Abbildungsgeometrische Bestimmung der Bahnelemente von Doppelsternen aus der scheinbaren Bahn (1)

Autor(en): **Blatter, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **43 (1985)**

Heft 210

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-899208

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Abbildungsgeometrische Bestimmung der Bahnelemente von Doppelsternen aus der scheinbaren Bahn (1)

Dr. Heinz Blatter

Analytische Rechenmethoden haben in den Naturwissenschaften weitgehend die geometrischen Methoden abgelöst. Für ein besseres Verständnis der Resultate in vielen Gebieten, zum Beispiel in der Kristallographie, der Geodäsie und insbesondere in der Astronomie, bleibt aber die Geometrie ein unentbehrliches Hilfsmittel. Für Laien ist sie oft der einzige Zugang zu physikalischen und astronomischen Vorgängen.

In diesem Zusammenhang kann die Darstellende Geometrie (DG) an den Mittelschulen eine wichtige Rolle übernehmen. Um aber die räumliche Geometrie lebendig gestalten zu können, sind verständliche und interessante Anwendungsbeispiele aus andern Disziplinen nützlich. Die Astronomie bietet mit den Bewegungen der Planeten oder von Doppelsternen einige hübsche Aufgaben, die in der Reichweite der Geometrie und DG an Kantonsschulen liegen.

In drei Aufsätzen sollen dazu Konstruktionen für die Bestimmung von Doppelsternbahnen beschrieben werden:

1. Die Bestimmung der Bahnelemente aus der scheinbaren Bahn durch Affinität (Umklappung)
2. Die Bestimmung der Bahnelemente mit einer einfachen Konstruktion nach Mlodziewsky (1890)
3. Die Bestimmung der scheinbaren Bahnellipse aus fünf Positionen mit Hilfe der Zentralkollineation.

Die Beispiele 1 und 2 benötigen neben den Grundlagen der DG noch die Abbildungsgeometrie und die Geometrie von Kreis und Ellipse und das Beispiel 3 zusätzlich noch die Zentralkollineation. Aus der Physik sollten die Schüler mit Vorteil mindestens die Kenntnis der drei Keplergesetze mitbringen.

Die Aufgaben können gut bei einer allfälligen Repetition des DG-Stoffes vor der Maturitätsprüfung verwendet werden, da alle wesentlichen Elemente der Abbildungsgeometrie und die Grundkonstruktionen der DG darin vorkommen. Es lohnt sich vielleicht, pro Aufgabe etwa eine Doppelstunde für die Einführung in das Problem mit Erläuterungen zur Lösungsidee zu verwenden. Die Ausführung sollte den Schülern als Übung möglichst selber überlassen werden. Vor allem bei der 3. Aufgabe empfiehlt es sich, auf grossen Blättern (mindestens A3) zu zeichnen und eine geeignete Disposition vorzugeben.

Da die Beispiele eine ganze Palette von Lehrsätzen und Konstruktionen benötigen, sind die Lösungen nicht einfach, können aber für gute Schüler eine interessante Herausforderung bedeuten. Ich hoffe, diese Ideen können auch als Beispiele dienen, wie die oft etwas starren und künstlichen Grenzen zwischen einzelnen Fächern etwas gelockert werden könnten. Eine Absprache zwischen verschiedenen betroffenen Fachlehrern (hier ev. Physik, Geographie und Mathematik, DG) mag nützlich sein und kann den Schülern Querverbindungen zwischen verschiedenen Stoffgebieten demonstrieren.

In einem Anhang zum ersten Aufsatz sind die wichtigsten geometrischen Grundlagen für die Konstruktionen sehr knapp zusammengefasst. Für ein genaueres Studium sind im Literaturverzeichnis geeignete Lehrbücher (Flückiger, 1971) angegeben.

1. Einführung

Im Jahre 1803 veröffentlichte Wilhelm Herschel seine Arbeit «Account of the Changes that have happened, during the last 25 Years, in the relative situation of double Stars, with an Investigation of the Cause to which they are owing» in den «Philosophical Transactions». Damit wies er nach, dass viele scheinbare Doppelsterne echte Doppelsternsysteme sind. Viele Messungen der relativen Lagen der Sterne zueinander über einen genügend grossen Teil ihrer Umlaufszeit ermöglichen eine Bestimmung der scheinbaren relativen Bahn des einen Sternes um den andern.

