

2. Koordinaten-Transformationen

Autor(en): **Schilt, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **38 (1980)**

Heft [1]: **Sondernummer = numéro spécial = numero speciale**

PDF erstellt am: **31.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-899579>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

B 4. System der Ekliptik System E'

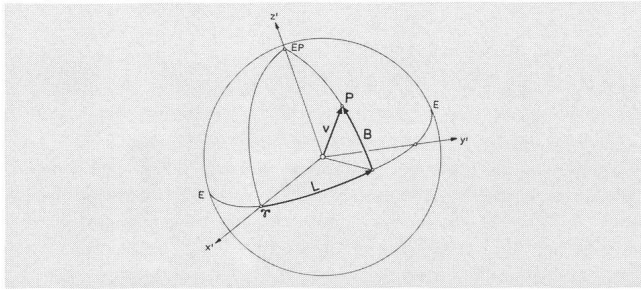


Fig. 1.n: rechtsorientiert

z' -Achse: Richtung zum nördlichen Ekliptikpol EP
 x' -Achse: Richtung zum Frühlingspunkt
 y' -Achse: Schnitt $L = 90^\circ$ mit Ekliptik-Ebene
 E-E: Ekliptik
 $r = v$ Entfernung vom Himmelskörper oder 1
 $\alpha = L$ ekliptikale Länge
 $\beta = B$ ekliptikale Breite
 $x' = v \cos B \cos L$
 $y' = v \cos B \sin L$
 $z' = v \sin B$

Adresse des Autors:

Prof. H. Schilt, Höhweg 5, CH-2502 Biel.

2. Koordinaten-Transformationen

H. SCHILT

Manchmal verwendet man für ein Problem mehrere Koordinatensysteme, weil sich das eine System für eine Teilaufgabe besser eignet als das andere. Man muss deshalb die Koordinaten von einem System in diejenigen des andern Systems umrechnen können. Dazu dienen Transformationsformeln.

Wir unterscheiden das Ausgangssystem vom Zielsystem. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten eines geometrischen Objektes im Ausgangssystem und, auf dasselbe System bezogen, die notwendigen Größen, um das Zielsystem festzulegen. Gesucht sind die Beziehungen, welche gestatten, aus den gegebenen Koordinaten diejenigen im Zielsystem auszurechnen.

Zuerst betrachten wir wieder ebene Systeme. Man unterscheidet zwischen Schiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen.

2.1 Schiebungen

Wir gehen vom System K aus; in diesem System hat der Ursprung \bar{O} des Zielsystems \bar{K} die Koordinaten $x = u$ und $y = v$. Durch diese Angabe ist das Zielsystem festgelegt, da bei Schiebungen die Achsen je parallel bleiben.

Der Punkt P hat im (Fig. 2.a)
Ausgangssystem K
die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= OQ \\ y &= QP \end{aligned}$$

Zielsystem \bar{K}

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{O}\bar{Q} \\ \bar{y} &= \bar{Q}P \end{aligned}$$

Aus der Figur entnimmt man:

2.11

$$\begin{aligned} x - u &= \bar{x} \\ y - v &= \bar{y} \end{aligned}$$

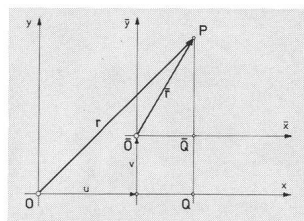


Fig. 2.a:

Beispiel:

$$\begin{aligned} u &= 5 & v &= 3 & 8 - 5 &= 3 = \bar{x} \\ x &= 8 & y &= 8 & 8 - 3 &= 5 = \bar{y} \end{aligned}$$

2.2 Drehungen

Zwei gleichorientierte kartesische Koordinatensysteme mit nicht parallelen Achsen lassen sich immer durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt zur Deckung bringen; sind sie verschieden orientiert, so ist eine Spiegelung notwendig (vgl. 2.3).

