Von einfachen uind komplizierten Bewegungen

Autor(en): **Kirchgraber, Urs**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **43 (1985)**

Heft 209

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-899196

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Von einfachen und komplizierten Bewegungen

URS KIRCHGRABER*

Denken Sie nicht, dass ich nun mit Ihnen eine abendliche Gymnastikstunde durchführen will – und es folgt auch kein Vortrag übers Tanzen als Kunst oder Freizeitbeschäftigung!

Weil ich in einer astronomischen Gesellschaft bin, kann ich mit einem Beispiel beginnen, das Ihnen besonders vertraut ist: Es geht um Bewegungen, wie sie die Planeten unseres Sonnensystems um die Sonne, unser Mond oder die amerikanischen, sowjetischen, chinesischen, japanischen und indischen Satelliten um unsere Erde beschreiben. Das sind Bewegungen, die, sind sie einmal in Gang gesetzt, wie von selbst, nach eigenen Gesetzen ablaufen; ganz im Gegensatz etwa zu den herrlichen Pirouetten einer DENISE BIELLMANN, die bei aller Ähnlichkeit doch immer wieder ein wenig anders ausfallen. Die Bewegung der Planeten oder künstlicher Himmelskörper ist eines von vielen Beispielen; ein verwandtes ist die Bewegung von geladenen Teilchen in Ringbeschleunigern, wie dem Teilchenakzelerator des CERN in Genf oder des SIN in Villingen.

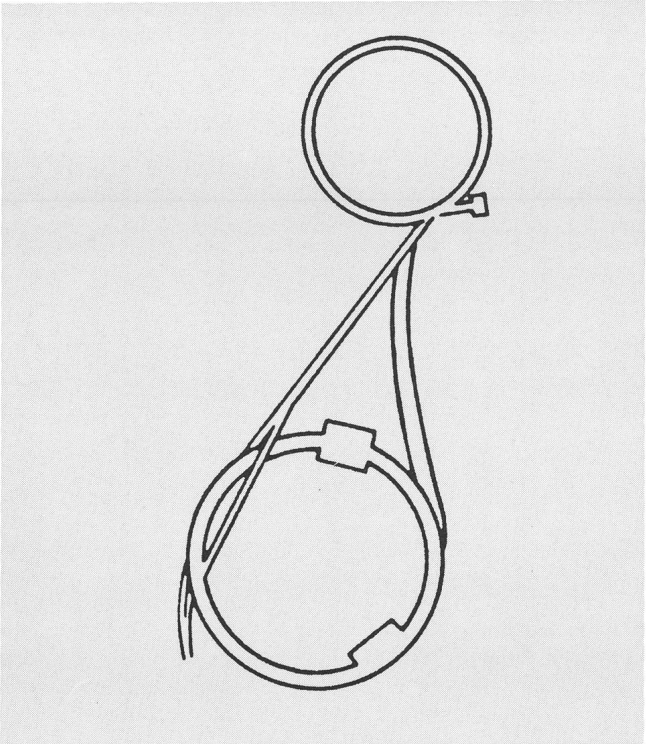

Abb. 1

Manchmal treten Bewegungen auch verkappter auf. Es ist vielleicht überraschend, dass man chemische Reaktionen oder die Veränderung einer in einem Wald vorhandenen Borkenkäferpopulation auch als Bewegungsproblem deuten kann.

Wenn immer ein Bewegungsproblem vorliegt, erfolgt seine wissenschaftliche Behandlung in drei Stufen.

