Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft

Band: 41 (1983)

Heft: 197

Artikel: Die Keplerschen Gesetze für die Mittelschule nach der "Holzhammermethode"

Autor: Schoch, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899242

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Keplerschen Gesetze für die Mittelschule nach der «Holzhammermethode»

F. SCHOCH

1. Einleitung

Etwa im 12. Schuljahr werden am naturwissenschaftlichen Gymnasium (Matura Typus C) im Anschluss an die Kapitel Gravitation und Kreisbewegungen im Unterrichtsfach Physik kreisförmige Planeten- oder Satellitenbahnen berechnet. Sowohl für die Astronomie als auch für das Verständnis des geschichtlichen Werdegangs der klassischen Himmelsmechanik ist eine anschliessende Erwähnung und Diskussion der Keplerschen Gesetze unbedingt wünschenswert.

Sie lauten:

K1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

K2. Der Fahrstrahl Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

K3. T^2/a^3 = konst = k für alle Planeten, wobei T = siderische Umlaufszeit und a = grosse Halbachse bedeutet.

Johannes Kepler hat sie nach langen Irrwegen (ca. 1619) durch geschicktes Auswerten von genauen Beobachtungsdaten von Planetenpositionen (vor allem Mars!) gefunden, ohne jedoch das Zusammenspiel von Kräften und Bewegung richtig zu erkennen.

Erst Isaac Newton hat etwa ein halbes Jahrhundert später (1687) *genial* erkannt, dass sich die Keplerschen Gesetze ableiten lassen, wenn man

- eine zum Quadrat des Abstandes des Planeten zur Sonne *invers* proportionale Kraft annimmt (heutige Schreibweise: $F_{grav} \simeq 1/r^2$) und diese gemäss
- $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{grav} = \vec{F}_{res}$ mit der Beschleunigung $\vec{a}$ verknüpft.

Auf die Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen Ansatz musste bisher (leider) verzichtet werden, da die dazu gebrauchte Mathematik für diese Schulstufe zu anspruchsvoll ist, und sich mit den äusserst knappen Stundendotationen des Physikunterrichtes nicht verantworten liesse.

Viel weniger anspruchsvoll ist jedoch die direkte numerische Berechnung von Keplerschen Umlaufbahnen und die direkte («experimentelle») Verifizierung der Keplerschen Gesetze an ihnen.

Da viele Schüler heute Zugang zu einem Heimcomputer haben oder wenigstens programmierbare Taschenrechner besitzen, ist die Motivation, die Keplerschen Gesetze mit direkter Rechnung zu bestätigen (deshalb Holzhammermethode!), recht gross.

Im folgenden wird dieser Zugang zu den Keplerschen Gesetzen beschrieben.

2. Theorie zur allg. Bahnberechnung (für die Schüler)

Wir machen uns nun die Verhältnisse nicht mit den Planeten um die Sonne, sondern nach Figur 1 mit Satelliten um die Erde als Zentralkörper der Masse M_{ZK} klar.

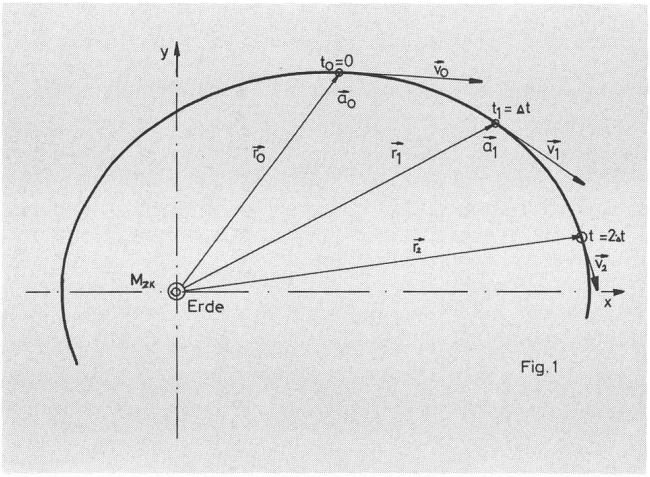

Fig. 1: Die Umlaufbahn eines Körpers mit $m << M_{ZK}$ ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt der Zentralkörper (hier die Erde) steht.