Wir betrachten den speziellen Fall der gleichorientierten Systeme mit gemeinsamem Ursprung, der somit Drehpunkt ist. (Fig. 2.b)

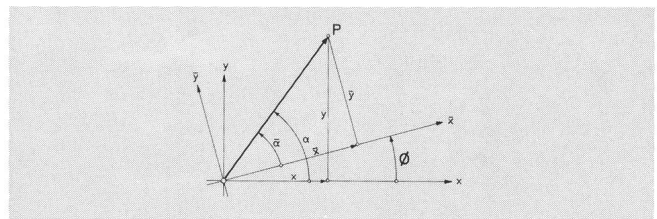


Fig. 2.b

Die Koordinaten von P sind
im System K
Ausgangssystem

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

im System \bar{K}
Zielsystem

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \cos \bar{\alpha} \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Bei einer Drehung von K um den Winkel Φ gilt:

2.21

$$\begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \alpha - \Phi &= \bar{\alpha} \end{aligned}$$

so dass

2.22

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \cos (\alpha - \Phi) \\ \bar{y} &= r \sin (\alpha - \Phi) \end{aligned}$$

Man merke sich:

Phi " Φ " ist der Winkel, welcher von der x-Achse des Ausgangssystems bis zur \bar{x} -Achse des Zielsystems gemessen und im Sinne des Ausgangssystems gezählt wird.

Zum Rechnen mit einem Taschenrechner eignet sich folgende Anweisung:

$$2.23 \quad \text{R-P} \quad (y, x) P = (\alpha, r)$$

$$\text{Drehung} \quad \begin{matrix} r = \bar{r} \\ \alpha - \Phi = \bar{\alpha} \end{matrix}$$

$$\text{P-R} \quad (\bar{\alpha}, r) R = (\bar{y}, \bar{x})$$

Zerlegt man die trigonometrischen Formen in 2.22 mit Hilfe der Additionstheoreme und setzt die rechtwinkligen Koordinaten x und y ein, so erhält man das bekannte Gleichungspaar:

$$2.24 \quad \begin{matrix} x \cos \Phi + y \sin \Phi = \bar{x} \\ -x \sin \Phi + y \cos \Phi = \bar{y} \end{matrix}$$

Oft findet man dafür die symbolische Abkürzung (Matrixschreibweise):

$$2.25 \quad D_{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ mit } D_{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{matrix} \Phi = 120^\circ & x = +3 & r = 5 \\ & y = -4 & \alpha = -53.13^\circ \\ & & \bar{r} = 5 & \bar{x} = -4.964 \\ & & \bar{\alpha} = -173.13^\circ & \bar{y} = -0.698 \end{matrix}$$

Programm und Beispiel für die Drehung

Φ : Winkel zwischen x - und \bar{x} -Achse

```

Φ =      120 ENTER↑
y =      -4 ENTER↑
x =       3
r        5.0000 R-P
          **
          **
α       -53.130 R-DN
          **
          **
Φ       120.000 X<>Y
          ***
α = α - Φ -173.130
          ***
r        5.0000 R↑
          **
          **
x̄ =     -4.964 P-R
          **
          **
ȳ =     -0.698 X<>Y
          **
          **

```

Bedeutung der Symbole:

siehe Seite 22

Zum Auflösen des Systems 2.24 nach x und y genügt die Bemerkung, dass von \bar{K} aus gesehen, der Drehwinkel $-\Phi$ ist; somit gilt:

$$2.26 \quad \begin{matrix} \bar{x} \cos \Phi - \bar{y} \sin \Phi = x \\ \bar{x} \sin \Phi + \bar{y} \cos \Phi = y \end{matrix}$$

$$D_{-\Phi} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist oft nützlich zu wissen, dass diese Beziehung mit

$$D_{\Phi} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

äquivalent ist.

Beispiele:

$$\begin{matrix} \Phi = -120^\circ & \bar{x} = 3 & \bar{r} = 5 \\ & \bar{y} = -4 & \bar{\alpha} = -53.13^\circ \\ & r = 5 & x = 1.964 \\ & \alpha = 66.87^\circ & y = 4.598 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Phi = +120^\circ & \bar{y} = -4 & \bar{r} = 5 \\ & \bar{x} = 3 & \bar{\beta} = 143.130^\circ \\ & r = 5 & y = 4.598 \\ & \beta = 23.130^\circ & x = 1.964 \end{matrix}$$

2.3 Achsenspiegelung

Das Koordinatensystem K soll an einer Geraden gespiegelt werden, dadurch entsteht aus der x -Achse die \bar{x} -Achse (Fig. 2c). Diese Achsen sollen den Winkel Φ einschliessen.

