Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1992)

Heft: 1

Artikel: Zu den dynamischen Methoden in der Versicherungsmathematik : neue Bedingungen, die das Bestehen relativer finanzieller Beharrungszustände gewährleisten / Anwendung in der Krankenversicherung

Autor: Huber, Hugo

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967250

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

HUGO HUBER, Freiburg

Zu den dynamischen Methoden in der Versicherungsmathematik: Neue Bedingungen, die das Bestehen relativer finanzieller Beharrungszustände gewährleisten / Anwendung in der Krankenversicherung

Meinem verehrten Lehrer Peter Thullen
zum 85. Geburtstage

1 Einleitung

Diese Arbeit will einen Beitrag zur "dynamischen Mathematik" der Sozialen Sicherheit leisten und gleichzeitig die Anwendbarkeit dieser Mathematik in der Krankenversicherung aufzeigen.

Unter "dynamischer Mathematik" der Sozialen Sicherheit soll "eine Mathematik verstanden werden, welche die demographischen und wirtschaftlichen Faktoren, soweit sie Einfluss auf die Finanzierung der Systeme der Sozialen Sicherheit haben, bewusst und unmittelbar in die Grundwerte und Rechenmechanismen integriert und daher es möglich macht, diesen Einfluss mathematisch getrennt nach den verursachenden Faktoren zu erfassen und in Evidenz zu setzen und zugleich Hintergründe und zwangsläufige Entwicklungen zu verdeutlichen" (Zitat aus [4], S. 3).

Es wird von einem System von Einnahmen, Ausgaben und Reserve ausgegangen. Zugrunde gelegt sind kontinuierliche oder dynamische Prozesse; neben dem technischen Zinsfuss oder der Zinsintensität werden auch andere (wirtschaftliche oder demographische) Wachstumsraten bzw. Intensitäten herangezogen. In jedem solchen System gilt:

$$\text{Reserveänderung} = \text{Zinsen} + \text{Prämieneinnahmen} - \text{Ausgaben} \tag{A}$$

Der Begriff des *relativen finanziellen Beharrungszustandes*, in dem die Wachstumsintensitäten der Einnahmen, Ausgaben und Reserve gleich sind, ist grundlegend und erleichtert die versicherungsmathematische Behandlung der dynamischen Prozesse. Erinnert sei ebenfalls an den wichtigen Begriff des relativen Beharrungszustandes einer Bevölkerung, in welchem die Altersstruktur der zugehörigen Personen (nicht notwendig deren absolute Anzahl) unverändert bleibt.

Wir gehen von einer offenen Risikogemeinschaft aus, einer Bevölkerung, die sich durch Neuzugänge stets erneuert und somit die Eigenschaft der Perennität, der unbeschränkten Dauer, besitzt. Von einem bestimmten Zeitpunkt an wird man eine konstante Altersstruktur über die Neuzugänge annehmen.
Im Ablauf einer *Projektion* (Vorausberechnung des Versicherungssystems für einen genügend langen Zeitraum) unterscheidet man im allgemeinen zwei Phasen:

a) *Anlaufphase*, die zu Beginn überwiegend durch die Anfangsbedingungen geprägt ist, in der sich aber nach und nach der Einfluss der Neugenerationen spürbar macht, bis ein relativer demographischer und finanzieller Beharrungszustand erreicht ist, und
b) die *zeitlich unbegrenzte Endphase* dieses Zustandes, welche mathematisch voll erfasst werden kann.

In dieser Arbeit werden zuerst neue Bedingungen aufgestellt, die das Bestehen des relativen finanziellen Beharrungszustandes gewährleisten:

> Bei *konstanten* Wachstumsintensitäten befindet sich ein Versicherungssystem bereits in einem relativen finanziellen Beharrungszustand, es sei denn, die Finanzierung geschehe durch Umlage.
> Konvergieren die Wachstumsintensitäten für $t \to \infty$, so konvergiert, abgesehen von Ausnahmefällen, das Versicherungssystem gegen einen relativen finanziellen Beharrungszustand.

Danach wird auf die Anwendung in der Krankenversicherung eingegangen. Die Struktur und Dynamik der schweizerischen Krankenpflegekosten werden beschrieben. Im relativen finanziellen Beharrungszustand werden für variable Zins- und Kostensteigerungssätze Gesamteinnahmen, Prämien und Reserven nach dem Anwartschaftsdeckungs- und dem Umlageverfahren berechnet und der Einfluss verschiedener Finanzierungsverfahren auf die Prämien aufgezeigt.

Einleitend werden an die Definition der Wachstumsintensität und an die Anwendung der kontinuierlichen Methode bei der Zinseszinsrechnung erinnert und die notwendigen Begriffe eingeführt. Bezüglich der Bezeichnungen halten wir uns weitgehend an [4].