Die Positionen des schwächeren Sternes B werden in Polarkoordinaten, wie in der Abb. 1 gezeigt, angegeben. Der hellere Stern S wird dabei im Nullpunkt der Koordinaten fixiert. Der Positionswinkel ϑ des Begleiters zu einem bestimmten Zeitpunkt wird in Winkelgraden im Gegenuhrsinn von der Richtung Nord her gemessen und der scheinbare Abstand ρ in Bogensekunden. Methoden der Berechnung der scheinbaren Bahnellipse aus relativen Positionsmessungen sind in der Fachliteratur (Bauschinger, 1928, oder Heintz, 1971) zu finden und sollen hier nicht beschrieben werden.

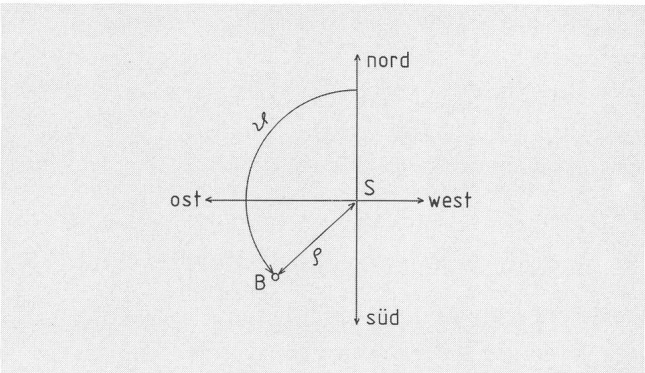


Abb. 1: Positionswinkel ϑ und Abstand ρ des schwächeren Sternes B relativ zum helleren Stern S.

Zur Illustration der Bahnelemente, die für eine vollständige Beschreibung einer Doppelsternbahn genügen, seien hier zwei berühmte Beispiele gewählt: α-Centauri und α-Canis Majoris. Die Angaben in der Tab. 1 beziehen sich alle auf die wahre relative Bahn.

	α-Centauri	α-Canis Majoris
Rektaszension (1950.0)	$14^h36.2^m$	$6^h42.9^m$
Deklination (1950.0)	-60°38′	-16°39′
Bahnelement		
Grosse Halbachse a	17.583″	7.500″
Exzentrizität e	0.516	0.592
Inklination i	79.24°	136.53°
Position des aufsteigenden Knotens Ω	24.87°	44.57°
Argument des Periastrons ω	51.56°	147.27°
Umlaufszeit P	79.92 J	50.09 J
Periastrondurchgang T	1955.56	1894.13

Tab. 1: Bahnelemente der Doppelsterne α-Centauri und α-Canis Majoris.

Die Abb. 2 illustriert die geometrischen Bahnelemente eines Doppelsternes. Die scheinbare Bahn ist eine Normalprojektion (Normalriss) der wahren Bahn auf eine Ebene senkrecht zu unserer Blickrichtung (Rissebene). Die wahre Bahn liegt im allgemeinen in einer zur Blickrichtung schiefen Ebene.

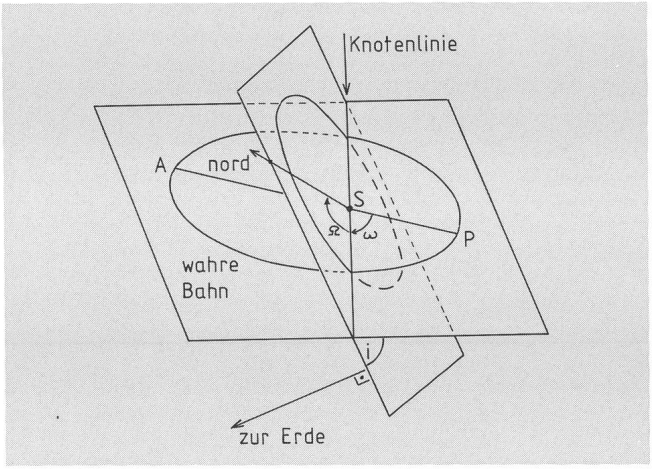


Abb. 2: Wahre und scheinbare Bahn eines Doppelsternes

2. Beziehungen zwischen der scheinbaren und der wahren Bahn

Die scheinbare Bahn ist eine Ellipse und der Hauptstern, der als ruhend angenommen wird, liegt in einem Punkt S′ im Innern der Ellipse (Abb. 3). Die Ellipse kann zum Beispiel durch ihre Hauptachsen X′Y′ und U′V′ angegeben werden.