Ein Punkt P

hat die Koordinaten

im System K

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

im System \bar{K}

$$\bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\alpha}$$

$$\bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\alpha}$$

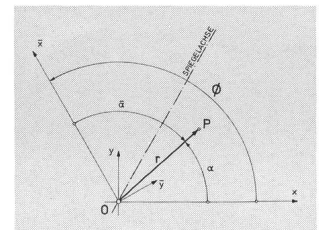


Fig. 2.c

Es gilt bei der Spiegelung:

$$2.31 \quad \begin{matrix} r = \bar{r} \\ \Phi - \alpha = \bar{\alpha} \end{matrix}$$

also ist

$$2.32 \quad \begin{matrix} r \cos (\Phi - \alpha) = \bar{x} \\ r \sin (\Phi - \alpha) = \bar{y} \end{matrix}$$

Folgende Zusammenstellung ist für Taschenrechner zweckmässig:

$$2.33 \quad \text{R-P} \quad (y, x) P = (\alpha, r)$$

$$\text{Spiegelung} \quad \begin{matrix} r = \bar{r} \\ \Phi - \alpha = \bar{\alpha} \end{matrix}$$

$$\text{P-R} \quad (\bar{\alpha}, r) R = (\bar{y}, \bar{x})$$

Nur bei den beiden Äquatorsystemen sind die Polarkoordinaten der Umwandlung angepasst und die Spiegelung kann direkt mit der Beziehung

$$2.42 \quad AR = t^* - t$$

erfolgen. (Fig. 2e und 2f)

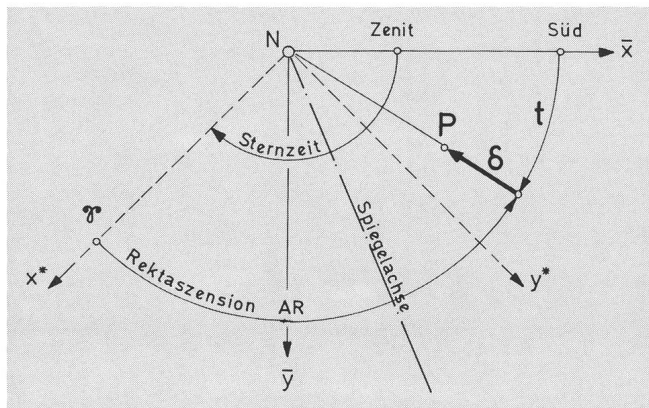


Fig. 2.f

Die Erdrotation ist so regelmässig, dass man sie bis 1958 zur Definition der Sekunde benutzte. Erst mit Quarz- und Atomuhren konnte man Unregelmässigkeiten der Erdrotation feststellen. Für die meisten praktischen Zwecke kann sie aber heute noch als gleichförmig betrachtet werden. Deshalb eignen sich die Systeme des Äquators besonders gut für Probleme, in denen die Zeit eine Rolle spielt.

B 2. Systeme des Ortsäquators und des Horizontes

Die beiden linksorientierten Systeme des Ortsäquators und des Horizontes haben eine gemeinsame y-Achse. Das Ortsäquatorsystem sei unser Ausgangssystem: dieses geht bei einer Drehung mit dem Winkel $\Phi = 90^\circ - \varphi$ (von der \bar{z} - zur z -Achse gemessen) in das Horizontsystem über. Symbolisch geschrieben:

$$2.43 \quad D_\Phi \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, \bar{y} = y$$