1. Festlegung der *Zustandsgrössen,* d.h. derjenigen Grössen, die den jeweiligen Bewegungszustand beschreiben. Die Bestimmung der Zustandsgrössen bereitet meistens keine besonderen Schwierigkeiten. Weil die weitere Bewegung eines Satelliten bestimmt ist, wenn man nur zu einem Zeitpunkt seine Position und Geschwindigkeit kennt, sind Position und Geschwindigkeit für dieses Problem die geeigneten Zustandsgrössen. Bei einer chemischen Reaktion dagegen sind die Konzentrationen der beteiligten Substanzen die Zustandsgrössen. Wenn auch die Wahl der Zustandsgrössen in den meisten Fällen ganz offensichtlich ist, stellt ihre Einführung grundsätzlich doch einen wichtigen Schritt dar, indem dadurch das Problem quantifiziert wird. Zustandsgrössen setzen die Idee, Messungen durchführen zu können, voraus.
2. Ermittlung des *Bewegungsgesetzes.* Während die Einführung von geeigneten Zustandsgrössen sich also oft fast von selbst versteht, ist das Auffinden des Bewegungsgesetzes im Grunde genommen eigentlich eine übermenschliche Aufgabe! Um diese Bemerkung zu begreifen, muss man sich vor Augen halten, dass kein Mensch je verstanden hat, *warum* eine Bewegung erfolgt – wir wissen nicht, *warum* ein aus der Höhe fallengelassener Stein fällt, *warum* die Planeten, Satelliten sich bewegen; dennoch wissen wir sehr genau, *wie* Planeten, Satelliten sich bewegen, weil es, obwohl wir *die Gründe* für die Bewegung nicht kennen, gelungen ist, das *Bewegungsgesetz,* d.h. *die Art und Weise, wie sich die Zustandsgrössen im Laufe der Zeit ändern,* den Bewegungen sozusagen abzulauschen! Es grenzt meiner Meinung nach an ein Wunder, für wie viele Bewegungsvorgänge wir die Bewegungsgesetze kennen. Oder anders formuliert: Das Wunder besteht darin, dass so manche Bewegungen ein so einfaches Bewegungsgesetz haben, dass es aufgefunden werden kann.

   Betrachten wir ein Beispiel, das einigen von Ihnen sicher aufs angenehmste vertraut ist! Machen wir doch zusammen ein Spielchen! Spielen wir Billard! Das gezeichnete Rechteck soll die Bande eines Billard-Tisches andeuten. Das wissenschaftliche Billard, das ich mit Ihnen vorhabe, braucht nur eine einzige Kugel, und es ist, jedenfalls äusserlich besehen, vielleicht auch nicht so spannend, wie das, was in einem südfranzösischen Bistro, womöglich bei einem Pernod, sich abspielt. Wir legen nämlich einfach die Kugel irgendwohin, stossen sie an und schauen zu, wie sie sich bewegt. Wenn wir annehmen, dass der Billard-Tisch nicht mit ziemlich grobem grünem Stoff ausgelegt ist, sondern mit einem so feinen Seidenstöffchen, dass die Kugel

* Schriftliche Fassung eines Vortrages des Verfassers in der Astronomischen Gesellschaft St. Gallen am 18. Juni 1984.

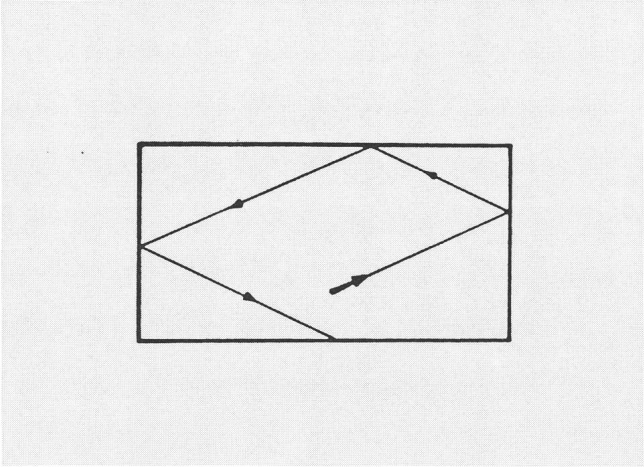

Abb. 2

ganz ohne Reibung rollt, dann hat unser Schauspiel gar kein Ende, die Kugel rollt und rollt, in alle Ewigkeit!