Aus der Physik wissen wir, dass der Hauptstern in einem der Brennpunkte der wahren Bahnellipse steht. Diese Bedingung und der bekannte Normalriss (scheinbare Bahn) der Ellipse bestimmen die Bahn bis auf zwei mögliche Lagen. Der aufsteigende und der absteigende Knoten der Bahn müssen durch Messungen der radialen Geschwindigkeiten der Sterne unterschieden werden. Die Bestimmung der restlichen geometrischen Bahnelemente ist mit einer einfachen geometrischen Konstruktion möglich.

Durch eine Umklappung der Bahnebene (Drehen der Bahnebene um die Knotenlinie, bis sie mit der Rissebene zusammenfällt) kann die wahre Form und Grösse der Bahn konstruiert werden. Die Abbildung, die den Normalriss einer Figur in ihre Umklappung überführt, ist eine Normalaffinität. Die Knotenlinie wird jetzt zur Affinitätsachse und der

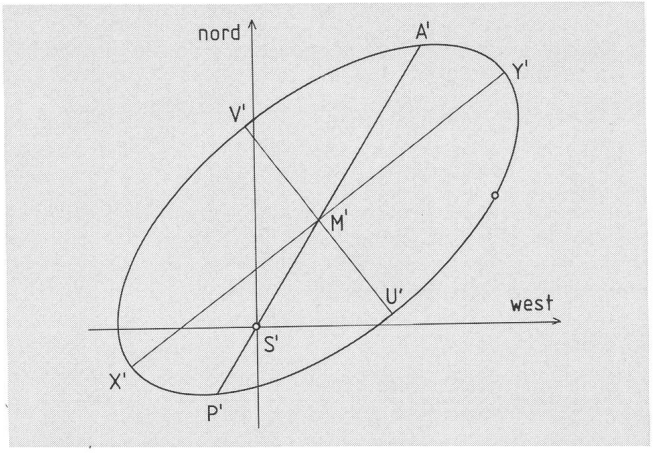


Abb. 3: Beispiel für eine scheinbare relative Bahn eines Doppelsternes

Cosinus der Inklination, des Winkels zwischen der Bahnebene und der Rissebene, ist das Affinitätsverhältnis.

Das Problem besteht jetzt darin, die Richtung der Affinitätsachse und das Affinitätsverhältnis zu finden. Im folgenden werden die Bezeichnungen so gewählt, dass verschiedenartige Bilder der Bahn unterschieden werden können. Punkte der scheinbaren Bahn werden gestrichen (A′) bezeichnet, Punkte der wahren Bahn ohne weitere Bezeichnung (A) und Punkte in Zeichnungen, die zur wahren Bahn ähnlich sind, mit Kreuz (A^+).

3. Bestimmung der Bahnelemente

a) Numerische Exzentrizität:

Der Durchmesser der scheinbaren Bahnellipse mit dem Hauptstern S′ darauf ist das scheinbare Bild der grossen Achse der wahren Bahn. Da die Affinität teilverhältnistreu ist, ist das Verhältnis M′S′ : M′P′ = MS : MP = e die numerische Exzentrizität der wahren Bahn. Damit ist die wahre Bahn bis auf ihre Grösse und ihre Lage im Raum bereits bekannt (Abb. 5).

Das scheinbare Bild der kleinen Achse der wahren Bahn ist der zum Durchmesser A′P′ konjugierte Durchmesser der relativen Bahn. Dieser Durchmesser kann leicht konstruiert werden. Der Kreis über der grossen Achse A′P′ der schein-

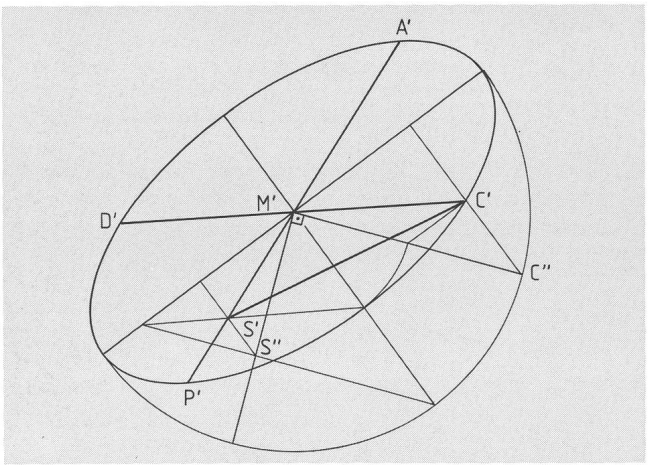


Abb. 4: Konstruktion des zu A′P′ konjugierten Durchmessers C′D′

baren Bahn ist normalaffin zur scheinbaren Bahn und die konjugierten Durchmesser werden auf orthogonale Durchmesser des Kreises abgebildet (Abb. 4).