Diese Methode kann auch angewandt werden, wenn es gilt, von einem Vektor v , der durch seine Komponenten $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ bezüglich des Ortsäquatorsystems gegeben ist, die Komponenten v_1, v_2, v_3 im Horizontsystem zu bestimmen:

$$2.44 \quad D_\Phi \begin{pmatrix} \bar{v}_3 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = v_2$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 \cos \Phi + \bar{v}_1 \sin \Phi &= v_3 \\ -\bar{v}_3 \sin \Phi + \bar{v}_1 \cos \Phi &= v_1 \\ \bar{v}_2 &= v_2 \end{aligned}$$

num. Beispiel und Fig. 2.g

$$\begin{aligned} \varphi &= -60^\circ; \Phi = 150^\circ \\ \bar{v}_3 &= -6, \bar{v}_1 = -2, \bar{v}_2 = 3 \\ v_3 &= 4.20, v_1 = 4.73, v_2 = 3 \end{aligned}$$

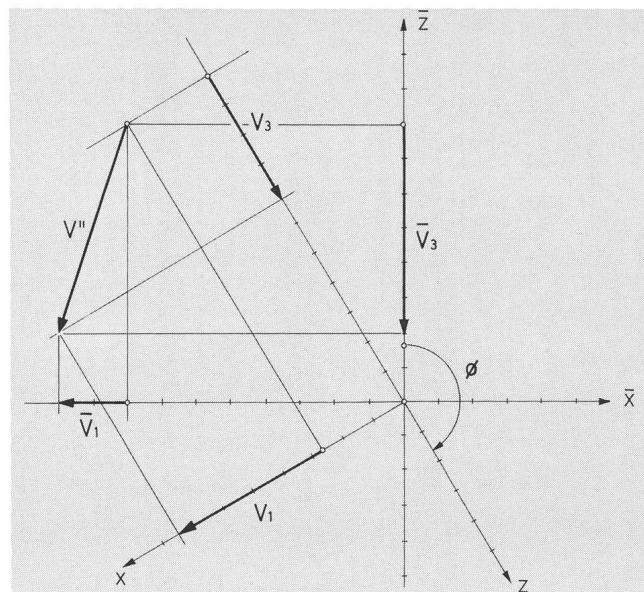


Fig. 2.g: v'' ist der Aufriss des Vektors v . Der Vektor v hat eine Komponente v_2 , die bei einem rechtsorientierten Koordinatensystem nach hinten positiv gezählt würde; diese Komponente bleibt bei der Drehung unverändert. Die Figur entspricht dem numerischen Beispiel.

Sind die Polarkoordinaten t, δ, r gegeben (Fig. 2.h), so müssen diese zuerst in rechtwinklige $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ umgewandelt, nachher die Drehung ausgeführt und schliesslich (x, y, z) in Polarkoordinaten a, h, r zurückverwandelt werden.

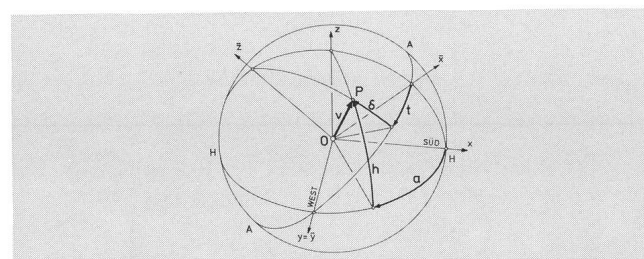


Fig. 2.h

Dies ist die einfachste und zuverlässigste Methode, um mit einem entsprechenden Taschenrechner das System:

$$2.45 \quad \begin{aligned} \cos \Phi \sin \delta + \sin \Phi \cos \delta \cos t &= \sin h \\ -\sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos t &= \cos h \cos a \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin a \end{aligned}$$

zu lösen. Nach den im ORION 164 S. 36–38 gegebenen Hinweisen sind die Werte Φ, t, δ, r einzugeben und nach 19 Programmschritten erscheint das Resultat a, h, r , dabei werden ausser den vier Stackregistern keine Speicher belegt.