2 Neue Bedingungen, die das Bestehen relativer finanzieller Beharrungszustände gewährleisten

2.1 *Allgemeines zu Wachstumsintensitäten*

Allgemein ist die Wachstumsintensität $\alpha(t)$ einer differenzierbaren Zeitfunktion $N(t)$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}.$$

Ist $\alpha(t)$ bekannt, so lässt sich durch Integration die zugehörige Zeitfunktion $N(t)$ wie folgt ausdrücken:

$$N(t) = N(0)e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}. \tag{1}$$

Weil die Verzinsung im folgenden eine wichtige Rolle spielt, wenden wir obige Definition auf die bekannte Kapitalfunktion an: Werden die Zinsen jeweils am Jahresende dem Kapital $K(0)$ zugeschrieben, so wächst dieses bei einem Zinsfaktor r (Zinsfuss $i = r - 1$) nach n Jahren auf den Betrag

$$K(n) = K(0)r^n.$$

Bei der kontinuierlichen Verzinsung ist nach einer beliebigen Zeit t

$$K(t) = K(0)r^t.$$

Da

$$K'(t) = K(0)r^t \ln(r) = \ln(r)K(t),$$

gilt für die Zinsintensität

$$\delta = \frac{K'(t)}{K(t)} = \ln(r) = \ln(1+i)$$

und für die Kapitalfunktion

$$K(t) = K(0)e^{\delta t}.$$

Hier ist die Zinsintensität δ konstant vorausgesetzt. Die Zinsintensität (instante Verzinsung) liegt leicht unter dem jährlichen Zinsfuss i; z.B. ist die zu $i = 0.05$ gehörige Zinsintensität $\delta = 0.0488$.
Ist die Zinsintensität eine Funktion der Zeit, so ist der im Intervall $[0, t)$ erzeugte Zins gegeben durch die Formel:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t K'(\tau)\, d\tau = \int_0^t \delta(\tau) K(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

2.2 *Die Fundamentalgleichung*

Zum Folgenden zunächst einige Bezeichnungen, wobei bemerkt sei, dass die verwendeten Zeitfunktionen nicht negativ, stetig und wo notwendig auch differenzierbar vorausgesetzt sind:

$A(t)$ = Prämieneinnahmefunktion; $\int_{t_0}^{t_1} A(t)\, dt$ = Gesamtprämieneinnahmenim Zeitintervall $[t_0, t_1]$
$B(t)$ = Ausgabefunktion
$V(t)$ = Reserve im Zeitpunkt t
$\delta(t)$ = Zinsintensität

$a(t)$, $b(t)$ und $v(t)$ seien die zu $A(t)$, $B(t)$ und $V(t)$ gehörenden Wachstumsintensitäten.
Wir nehmen an, dass im Intervall $[t_0, t_1]$ das mit $A(t)$, $B(t)$ und $V(t)$ gekennzeichnete System sich im finanziellen Gleichgewicht befindet. In diesem Fall sind die drei Funktionen durch die bekannte Fundamentalgleichung

$$V(t)\{\delta(t) - v(t)\} = B(t) - A(t) \tag{3}$$

verbunden. Wir wollen die Herleitung dieser Beziehung andeuten (vgl. dazu [4], S. 52 ff.):
Im Zeitintervall $[t, t + h)$ ist der Zuwachs der Reserve unter Berücksichtigung von (A) und (2) gegeben durch:

$$V(t + h) - V(t) = \int_t^{t+h} [\delta(\tau)V(\tau) + A(\tau) - B(\tau)]\, d\tau\,.$$

Die Division durch die Intervallänge h und der Grenzübergang $h \to 0$ führt zur Differentialgleichung

$$V'(t) = \delta(t)V(t) + A(t) - B(t)$$

und nach Ersetzen von

$$V'(t) = v(t)V(t)$$

schliesslich zur obigen Fundamentalgleichung.

2.3 *Neue Bedingungen für das Bestehen relativer finanzieller Beharrungszustände*

Wir erinnern an die Definition des relativen finanziellen Beharrungszustandes für ein beliebiges, aber festes Zeitintervall:

Definition: Ein Versicherungssystem befindet sich im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ in einem *relativen finanziellen Beharrungszustand*, falls dort die Wachstumsintensitäten der Prämieneinnahmefunktion, der Ausgabefunktion und der Reserve gleich sind, also falls $a(t) = b(t) = v(t) = \widetilde{\varrho}(t)$.

Zuerst untersuchen wir ein Versicherungssystem bei geometrischem Wachstum, das heisst bei konstanten Wachstumsintensitäten:

Satz 1: Haben die Funktionen $A(t)$, $B(t)$ und $V(t)$, mit $A(t_0)$ und $B(t_0)$ ungleich Null, im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ konstante Wachstumsintensitäten, so befindet sich das System entweder in einem relativen finanziellen Beharrungszustand oder die Finanzierung geschieht durch Umlage.