b) Inklination und Knotenlinie:
Das scheinbare Bild irgendeines Kreises, der in der wahren Bahnebene liegt, ist eine Ellipse. Da die Projektion alle Strecken verkleinert und nur die Hauptgeraden (zur Rissebene parallele Geraden in der Bahnebene) in ihrer Länge belässt, ist die grosse Achse der Bildellipse des Kreises eine Hauptgerade und damit parallel zur Knotenlinie. Das Verhältnis der kleinen Achse zur grossen Achse b:a dieser Bildellipse ist dann aber das Affinitätsverhältnis und ist gleich dem Cosinus der Inklination. Die Inklination i selbst kann mit einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge a und die Ankathete des Winkels i die Länge b hat, gezeichnet werden. Das Problem ist jetzt, einen solchen Hilfskreis zu finden, von dem man die Achsen der Bildellipse konstruieren kann. Es genügt, wenn im Kreis ein orthogonales Durchmesserpaar abbildbar ist. Die Bilder der Durchmesser sind dann konjugierte Durchmesser der Hilfsellipse, aus denen die Achsen mit Hilfe der Rytz'schen Hauptachsenkonstruktion bestimmt werden können. Kreise, die für diese Konstruktion geeignet sind, sind die Umkreise von Dreiecken, die durch irgend drei bekannte Punkte der wahren Bahnellipse definiert sind. Am einfachsten wird die Konstruktion, wenn als Hilfskreis der Kreis über der grossen Achse der wahren Bahn gewählt wird (Abb. 5).

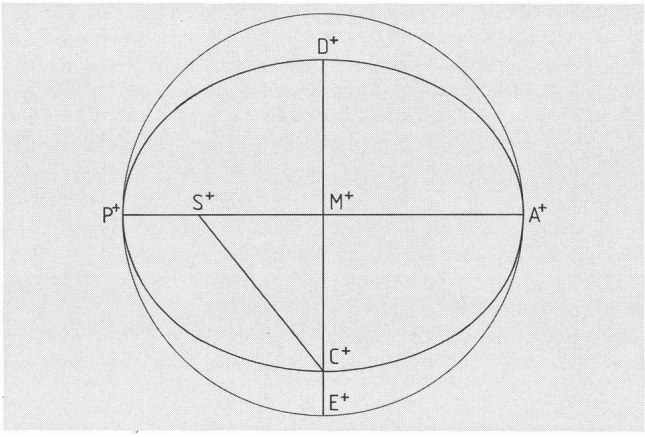


Abb. 5: Eine zur wahren Bahn ähnliche Ellipse mit dem Kreis über ihrer grossen Achse

Diser Kreis kann als normalaffines Bild der Bahn aufgefasst werden. Der Riss E′ des Schnittpunktes E der verlängerten kleinen Achse der Bahnellipse mit dem Hilfskreis kann bestimmt werden, da das Teilverhältnis MC : ME erhalten bleibt ($M^+C^+ : M^+E^+ = M'C' : M'E'$). M′P′ und M′E′ sind nun konjugierte Halbmesser (halbe Durchmesser) der Hilfsellipse. Nun müssen noch die Achsen konstruiert werden und damit sind die Inklination und die Knotenlinie bestimmt. Die Position des aufsteigenden Knotens ist noch nicht bestimmbar ohne Messung der Radialgeschwindigkeiten der Sterne. Falls keine Messung vorliegt, wird der Knoten mit dem kleinern Positionswinkel als Referenzpunkt gewählt (Abb. 6).

c) Grosse Achse und Periastrondurchgang:
Um die grosse Achse und das Argument des Periastrons ω zu finden, muss nun die scheinbare Bahn mit der gefundenen Affinität abgebildet werden (Abb. 7). Dazu kann mit Vorteil

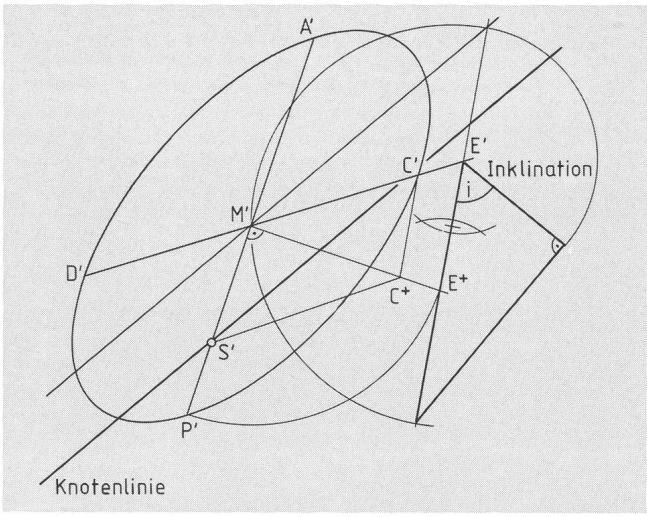


Abb. 6: Konstruktion der Knotenlinie als Parallele zur grossen Achse des scheinbaren Bildes des Kreises über der grossen Achse der wahren Bahnellipse