Studieren wir diese Bewegung! Was sind die geeigneten *Zustandsgrössen?* Weil die Geometrie der Bewegung vollständig bestimmt ist durch Position und Bewegungsrichtung der Kugel zu irgendeinem Zeitpunkt, sind Position und Bewegungsrichtung die angemessenen Zustandsgrössen. Wie lautet nun aber das *Bewegungsgesetz?* Selbst wer kaum Billard gespielt hat, weiss, dass die Kugel in der Richtung, in der sie sich einmal bewegt, weiterrollt, bis sie zur Bande kommt. An der Bande geschieht etwas Merkwürdiges: Die Kugel ändert ihre Bewegungsrichtung, rollt dann wieder geradlinig, bis sie wieder zur Bande kommt, dort ändert sie erneut die Bewegungsrichtung, rollt geradlinig weiter usw., usf. Das erste Wunder besteht offenbar darin, dass die Kugel zwischen zwei Stössen mit der Bande eine simple geradlinige Bewegung ausführt. Das nächste Wunder ist noch wunderbarer! Es ist nämlich leicht zu beschreiben, wie die Kugel an der Bande die Richtung wechselt – sie wird ganz einfach *reflektiert,* d.h. die neue Richtung ist so, dass das Lot die Winkelhalbierende zwischen der Ankunfts- und Abgangsrichtung ist.

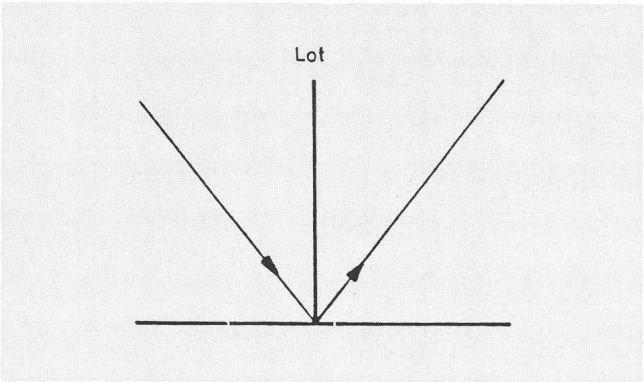

Abb. 3

Ist es nicht in der Tat wunderbar, dass ein so komplizierter physikalischer Vorgang, wie der Stoss einer Kugel mit einer Wand, durch ein so einfaches Gesetz beschrieben werden kann?

Beachten Sie, dass das Reflektionsgesetz nicht Resultat reinen Denkens ist. Das Reflektionsgesetz ist vielmehr eine empirisch ermittelte Tatsache, ein experimenteller Befund, der nicht allmählich in die Kategorie des reinen Denkens verlegt werden darf, nur weil er uns so vertraut geworden ist!

Man kann das Billardproblem noch etwas verallgemeinern, indem man sich von der Vorstellung eines rechteckförmigen Billard-Tisches löst und irgendeine geschlossene Kurve als Bande verwendet, cf. Abb. 4.

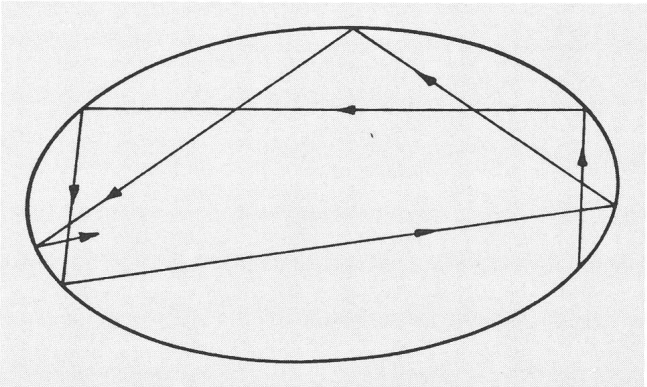

Abb. 4

Das Billard ist ein besonders einfach zu beschreibendes Bewegungsproblem, d.h. ein Problem mit leicht zu erklärendem Bewegungsgesetz. Überraschenderweise ist auch das Satellitenbewegungsproblem oder das Bewegungsproblem einer chemischen Reaktion ähnlich einfach zu beschreiben, indem die Zustandsgrössen einfach auszumachen sind und das Bewegungsgesetz relativ leicht zu formulieren ist, wenn diese beiden Fälle auch über die Möglichkeiten dieses Vortrages hinausgehen. Was das Borkenkäferproblem anbelangt, so trifft diese Aussage nicht zu: für dieses Problem ist das Bewegungsgesetz gerade *nicht* bekannt!