Es gilt: $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{M_{zk} \cdot m}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \Rightarrow \vec{a} = -\gamma \frac{M_{zk}}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$

Wir denken uns die Erde stillstehend und nichtrotierend im Ursprung eines inertialen Koordinatensystems. Für die Rechnung können wir die Erde als Massenpunkt betrachten. Es werde nur der Einfluss des Zentralkörpers berücksichtigt.

Der Ort $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

sowie die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = o) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$

des Satelliten zur Zeit t = 0 sei vorgegeben. Mit diesen 4 Grössen ist interessanterweise die Bahn bestimmt. (x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}) heissen *Anfangsbedingungen.*

Nun geben wir uns ein «kleines» Zeitintervall Δt vor, und berechnen gemäss den Definitionen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sowie dem Newtonschen Gesetz in einem ersten Schritt den «neuen» Ort $\vec{r}_1 = \vec{r}(t = \Delta t)$ und die «neue» Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \vec{v}(t = \Delta t)$. Diese «neuen»

1. Schritt

$\vec{v}_0 \overset{Def}{=} \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{\Delta t}$ $\longrightarrow$ $\vec{a}_0 \overset{Def}{=} \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t}$ $\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \cdot \vec{O}_0 \Rightarrow$	$t = \Delta t$ $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta t \cdot \vec{v}_0$ $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \cdot \left(\dfrac{-\gamma \cdot M_{Zk}}{r_0^3} \right) \cdot \vec{r}_0$

(1)

$\Downarrow$

2. Schritt

Wir betrachten nun die vorliegenden Werte $\vec{r}_1$, $\vec{v}_1$ als (neue) Anfangsbedingungen; nach weiterem Ablauf von Δt (zur Zeit $t = 2 \cdot \Delta t$) erhalten wir deshalb in einem zweiten Rechenschritt die nebenstehenden Gleichungen.	$t = 2\Delta t$ $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta t \cdot \vec{v}_1$ $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta t \cdot \left(\dfrac{-\gamma \cdot M_{Zk}}{r_1^3} \right) \vec{r}_1$

(2)

$\Downarrow$

Allgemein nach i-Schritten: $i-1 \rightarrow i$	$t = i \cdot \Delta t$ $\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \cdot \vec{v}_{i-1}$ $\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \left(\dfrac{-\gamma \cdot M_{Zk}}{r_{i-1}^3} \right) \vec{r}_{i-1}$

Werte können natürlich nicht ganz exakt sein, da Δt ja ein endliches Zeitintervall ist (z. B. 100 s).

3. Numerische Bahnberechnung

Die ganze Klasse wurde nun in Teams von 4–5 Schülern mit einem selbsternannten «Chef» aufgeteilt. Jeder Schüler bekam von seinem «Chef» gemäss Tab. 1 die Anfangsbedingungen für «seine» Bahn zugewiesen.

Jeder Schüler berechnete nun nach dem Rechenschema nach Tab. 2 mindestens die ersten zwei Bahnpunkte seiner Bahn. Diese wurden kontrolliert.

Tab. 1

Bahn-Nr.	Schüler	x_0 [10^7 m]	y_0 [10^7 m]	v_{0x} [ms^{-1}]	v_{0y} [ms^{-1}]	Δt [s]	Bahntyp
0	Chef	-1,276	0	0	v_{Kreis} = ...	-	Kreis
1		-1,276	0	0	6250	250	Ellipse
2		-1,276	0	0	5000	100	Ellipse
3		-1,276	0	0	3000	50	Ellipse
4		2,300	1,7	-9000	-2500	50	Hyperbel
5		2,300	-0,9	-4020	0	50	Parabel
6		1,000	0,5	0	-4000	50	Ellipse

Tab. 2

Rechenschritte nach der Ganzinkrementmethode [≙ Komponentendarstellung der Formeln (1) und (2)]