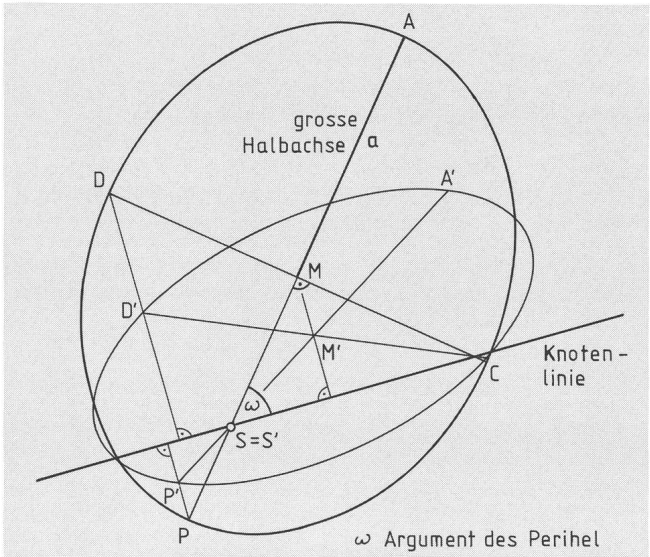


Abb. 7: Konstruktion der wahren Bahnellipse durch Umklappen um die Knotenlinie

die Knotenlinie selber als Affinitätsachse verwendet werden. Der Winkel zwischen den beiden Achsen der wahren Bahnellipse muss ein rechter Winkel werden. Das ermöglicht, die Genauigkeit der Konstruktion zu testen.

Anhang:
Für die Lösung des Bahnproblems wurde elementare Abbildungsgeometrie und Darstellende Geometrie verwendet, die ein Mittelschüler des Typus C etwa 2 Jahre vor der Maturität kennt. Für Leser ohne diese Vorkenntnisse sollen hier die geometrischen Grundlagen erklärt werden, die bei der Lösung des Problemes verwendet werden. Die Definitionen und Lehrsätze werden sehr knapp behandelt und oft nur die spezielle Variante, die hier benützt wurde. Für vertiefende Studien sind in einem Literaturverzeichnis geeignete Bücher angegeben. Eine ausführliche Darstellung der Ellipse als affines Bild des Kreises ist in FLÜCKIGER (1971) im Kapitel «Bild des Kreises» gegeben. Eine physikalische Behandlung astronomi-

scher Bahnen mit einfachen mathematischen Mitteln ist in BLATTER (1983) gegeben. Die Broschüre ist beim Sekretariat der Kantonsschule Zofingen erhältlich.

1. Ähnlichkeit:
Definition: Zwei Figuren heissen ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung und Bewegungen (Drehung und Verschiebung) aufeinander abgebildet werden können.

Definition: Die zentrische Streckung ist eine Abbildung der Ebene auf sich. Die Abbildung ist bestimmt durch das Streckungszentrum Z (Fixpunkt der Abbildung) und das Streckungsverhältnis $f = ZA^+ : ZA$ (Abb. 8). Das Zentrum, ein Punkt A und sein Bild A^+ liegen auf einer Geraden.

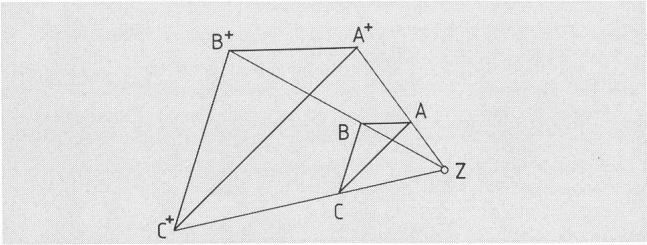


Abb. 8: Zentrische Streckung des Dreieckes ABC

Die zentrische Streckung ist geradentreu, winkeltreu, teilverhältnistreu, verhältnistreu, parallelentreu und kreistreu. Die Beweise seien dem Leser als Übung empfohlen.