3. Sie werden sich fragen, warum nun dem Vorangegangenen ein Drittes nachfolgen soll, da doch, wenn für ein Bewegungsproblem einmal das Bewegungsgesetz gefunden ist, alles erledigt ist. In Tat und Wahrheit ist gar nichts erledigt, die Probleme fangen erst an, wie sich zeigen wird.

Die dritte Stufe in der wissenschaftlichen Untersuchung eines Bewegungsproblems ist der mathematischen Erforschung des Bewegungsgesetzes gewidmet. Was darunter zu verstehen und warum eine solche Studie nötig ist, sollte sich im weiteren Verlauf des Vortrages herausstellen. Betrachten wir die Erde und den Mond und stellen wir uns die Aufgabe, eine kleine Sonde von der Erde zum Mond zu schiessen. Wenn wir die Sonde zu einem gewissen Zeitpunkt in eine gewisse Anfangsposition bringen und ihr auch eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit erteilen, dann ist die Bewegung der Sonde bestimmt und aufgrund des Bewegungsgesetzes berechenbar. Die Frage ist nur, *wann* wir die Sonde und in *welcher* Anfangsposition und mit *welcher* Anfangsgeschwindigkeit auf den Weg schicken sollen, denn wenn wir diese Grössen ganz zufällig wählen, ist die Chance nur zu gross, dass die Sonde dem Mond niemals nahe kommt, cf. Abb. 5!

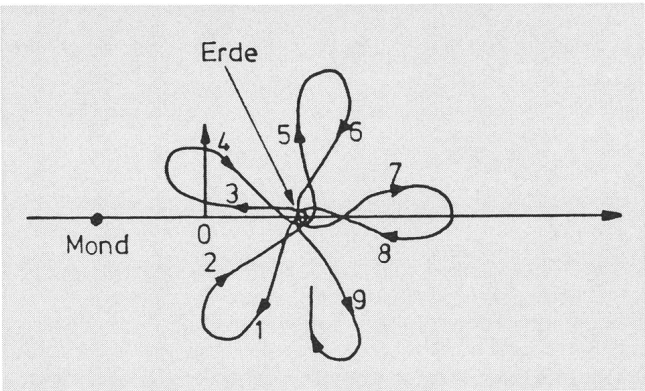

Abb. 5

Die primäre Frage ist deshalb sogar: Können die Anfangsgrössen überhaupt so gewählt werden, dass die Bewegung die Sonde zum Mond führt? Das ist doch nur eine rhetorische Frage, werden Sie antworten, wie jeder weiss, wurden ja schon mehrere unbemannte und bemannte Sonden zum Mond entsandt. Da haben Sie ganz recht, aber glauben Sie mir, diese Frage hatte man sich vor den Mondflügen durchaus gestellt und sorgfältig beantwortet. Und Hand aufs Herz: Würden Sie auch ohne weiteres behaupten, dass man auf der Erde eine Sonde so starten kann, dass diese zuerst zur Venus, dann zum Merkur fliegt, später die Sonne traversiert, zum Mars hinauskurvt und schliesslich in elegantem Bogen zur Erde zurückkehrt, cf. Abb. 6?