Die gleichen Programmschritte leisten den Übergang von $-\Phi, a, h, r$ nach t, δ, r

num. Beispiele:

$$\begin{aligned} \varphi &= -60^\circ, \Phi = -150^\circ & a &= 100^\circ & h &= 20^\circ & r &= 8 \\ & & t &= 71.351^\circ & \delta &= -12.393^\circ & r &= 8 \\ \Phi &= 150^\circ & t &= 100^\circ & \delta &= -20^\circ & r &= 4 \\ & & a &= 71.351 & h &= 12.393 & r &= 4 \end{aligned}$$

vgl. S. 22 bzw. S. 23

B 5. Programme und Beispiele für HP-Rechner

Alle HP (Hewlett-Packard) Taschenrechner besitzen vier Stack-Register, deren Namen, X, Y, Z, T man zweckmässigerweise an die Ecken eines Quadrates schreibt:

Z	Y
T	X

Der Inhalt des Registers X wird jeweils angezeigt. Zur Verschiebung der Inhalte stehen Befehle zur Verfügung.

ENTER kopiert den Inhalt des X-Registers in das Y-Register und verschiebt die Inhalte von Y und Z je im Gegenuhrzeigersinn; der Inhalt von T geht verloren. Das Register X ist bereit zur Aufnahme einer neuen Zahl.

X<>Y Austausch der Inhalte von X und Y

RDN «Roll Down» zyklische Vertauschung im Uhrzeigersinn

R↑ «Roll up» zyklische Vertauschung im Gegenuhrzeigersinn

R↑ Ist äquivalent mit **RDN**, **RDN**, **RDN**

X<>Z Ist äquivalent mit **X<>Y**, **RDN**, **X<>Y**,

R↑, **X<>Y**

X<>T Ist äquivalent mit **R↑**, **X<>Y**, **RDN**

P←R «to rectangular» α in Y zu y in Y
 r in X x in X

R←P «to polar» y in Y zu α in Y
 x in X r in X

Drehung um x-Achse

$-\epsilon =$	-23.44	ENTER	↑	Eingabe
$L =$	120.	ENTER	↑	
$B =$	10.	ENTER	↑	
$r =$	4.			
		XEQ "DX"		
		01♦LBL "DX"		
		FIX 2		
$q' = r \cos B$	3.94	***		polare zu
$z' = r \sin B$	0.69	***		rechtwinklige
q'	3.94	***		Koordinaten
$x' = r \cos B \cos L$	-1.97	***		Ordnen des
z'	0.69	***		Stack
$y' = r \cos B \sin L$	3.41	***		
q'	3.48	***		Drehung
α'	11.51	**		
		X<>Y		Drehwinkel Φ
$\Phi = -\epsilon$	-23.44	**		
$\alpha^* = \alpha' - \Phi$	34.95	**		
q'	3.48	***		
$y^* = r \cos \delta \sin AR$	2.85	***		Ordnen des
$z^* = r \sin \delta$	1.99	***		Stack
y^*	2.85	***		
$x' = x^* = r \cos \delta \cos AR$	-1.97	***		rechtwinklige
$q^* = r \cos \delta$	3.47	***		zu polare
z^*	1.99	***		Koordinaten
q^*	3.47	***		
		P←P		
$r =$	4.00	***		
$\delta =$	29.91	**		Ausgabe
$AR =$	124.61	**		
		END		

Drehung um y-Achse

$\Phi =$	150.	ENTER	↑	Eingabe
$t =$	100.	ENTER	↑	
$\delta =$	-20.	ENTER	↑	
$r =$	4.			
		XEQ "DY"		
		01♦LBL "DY"		
		FIX 2		
$\bar{q} = r \cos \delta$	3.76	***		polare zu
$\bar{z} = r \sin \delta$	-1.37	***		rechtwinklige
\bar{q}	3.76	***		Koordinaten
$\bar{x} = r \cos \delta \cos t$	-0.65	***		Ordnen
$\bar{y} = r \cos \delta \sin t$	3.70	***		
\bar{z}	-1.37	***		Drehung
q'	1.52	***		
$\bar{\alpha}$	-154.49	**		Drehwinkel Φ
Φ	150.00	**		
$\alpha = \bar{\alpha} - \Phi$	-304.49	**		
q'	1.52	***		
$z = r \sin h$	0.86	***		Ordnen
$x = r \cos h \cos a$	1.25	***		
$q = r \cos h$	3.91	***		rechtwinklige
$z = r \sin h$	0.86	***		zu polare
q	3.91	***		Koordinaten
		P←P		
$r =$	4.00	***		
$h =$	12.39	**		Ausgabe
$a =$	71.35	**		
		END		

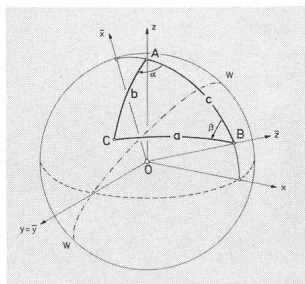


Fig. 2k: A B C: Ecken des sphärischen Dreiecks.
w-w: Schnitt der winkelhalbierenden Ebene mit der Kugel. System K ist spiegelbildlich zum System \bar{K} bezüglich der Ebene w-w.