$t_0 = 0$		$t_1 = \Delta t$	=	t_2 = ...
x_0 = ...		$x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v_{0x}$	=	x_2 = ...
y_0 = ...	**1. Schritt**	$y_1 = y_0 + \Delta t \cdot v_{0y}$	=	**2. Schritt** y_2 = ...
v_{0x} = ...	$\Rightarrow$	$v_{1x} = v_{0x} - \left(\dfrac{\Delta t \cdot \gamma \cdot M_{Zk}}{r_0^3} \right) x_0$	=	$\Rightarrow$ v_{2x} = ...
v_{0y} = ...		$v_{1y} = v_{0y} - \left(\dfrac{\Delta t \cdot \gamma \cdot M_{Zk}}{r_0^3} \right) y_0$	=	v_{2y} = ...

Tab. 3

Bahn	T [s]	a [1000 km]	k_{exp} [$s^2\,m^{-3}$]	% Abweichung von k_{th}
1	22100	17,00	$9{,}94 \cdot 10^{-14}$	0,42 %
2	11000	10,65	$10{,}017 \cdot 10^{-14}$	1,2 %
3	6500	7,50	$10{,}015 \cdot 10^{-14}$	1,2 %

Für die weiteren Bahnpunkte stand ein Programm auf einem Tischrechner mit Drucker (HP-95) zur Verfügung.

Zur Verkleinerung der Rechenzeit sowie zur Erhöhung der numerischen Stabilität (Bahnen in Erdnähe sind kritisch!) verwendet das Programm die sog. Halbinkrementmethode. Auf dieses technische Detail werden die Schüler jedoch nicht aufmerksam gemacht. Sie werden vielmehr im Glauben belassen, der Computer berechne die nach Tab. 2 «von Hand auf dem eigenen Taschenrechner» ausgeführten Rechnungen lediglich rasch und vor allem fehlerfrei weiter.

Für den «Chef» wurde die mathematisch leicht zugängliche Kreisbahn (Bahn 0) sowie die grosse Ellipsenbahn (Bahn 1) reserviert (siehe Fig. 2). Als Erweiterung wurde auch eine Hyperbelbahn (Bahn 4) sowie eine Parabelbahn (Bahn 5) gerechnet und damit gezeigt, dass Trägheitsbahnen um einen Zentralkörper Kegelschnitte sind. Bahn 6 ist eine schiefliegende Ellipse und Bahn 3 schliesslich führt zu einem Absturz und entspricht eigentlich nichts anderem als einem grossräumigen, horizontalen Wurf.

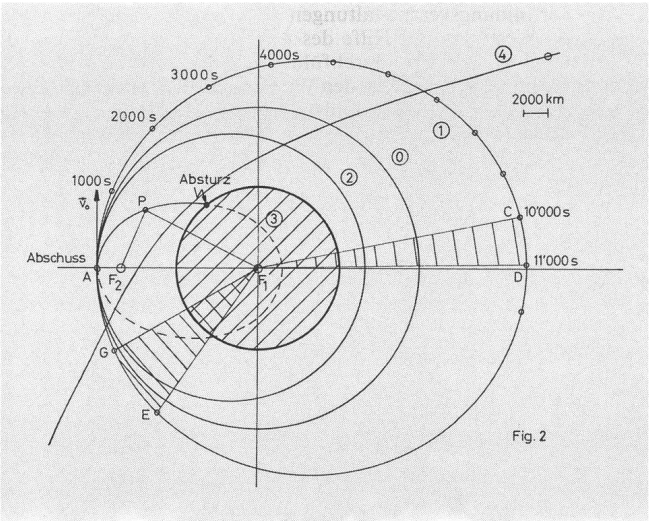

Fig. 2: Satellitenbahnen im Gravitationsfeld der Erde. Kreisbahn 0; Ellipsenbahnen 1, 2, 3; Hyperbelbahn 4. Bahn 3 dient zum Nachweis des ersten Keplerschen Gesetzes mit einem Faden nach der Gärtnerkonstruktion. Der Flächensatz (Kepler 2) wird mit den Ellipsensektoren (E_1, E, G) und (F_1, D, C) nachgewiesen. Die grosse Halbachse a sowie die Umlaufzeit T werden für den Nachweis des 3. Keplerschen Gesetzes aus der Figur herausgelesen.