2. Perspektive Affinität:
Definition: Eine perspektive Affinität ist eine Abbildung der Ebene auf sich. Die Abbildung ist durch folgende Angaben bestimmt (Abb. 9):

- Die Affinitätsachse a (Fixpunktgerade)
- Die Affinitätsrichtung (Die Gerade durch einen Punkt A und seinen Bildpunkt A′ ist parallel zu einer gegebenen Richtung)
- Das Affinitätsverhältnis $f = d' : d$ (Der Abstand d eines Punktes A und der Abstand d′ seines Bildes A′ zur Affinitätsachse verhalten sich zueinander wie das Affinitätsverhältnis).

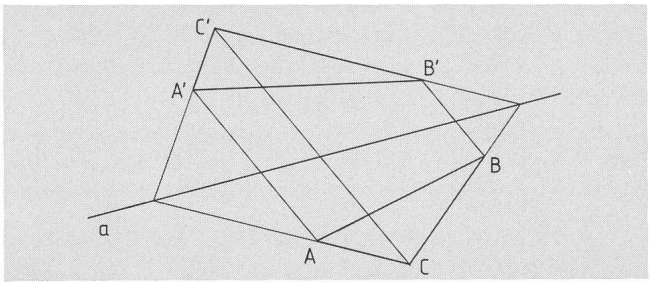


Abb. 9: Definition der perspektiven Affinität

Die perspektive Affinität ist geradentreu, teilverhältnistreu, parallelentreu, nicht winkeltreu, nicht verhältnistreu und nicht längentreu.

Eine perspektive Affinität, bei der die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsachse steht, heisst Normalaffinität.

3. Ellipsen:
Definition: Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve, bei der die Summe der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten (Brennpunkte B_1 und B_2) gleich ist (Abb. 10).

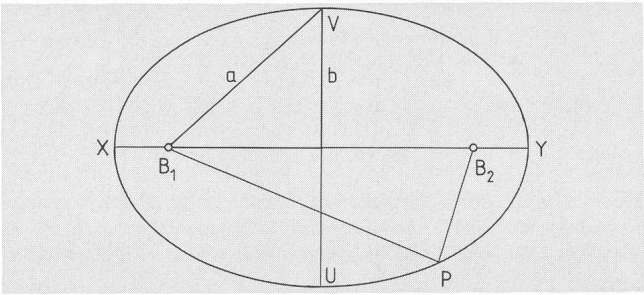


Abb. 10: Ellipse mit den Achsen XY und UV

Es gelten folgende Aussagen:
- Die Ellipse hat zwei Symmetrieachsen (die grosse Achse durch die Brennpunkte, die kleine Achse steht senkrecht zur grossen Achse durch den Mittelpunkt der Ellipse)
- $B_1P + B_2P = 2a$ für alle Punkte P der Ellipse. Die Länge der grossen Achse ist 2a.
- Die Ellipse ist das normalaffine Bild des Kreises über ihrer grossen Achse, die zugleich die Affinitätsachse ist. Das Affinitätsverhältnis ist b:a (b ist die Länge der halben kleinen Achse).

Definition: Zwei Durchmesser einer Ellipse heissen konjugiert, wenn sie das Bild eines orthogonalen Durchmesserpaares (aufeinander senkrecht stehende Durchmesser) eines zur Ellipse affinen Kreises sind. Die Achsen sind konjugierte Durchmesser.

Eine Ellipse ist durch ein konjugiertes Durchmesserpaar eindeutig bestimmt. Die Achsen einer so gegebenen Ellipse sind mit Hilfe der Rytz'schen Hauptachsenkonstruktion bestimmbar (Abb. 11). Der Beweis der Konstruktion ist eine hübsche Übung zum Einstimmen in das Problem der Doppelsternbahnen.

Die Rytz'sche Hauptachsenkonstruktion:
Gegeben seien die konjugierten Durchmesser Q_1Q und P_1P einer Ellipse, gesucht ihre Achsen.
Lösungsweg:
- Q_0 mit MQ_0 senkrecht zu MQ_1 und $MQ_0 = MQ_1$
- H: Mitte zwischen P und Q_0
- Kreis k mit Mittelpunkt H und Radius HM
- Schnitte R und S von k mit der Geraden PQ_0

Die grosse Achse liegt auf MS und die kleine Achse auf MR. Die Länge der grossen Halbachse ist $a = SQ_0 = RP$ und die Länge der kleinen Achse ist $b = SP = RQ_0$.