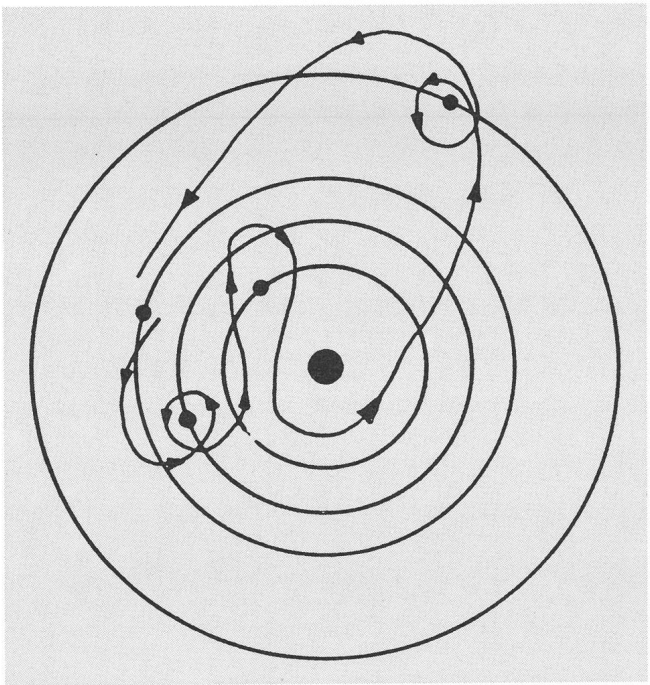

Abb. 6

Ich hoffe, diese wenigen Überlegungen überzeugen Sie, dass das Studium der geometrischen Eigenschaften der Bewegungen, die ein Bewegungsgesetz erlaubt, der möglichen Bewegungsformen, wie man sagen könnte, nicht nur interessant, sondern auch nützlich ist. Allerdings ist dieses Studium eine formidable Aufgabe, und ich muss Ihnen gestehen, dass, während etwa die Physiker ausserordentlich erfolgreich sind im Auffinden von Bewegungsgesetzen, die bisherige Leistung der Mathematiker im Beschreiben möglicher Bewegungsformen, selbst für einfache Bewegungsprobleme, wie z.B. das Billardproblem, Stückwerk ist! Der Grund liegt wohl darin, dass selbst bei einfachen Bewegungsproblemen *nebeneinander* einfache und auch komplizierte Bewegungen auftreten. Damit, meine Damen und Herren, sind wir endlich beim eigentlichen Gegenstand dieses Vortrages angelangt: einfache und komplizierte Bewegungen! Um Ihnen eine Ahnung von der Vielfalt und der Komplexität möglichen Bewegungsverhaltens zu vermitteln, sollen mehrere Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 1:
Nehmen wir wieder das schon zum Standardbeispiel gewordene Billardproblem! Und zwar wollen wir zunächst voraussetzen, dass der Tisch exakt kreisförmig sei, dann sind die möglichen Bewegungsformen nämlich besonders leicht zu übersehen und doch schon überraschend kompliziert! Bei kreisförmiger Bande kommt es offenbar gar nicht darauf an, wo wir die Kugel anstossen; welche Richtung wir ihr geben, ist allerdings von Wichtigkeit. Betrachten wir einige Bewegungen, cf. Abb. 7.

Man erkennt, dass das Verhältnis des Winkels ψ zu 360° den Charakter der Bewegung bestimmt. Ist

$$\frac{\psi}{360°}$$

eine rationale Zahl, etwa

$$\frac{p}{q}$$

p und q teilerfremd, dann liegt eine *periodische Bewegung* vor, denn nach q Stössen mit der Bande erreicht die Kugel wieder den Ausgangspunkt und die Bewegung wiederholt sich; q heisst Periode. Es gibt offenbar periodische Bewegungen mit jeder beliebigen Periode. Ist hingegen

$$\frac{\psi}{360°}$$

eine irrationale Zahl, dann kehrt die Kugel niemals genau an den Anfangsort zurück, die Bewegung ist nicht periodisch; hingegen gelangt die Kugel immer wieder in beliebige Nähe zu jedem beliebigen Punkt der Bande**. Eine solche Bahn wollen wir *quasiperiodisch* nennen. Auffällig an dieser Situation ist die folgende Tatsache. Obwohl die Geometrie der Bewegung in den beiden Fällen ganz verschieden ist, genügt es, die Richtung, in der die Kugel anfänglich gestossen wird, beliebig wenig zu ändern, um vom einen in den anderen Fall zu wechseln.