Nach dem Vorliegen aller Bahnpunkte wurden diese auf ein gemeinsames A3-mm-Papier (Fig. 2) gezeichnet, und das Team konnte sich an die Aufgabe machen, die vorliegenden Bahnen auszuwerten.

Interessant ist es sich vorzustellen, im Punkt A ($r_A = 2 \times$ Erdradius) sei eine (ruhende) Abschussbasis für die Satelliten. Erfolgt der Abschuss mit $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ergibt sich ein freier Fall längs der Bahnkurve AF_1. Erteilt man dem Satelliten immer grösser werdende Geschwindigkeiten in der angegebenen Weise, so resultieren die Bahnen 3, 2, 0, 1 in der angegebenen Reihenfolge.

4. Auswertung

Wir betrachten nun die Bahnkurven in Fig. 2 so, als ob sie von Beobachtungsergebnissen herrührten.

4.1. Verifikation des ersten Keplerschen Gesetzes

Das erste Keplersche Gesetz behauptet, dass unsere geschlossenen Kurven in Fig. 2 Ellipsen seien.

Die Nachprüfung geschieht am besten mit einem Faden nach der Gärtnerkonstruktion. In Fig. 2 ist dies für Bahn 3 eingezeichnet, wobei der zu F_1 symmetrisch liegende zweite Brennpunkt F_2 gebraucht wird. Mit einem Bleistift kann man mit einer Genauigkeit von ca. ± 0,5 mm nachprüfen, ob der Punkt P, der der Ellipsenbedingung $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ = totale Fadenlänge = konstant genügt, tatsächlich mit der berechneten Bahnkurve zusammenfällt.

Bei sorgfältiger Ausführung kann man dies für die ganze Kurve sehr instruktiv bestätigt finden.

4.2. Verifikation des zweiten Keplerschen Gesetzes

Das zweite Keplersche Gesetz behauptet nun, dass der Fahrstrahl Zentralkörper zu umlaufendem Satelliten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreiche. Bahn 1 auf Fig. 2 diene als Beispiel. Der zeitliche Abstand der eingetragenen Bahnpunkte beträgt dort jeweils 1000 s. Nach Kepler müssen nun die Flächen der Ellipsensektoren (F_1CD) und (F_1EG) gleich sein, was man durch Ausmessen mit einem Planimeter, nach der Zerlegungsmethode und «Häuschenzählen» oder mit Ausschneiden und Wägen sehr gut überprüfen kann.

Resultate:

Fläche (F_1CD) = 10,07 cm^2; Fläche (F_1EG) = 10,02 cm^2. Damit erhält man eine erstaunliche Übereinstimmung von 0,5%.

4.3. Verifikation des dritten Keplerschen Gesetzes

Das dritte Keplersche Gesetz behauptet, dass der Quotient $k = T^2/a^3$ für alle möglichen Ellipsenbahnen um den gleichen Zentralkörper konstant sei. Die mathematisch einfache Kreisbahn erlaubt uns nun, durch leichte Rechnung den theoretischen Wert von k gemäss $k_{th} = 4\,\pi^2/\gamma M_{Zk}$ zu berechnen. Der numerische Wert beträgt $k_{th} = 9{,}8995 \cdot 10^{-14}\,s^2\,m^{-3}$. Damit lassen sich nun die aus der Fig. 2 gewonnenen und in Tab. 3 dargestellten «experimentellen» Werte k_{exp} vergleichen.

Die Umlaufszeit wird dabei durch Interpolation, die grosse Halbachse durch Ablesen mit einem Maßstab bestimmt.
Die Abweichungen betragen weniger als 1,5% und ergeben so eine glänzende Bestätigung des dritten quantitativen Keplerschen Gesetzes. Obwohl die vorgelegte Methode der numerischen Integration zum «Beweis» der Keplerschen Gesetze für die Schüler dieser Stufe nicht elegant ist, entbehrt sie nicht eines gewissen Reizes, was man am Verhalten der Schüler am besten merkt.