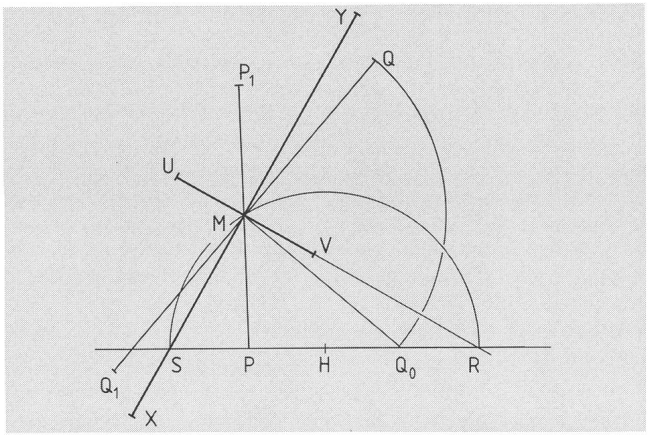


Abb. 11: Die Rytzsche Hauptachsenkonstruktion

Literatur:
BAUSCHINGER, J. 1928. Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, 2. Auflage. Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 671 s.
BLATTER, H. 1983. Astronomische Bahnen. Schriftenreihe der Kantonsschule Zofingen, Aargauische Kantonsschule, 42 s.
FLÜCKIGER, H. 1970. Darstellende Geometrie, Leitfaden. Unterrichtswerk des Vereines Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer, Zürich, Orell Füssli Verlag, 216 s.
HEINTZ, W. D. 1971. Doppelsterne. München, Wilhelm Goldmann Verlag, 186 s.
MEEUS, J. 1971. Some Bright Visual Binary Stars - 1. Sky and Telescope, January 1971, s. 21–25.
MEEUS, J. 1971. Some Bright Visual Binary Stars - 2. Sky and Telescope, February 1971, s. 88–92.
WUNDERLICH, W. 1966. Darstellende Geometrie 1. Mannheim, Bibliographisches Institut, B.I.-Wissenschaftsverlag, 187 s.

Adresse des Autors:
Dr. Heinz Blatter, Luzernerstrasse 13, 4800 Zofingen.

Buchbesprechung

MOORE, PATRICK HUNT, GARRY NICOLSON, IAIN und CATTERMOLE, PETER: *Atlas des Sonnensystems*, aus dem Englischen von Dr. A. BRUZEK. 1985. Verlag Herder Freiburg, Basel, Wien, veröffentlicht in Zusammenarbeit mit der Royal Astronomical Society. 462 Seiten, 210 x 279, gebunden, DM 128.— (Einführungspreis bis 31.12.1985, später ca. DM 158.—). ISBN 3-451-19613-1.

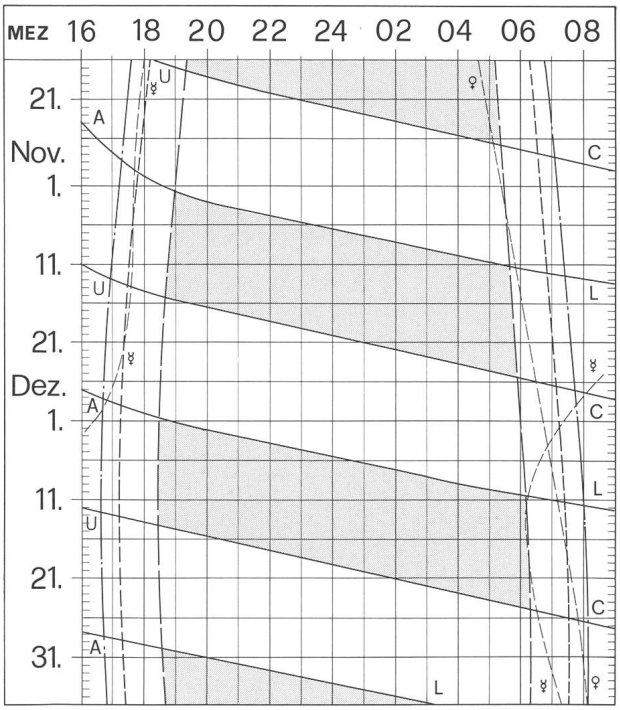
Das Zeitalter der Weltraumforschung begann 1957 mit Sputnik 1, zwei Jahre später wurde die erste Sonde, Lunik 1, zum Mond geschickt, 1965 erreichte die erste Planetensonde, Mariner 4, den Mars, und 1969 stand Neil Armstrong auf der Mondoberfläche. Mit vielen weiteren Mond- und Planetenmissionen und dem bemannten Weltraumlaboratorium Skylab 1973 erhielten wir eine solch überwältigende Zahl von Photographien und anderen Informationen über das Sonnensystem, dass unser bisheriges Verständnis von Sonne, Mond, den Planeten und dem interplanetaren Raum gänzlich verändert wurde. Voyager 2, seit 1977 im All, übertrug inzwischen Daten von Jupiter und Saturn in Ergänzung der Voyager-1-Resultate und ist nun unterwegs zum Uranus (1986) und Neptun (1989). «Eine solche Phase der Expansion wird es nie mehr wieder geben», schreibt GRAHAM SMITH im Vorwort.