** Diese Behauptung, die bei strenger Betrachtung bewiesen werden muss, heisst Satz von Kronecker.

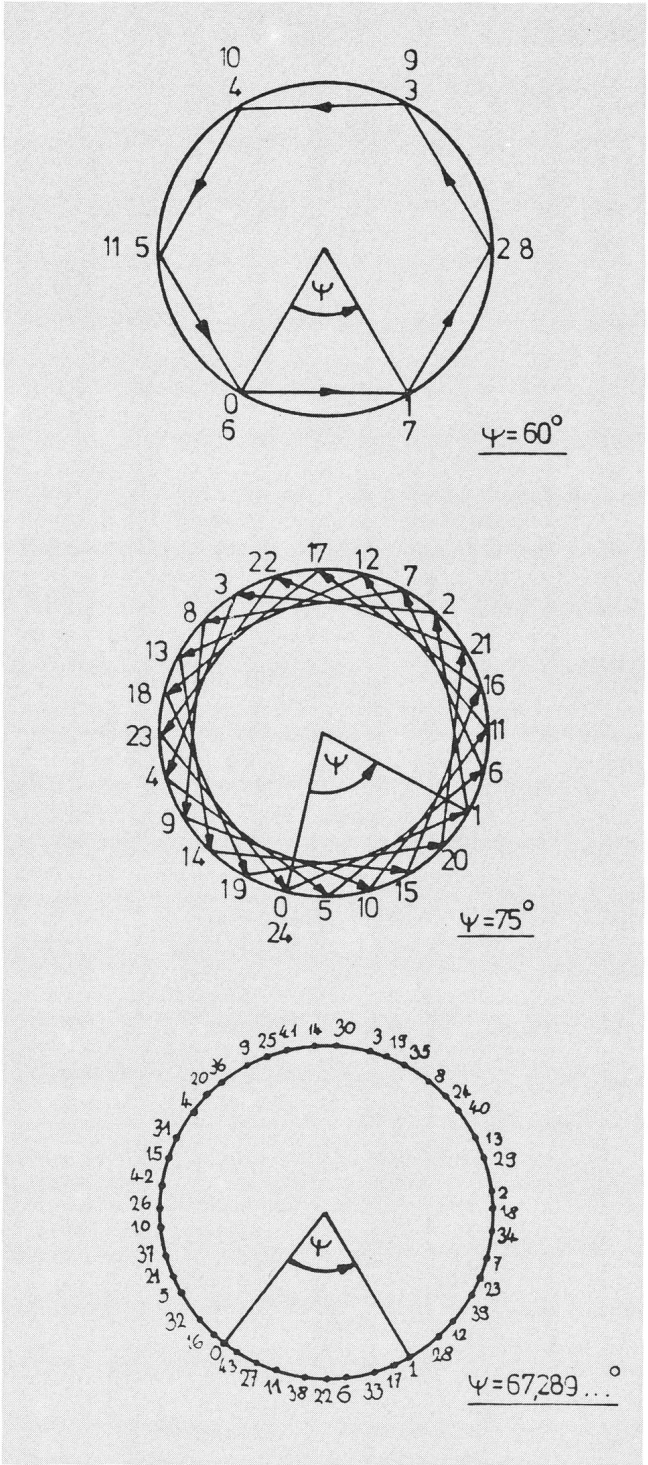

Abb. 7

Adresse des Autors:
Urs Kirchgraber, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH-Zentrum, 8092 Zürich.

(Fortsetzung in der nächsten Nummer)

Buchbesprechungen/Bibliographies

KARL ADAM: *Über Grundlagen und Grundformen des Kalenders,* 92 Seiten, Hannover 1984, Band 6 der VFG-Reihe (Mannus-Verlag Bonn 1). DM 10.—.