B 6. Programm und Beispiel für TI-Rechner¹⁾

TI (Texas Instruments) Taschenrechner besitzen folgende Befehle, deren Kenntnis für die angeführten Programme nützlich sind:

X:T Austausch der Inhalte des X- und des T-Registers

EXC n Austausch der Inhalte des X- und des Registers n

RCL n Aufruf des Inhalts des Registers n in das Register X

\mathbf{P} / \mathbf{R} «to rectangular» r in T zu x in T
 a in X y in X

IP / R «to polar» x in T zu r in T
 y in X a in X

Spiegelung an Ebene durch y -Achse
(sphärisches Dreieck)

$c =$	70. ENTER		$c =$	70. STD	
$a =$	110. ENTER	Eingabe	$a =$	70.000 STD	Eingabe
$b =$	130. ENTER		$b =$	110. STD	
$r =$	7. XEQ "DP"		$r =$	110.000 XIT	
	01+LBL "DR"			130. XIT	
$z = r \cos b$	FIX 3 P-R	polare zu rechtwinklige Koordinaten	$q = r \sin b$	130. P/R	polare zu rechtwinklige Koordinaten
$q = r \sin b$	-4.500 **		$z = r \cos b$	5.362 XIT	
$x = r \sin b \cos \alpha$	5.362 **			5.362311102 XIT	
$y = r \sin b \sin \alpha$	P-R			-4.499513268 EXC	
z	-1.834 **	Ordnen des Stack	$y = r \sin b \sin \alpha$	110.000 P/R	Ordnen
q'	X<>Y **		z	110. EXC	
α'	X<>T **		$x = r \sin b \cos \alpha$	5.039 XIT	
$\bar{\alpha} = c - \alpha'$	R-P **	Spiegelung	α'	5.038924173 EXC	
	4.859 **		$- \alpha'$	-4.500 XIT	Spiegelung
q'	FIX 3 P-R	c Winkel zwischen z- und \bar{z} -Achse	c	-4.499513268 XIT	
$\bar{z} = r \cos a$	-157.824 ***		$\bar{\alpha} = c - \alpha'$	-1.834 IP/R	
$\bar{x} = r \sin a \cos \beta$	227.824 ***		$\bar{x} = r \sin a \cos \beta$	-1.834018412 IP/R	
$\bar{q} = r \sin a$	R↑ **		$\bar{\alpha}'$	202.176 +	
$\bar{z} = r \cos a$	P-R **	Ordnen	$- \alpha'$	-202.1759926 RCL	
	3.262 *			0	
	FIX 3 P-R	rechtwinklige zu polare Koordinaten	c	70.000 =	
$r =$	7.000 **		$\bar{\alpha} = c - \alpha'$	70. P/R	
$a =$	117.778 ***	Ausgabe	$\bar{x} = r \sin a \cos \beta$	-132.1759926 P/R	
$\beta =$	X<>Y ***		$\bar{z} = r \cos a$	-3.601 XIT	Ordnen
	END ***		$\bar{y} = r \sin a \sin \beta$	-3.600888175 XIT	
			$\beta =$	-3.262 EXC	
				-3.26233774 EXC	
				5.039 IP/R	rechtwinklige zu polare Koordinaten
				5.038924173 EXC	
				125.550 EXC	
				125.5501489 EXC	
				-3.262 XIT	
				-3.26233774 XIT	
				6.193 IP/R	
				6.193315144 IP/R	
				117.778	

¹⁾ In freundlicher Weise mitgeteilt von Herrn Pierre Weber, 8704 Herrliberg Postfach.