Das bedeutet, dass die interplanetaren Erkundungsflüge ihren vorläufigen Höhepunkt erreicht haben und mit spektakulären und vor allem kostspieligen Planeten-Raumfahrt-Projekten in den nächsten Jahren kaum zu rechnen ist. Es ist daher genau der richtige Zeitpunkt, einen neuen Atlas des Sonnensystems vorzulegen, der nicht nur den historischen Aspekt berücksichtigt, sondern vor allem die neuesten Forschungsergebnisse bringt. Alle neuen Bezeichnungen wurden aufgenommen, und man wird feststellen, dass in manchen Fällen die neue, von der Internationalen Astronomischen Union eingeführte Nomenklatur von der in älteren Büchern verwendeten abweicht.

Das Besondere dieses Werkes ist seine reichhaltige Illustration. Mit 150 farbigen Abbildungen, über 700 einfarbigen Illustrationen und über 500 Diagrammen und Schemazeichnungen, darunter die sensationellen Bilder von den Raumsonden Voyager, Viking und Pioneer, enthält der Band eigens für diesen Atlas erarbeitetes, teilweise bisher noch nicht veröffentlichtes Karten- und Bildmaterial. Er bietet eine Einführung in den Aufbau des Sonnensystems, Beschreibungen der Sonne, des Mondes, der inneren Planeten, der Asteroiden, der Riesenplaneten sowie eine Darstellung des äusseren Sonnensystems bis hin zu den Meteoren, Meteoriten und Kometen. Kurzbiographien bedeutender Astronomen vom Altertum bis in die Gegenwart, Tabellen über alle bisherigen Missionen, ein Glossar und Ephemeridentabellen bilden den Abschluss. Abgesehen von einigen Flüchtigkeitsfehlern ein ganz grossartiges Werk, das das Bücherregal eines jeden Sternfreundes zieren sollte. Es hat wohl seinen Preis – doch kann man es sich ja auch schenken lassen, zu Weihnachten etwa.

K. STÄDELI

Sonne, Mond und innere Planeten



Soleil, Lune et planètes intérieures

Aus dieser Grafik können Auf- und Untergangszeiten von Sonne, Mond, Merkur und Venus abgelesen werden.

Die Daten am linken Rand gelten für die Zeiten vor Mitternacht. Auf derselben waagrechten Linie ist nach 00 Uhr der Beginn des nächsten Tages aufgezeichnet. Die Zeiten (MEZ) gelten für 47° nördl. Breite und 8°30′ östl. Länge.

Bei Beginn der bürgerlichen Dämmerung am Abend sind erst die hellsten Sterne — bestenfalls bis etwa 2. Grösse — von blossem Auge sichtbar. Nur zwischen Ende und Beginn der astronomischen Dämmerung wird der Himmel von der Sonne nicht mehr aufgehellt.

Les heures du lever et du coucher du soleil, de la lune, de Mercure et de Vénus peuvent être lues directement du graphique.

Les dates indiquées au bord gauche sont valables pour les heures avant minuit. Sur la même ligne horizontale est indiqué, après minuit, le début du prochain jour. Les heures indiquées (HEC) sont valables pour 47° de latitude nord et 8°30′ de longitude est.

Au début du crépuscule civil, le soir, les premières étoiles claires — dans le meilleur des cas jusqu'à la magnitude 2 — sont visibles à l'œil nu. C'est seulement entre le début et la fin du crépuscule astronomique que le ciel n'est plus éclairé par le soleil.

Sonnenaufgang und Sonnenuntergang
Lever et coucher du soleil
Bürgerliche Dämmerung (Sonnenhöhe —6°)
Crépuscule civil (hauteur du soleil —6°)
Astronomische Dämmerung (Sonnenhöhe —18°)
Crépuscule astronomique (hauteur du soleil —18°)
A L Mondaufgang / Lever de la lune
U C Monduntergang / Coucher de la lune
Kein Mondschein, Himmel vollständig dunkel
Pas de clair de lune, ciel totalement sombre