Der Verfasser greift in der Broschüre ein Thema auf, das in der geistigen Grundlagenforschung der Menschheit eine wesentliche Rolle spielt. Er behandelt Zähl- und Mondkalender und verweist auf die Bedeutung des jährlichen Kreisganges der Sterne in den Mythen. Die von dieser Himmelsmühle (Göpel) ableitbaren immerwährenden Jahreskalender zu 360 sowie zu 364 Tagen erfordern die regelmässige Feststellung mindestens eines Jahresmerktages. Sie müssen nach ihrer weltweiten Verbreitung uralt sein, z.B. auch älter als der megalithische Visurenkalender. Entsprechend den 26, 27 bzw. 28 Häusern des Sternkreises des Mondes scheint der Jahreskreis des Sternhimmels von seiner geometrischen Unterteilung in 12 Tierkreisbilder eingeteilt gewesen zu sein in 13, 9 bzw. 7 «Himmel» oder Stufen des Himmelsberges bzw. Himmelsbaumes, und die umgekehrte Rechnung liess die Zahlen dieser Teilung des Jahreskreises gemäss der Mondbahnteilung zugleich zu 13-, 9- oder 7tägigen «Wochen» werden.

Fristen zu 40 Tagen waren dereinst weltweit von religiöser Bedeutung; waren unsere alten Zählmasse «Stiege» zu 20 und «Zimmer» zu 40 Einheiten vielleicht ursprünglich Zeitmasse? Könnte die nordische Rechnung in 20er-Schritten aus einer ehemaligen Zeitordnung stammen? Aus dem runden Zähljahr wird auch eine Fünf- bzw. Zehnteilung der Ekliptik abgeleitet (Pentagramm).

Vor der Rechnung in zwölf 30tägigen Rundmonaten muss es eine weit ältere Jahresteilung in 12 Massmonate zu wechselnd 29 und 30 Tagen mit 11 Ergänzungstagen gegeben haben. In diesen 12 Jahresabschnitten beginnen jeweils die 12 regulären Monate der Mondjahre und in den 11 Ergänzungstagen deren Schaltmonate.

Der Metonische Zyklus muss u.a. am Hin- und Herspringen des Monatsbeginns (Vollmond) im Massmonat genauso früh zu erkennen gewesen sein wie der achtjährige Beinahekreis des 99monatigen Mondsternkreises. Das hat zur Rechnung in Mondjahren und in Mondachtjahren geführt.

Die Ausführungen von ADAM sind archäologisch, mythologisch, historisch und völkerkundlich von Interesse; es werden auch etymologische Fragen berührt.

SFOUNTOURIS, ARGYRIS, *Sternbilder, Blicke in den Nachthimmel,* 1984, Ex Libris Verlag AG, Zürich, 112 Seiten, 32 Seiten Grundtext, 32 Seiten Anhang mit Sternkarten, 69 vierfarbige Abbildungen, davon 13 ganzseitig, etwa 60 Skizzen und Abbildungen, Fr. 38.—.

Das vorliegende Buch will sich als leicht fassliche Einführung in die Himmelsbeobachtung verstehen, seine Leser mit den Sternbildern vertraut machen und bei der Suche nach diesen am Nachthimmel helfen.

Beim Bildmaterial, das diesem Zweck dienen soll und das der Autor während 15 Jahren zusammengetragen hat, handelt es sich zur Hauptsache um Strichspuraufnahmen von Konstellationen. Also doch eher eine unnatürliche, dem blossen Auge jedenfalls unzugängliche Präsentation des Sternenhimmels. Bei der Betrachtung der Aufnahmen bekundet selbst der etwas geübtere Beobachter Mühe, diese abstrakte Darstellungsart zu dechiffrieren, und er sehnt sich nach den wirklichen Darstellungen des Himmels. Der «Reiseführer durch das Firmament», als den sich «Sternbilder» vorstellt, bringt den Wanderer am Nachthimmel wohl nur schwerlich seinem Ziel näher – für die bessere und sicherere Orientierung bleibt der Griff zur traditionellen Sternkarte.

Die vermehrte Berücksichtigung nachgeführter Astroaufnahmen, versehen mit einem Deckpergamin, wo Sternpunkte zu Sternbildern verbunden sind, das Ganze mit Legenden und den für die Einführung in die Himmelsbeobachtung nötigen Informationen ausgestattet, hätte der Sache besser dienen können.

KARL STÄDELI