1938.

[2] *ten Bosch M.:* Berechnung der Maschinenelemente, 3. Aufl., Berlin 1951, Springer-Verlag.

[3] *Ott, H.H.:* Reibungszahl und Wellenlage in Turbinenlagern mit vermindertem Vertikalspiel. «Brown Boveri Mitteilungen» *41* (1954), Nr. 7.

[4] *Frössel, W.:* Mehrgleitflächenlager. «Techn. Handwerk» *2* (1947), Heft 11, Augsburg, Manu-Verlag.

[5] *Ott, H.H.:* Berechnung von Wellenlage und Reibung im Dreikeil-Traglager. «Brown Boveri Mitteilungen» *46* (1959), Nr. 7.

[6] *Pinkus, O.:* Power Loss in Elliptical and 3-Lobe Bearings. «Trans. ASME» *78* (1956), July.

[7] *Pinkus, O.:* Analysis of Elliptical Bearings. «Trans. ASME» *78* (1956), July.

[8] *Sassenfeld, H.* und *Walther, A.:* Gleitlagerberechnungen. VDI-Forschungsheft 441, 1954.

[9] *Hakansson, B.:* The Journal Bearing Considering Variable Viscosity. Trans. of Chalmers Univ. of Technology, Gothenburg, 1965.