Adresse des Verfassers:
Dr. F. Schoch, Physikprofessor Kantonsschule Heerbrugg, 9435 Heerbrugg.

Buchbesprechung

HUBBLE EDWIN: *The Realm of the Nebulae*. Yale University Press, New Haven und London, 1983. XX, 207 Seiten. 16 Figuren, 14 Fotos s/w. 14,5 × 21,5 cm. £ 25.00.

Dieses Buch ist ein Neudruck eines 1936 erschienenen Buches und beruht auf Vorlesungen, die der Autor im Herbst 1935 an der Yale University hielt, also vor fast 50 Jahren.

Noch vor den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts wusste niemand, ob dieses «Reich der Nebel», wie die Galaxien damals genannt wurden, überhaupt existiert, obwohl die Idee von Welteninseln schon alt war, mindestens so alt wie KANTS Betrachtungen im Jahre 1755 über dieses Gebiet. Niemand kannte die Entfernungen dieser Gebilde, und so entstand die bekannte Kontroverse zwischen SLIPHER und CURTIS, ob diese innerhalb oder ausserhalb der Milchstrasse anzusiedeln seien.

1919 verliess HUBBLE die Lick-Sternwarte und ging zur Sternwarte auf Mount Wilson, wo er das damals grösste Fernrohr der Welt, den 2,5 m Hooker-Spiegel zur Verfügung hatte. Ende 1924 konnte er die entscheidende Entdeckung mitteilen, dass im Andromeda-Nebel Cepheiden-Veränderliche gefunden wurden und die Entfernung desselben 1 Million Lichtjahre betrage. Damit lag dieser eindeutig ausserhalb der Milchstrasse. HUBBLE arbeitete die erste Klassifikation der Nebel aus, die HUBBLE-Klassifikation, verbesserte die Entfernungsskala und verkündete 1928, dass eine lineare Beziehung bestehe zwischen den Fluchtgeschwindigkeiten und den Entfernungen der Nebel: das Reich der Welteninseln expandiere!

HUBBLE beschreibt in 8 Kapiteln in brillantem Stil, wie die Erkenntnisse schrittweise erweitert wurden. Vorerst werden die grundlegenden Grössen definiert: Entfernungseinheiten, scheinbare und absolute Helligkeit, Leuchtkraft, Terminologie der Nebel, Spiralnebel, Galaxien. Das erste Kapitel beschreibt die Erforschung des Weltraumes in den drei Etappen vom Sonnensystem zu den Fixsternen und schliesslich zu den Nebeln. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Nebel werden im zweiten Kapitel behandelt und die bekannte HUBBLE-Sequenz wird entwickelt. Kapitel drei untersucht die Verteilung der Nebel im Raum, unter Berücksichtigung der interstellaren, absorbierenden Materie. Kapitel vier zeigt, wie schrittweise die Entfernungen zu immer weiter weg liegenden Nebeln bestimmt wurden und Kapitel fünf bringt schliesslich die Verbindung der spektroskopisch gefundenen Fluchtgeschwindigkeiten mit den Entfernungen zur Geschwindigkeits-Entfernung-Beziehung, deren Konstante heute den Namen des Autors trägt. Kapitel sechs beschreibt die lokale Galaxien-Gruppe, Kapitel sieben die weitern Gefilde und Kapitel acht schliesslich das Reich der Nebel bis an die damals bekannten Grenzen.

Das Buch besticht durch eine eindrucksvolle, einfache und leicht lesbare Ausdrucksweise mit wenigen Formeln. Es ist erstaunlich, wie sich die damaligen Erkenntnisse eigentlich nur in Details von den heutigen unterscheiden und man sucht fast vergebens nach Dingen, die sich seither als falsch erwiesen haben. Wohl hat sich die Entfernungsskala stark verändert, aber noch heute ist die HUBBLE-Konstante nicht eindeutig festgelegt, schwanken doch die Angaben verschiedener Forscher um den Faktor zwei. Noch heute messen wir die Entfernungen zu den nächsten Galaxien mit Methoden, die hier beschrieben sind. Wir benutzen immer noch die HUBBLE-Klassifikation der Galaxien.

Alles in allem ein sehr faszinierendes Buch! A. TARNUTZER

SCHLOSSER W./SCHMIDT-KALER TH.: Astronomische Musterversuche für die Sekundarstufe II. Eine Handreichung für den Lehrer zur praktischen Behandlung von Astronomie, Astrophysik und Weltraumforschung im Physik- und Mathematikunterricht. Hirschengraben-Verlag, Frankfurt am Main. 224 Seiten mit vielen Abbildungen (Strichzeichnungen und Schwarzweiss-Fotos), geheftet. Preis: DM 39.—. ISBN 3-454-24930-9.

Das Buch kann ebenso von Astroamateuren verwendet werden, die Interesse haben, Beobachtungen, Fotos und Messungen am Himmel mathematisch auszuwerten und so eine Bestätigung für Grössen zu finden, die man sonst ohne weitere Überprüfung einem Lehrbuch oder Lexikon entnehmen muss.

Wie entstand das Werk?

«Es wurde mit der Absicht entwickelt, die moderne Astronomie für den Unterricht zugänglich zu machen und eine vorhandene Lükke zu schliessen. Dabei war man sich bewusst, dass das Experiment in der Astronomie eine ganz eigene Dimension hat und mit dem Experimentieren auf dem Tisch des Lehrsaals nur selten vergleichbar ist. Umso dringender wurde der Wunsch empfunden, den Horizont zu erweitern und zunächst die nähere Umgebung der Erde und gelegentlich auch die Grenzen des Weltalls ins Blickfeld zu rücken. In vielen Fortbildungsveranstaltungen für Lehrer, die das Land Nordrhein-Westfalen mit Hilfe des Astronomischen Institutes der Ruhr-Universität Bochum durchführen konnte, ergab sich eine geglückte Kooperation zwischen den Wissenschaftlern der Hochschule und den Lehrern an allgemeinbildenden Schulen. Die einen konnten aus den reichen vorhandenen Quellen schöpfen, haben das Geeignete ausgewählt und das Buch verfasst. Die andern konnten dabei über die Schultern schauen, die Versuche selbst erproben und schliesslich auch dem Härtetest in der Schule aussetzen. So kam eine Reduktion auf das dem Unterricht zuträgliche Mass zustande.»

Über die Absicht der Verfasser steht im Vorwort u.a.:

«Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, die Verwendung astronomischen und weltraumkundlichen Lehrstoffes im Physik- und Mathematikunterricht zu erleichtern. Im Zentrum steht dabei die praktische Beschäftigung mit der Astronomie, die sonst allgemein zu kurz kommt. Dem Kriterium der schulischen Durchführbarkeit sind alle andern Kriterien untergeordnet. So ist dieses Buch insonderheit kein Lehrbuch der Astronomie im herkömmlichen Sinn. Weder wird der Stoff systematisch dargeboten, noch ist er vollständig.»

Unter welchen Vorraussetzungen kann das Buch verwendet werden?

«Es wurde darauf geachtet, dass die Witterungsverhältnisse in Mitteleuropa die Beobachtungsmöglichkeiten stark beschneiden. Auch dürften Beobachtungen ausserhalb der Unterrichtszeit nicht immer leicht zu verwirklichen sein. Grundsätzlich ist daher die Hälfte der Musterversuche wetterunabhängig. Ein Viertel ist bei klarem Wetter tagsüber durchführbar. Den Rest bestreiten echte Dämmerungs- und Nachtversuche.

Zur Durchführung der Musterversuche bedarf es keines umfangreichen Instrumentariums. Obwohl die Hälfte ganz ohne Teleskop auskommt, ist doch die Anschaffung eines handelsüblichen Kompaktteleskopes zu empfehlen. Im übrigen reicht zur Durchführung der meisten Versuche eine normal bestückte Physiksammlung.»

Eine Bemerkung zum letzten Satz: Einige Versuche verlangen Geräte, die wohl eher in der Sammlung eines Gymnasiums als in derje-