Beweis: Sind die Wachstumsintensitäten konstant, so folgt aus der Fundamentalgleichung wegen (1):

$$V(t_0)e^{v(t-t_0)}\{\delta - v\} = B(t_0)e^{b(t-t_0)} - A(t_0)e^{a(t-t_0)}$$

oder

$$V(t_0)\{\delta - v\} = B(t_0)e^{(b-v)(t-t_0)} - A(t_0)e^{(a-v)(t-t_0)}.$$

Nach Differenzierung und kleiner Umformung bekommen wir

$$(a - v)A(t_0)e^{a(t-t_0)} = (b - v)B(t_0)e^{b(t-t_0)}$$

oder

$$(a-v)A(t_0) = (b-v)B(t_0)e^{(b-a)(t-t_0)} = \text{Konstante}\,.$$

Gemäss Voraussetzung sind $A(t_0)$ und $B(t_0)$ ungleich Null; somit verschwinden entweder die übrigen Faktoren, also $a = v$ und $b = v$, oder der Exponent, das heisst $a = b$. Im ersten Fall ist $a = b = v$; falls $a = b$, ist $a = b = v$ oder $A(t_0) = B(t_0)$ und somit $A(t) = B(t)$, also Umlage. Damit ist der Satz bewiesen.

Ein weiteres Kriterium für das Vorliegen eines relativen finanziellen Beharrungszustandes liefert

Satz 2: Im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ seien die Differenz $\delta(t) - v(t)$ konstant und $A(t_0)$ und $B(t_0)$ ungleich Null. Gilt dann entweder $a(t) = v(t)$ oder $b(t) = v(t)$, so ist $a(t) = b(t) = v(t)$.

Wir führen den Beweis für $a(t) = v(t)$. Der Schluss für $b(t) = v(t)$ ist analog. Falls $a(t) = v(t)$, so gilt wegen (1)

$$V(t) = \frac{V(t_0)}{A(t_0)}A(t)\,.$$

Hieraus und unter Berücksichtigung der Fundamentalgleichung folgt

$$\begin{aligned} B(t) &= V(t)\{\delta(t) - v(t)\} - A(t) \\ &= A(t)\left[\frac{V(t_0)}{A(t_0)}\{\delta(t) - v(t)\} - 1\right]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\beta = \left[\frac{V(t_0)}{A(t_0)}\{\delta(t) - v(t)\} - 1\right]$ ist konstant, deshalb ist

$$B(t) = \beta A(t) \quad \text{und} \quad B'(t) = \beta A'(t)\,.$$

Folglich ist

$$b(t) = \frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} = a(t)$$

und damit

$$a(t) = b(t) = v(t)\,.$$

Wenn für $t \to \infty$ die Wachstumsintensitäten konvergieren, so lässt Satz 1 vermuten, dass alle Intensitäten den gleichen Grenzwert haben, dass sich das System also einem

relativen finanziellen Beharrungszustand nähert. Wir gehen auf diese Frage ein und bezeichnen die (endlich vorausgesetzten) Grenzwerte von $a(t)$, $b(t)$, $v(t)$ und $\delta(t)$ mit a, b, v und δ.
Zunächst lässt sich folgendes beweisen:

Lemma: Sind im Falle der Konvergenz der Wachstumsintensitäten $a(t)$, $b(t)$, $v(t)$ und $\delta(t)$ die Werte $A(t_0)$, $B(t_0)$ und $V(t_0)$ verschieden von Null, so sind mindestens zwei der Grenzwerte a, b, v gleich, und der dritte ist kleiner oder gleich den beiden andern, ausser es sei $\delta = v$.

Zum Beweis zeigen wir:

(i) ist v grösser als a und b, so ist $\delta = v$ oder $V(t_0) = 0$.
(ii) ist a grösser als b und v, bzw. b grösser als a und v, so ist $A(t_0) = 0$, respektive $B(t_0) = 0$.

Im Falle (i) gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $t' > t_0$, so dass

$$v(t) > a(t) + \varepsilon \quad \text{und} \quad v(t) > b(t) + \varepsilon \quad \text{für} \quad t > t'.$$

Aus der Fundamentalgleichung folgt

$$V(t')\{\delta(t) - v(t)\} = B(t')e^{\int_{t'}^{t}[b(\tau)-v(\tau)]\,d\tau} - A(t')e^{\int_{t'}^{t}[a(\tau)-v(\tau)]\,d\tau}$$

nun ist

$$\int_{t'}^{t}[a(\tau) - v(\tau)]\,d\tau \leq -\varepsilon(t - t') \quad \text{und} \quad \int_{t'}^{t}[b(\tau) - v(\tau)]\,d\tau \leq -\varepsilon(t - t').$$

Mit $t \to \infty$ streben beide Integrale gegen $-\infty$ und die entsprechenden Werte der Exponentialfunktion gegen Null, also $\lim V(t')\{\delta(t) - v(t)\} = 0$. Somit ist entweder $\delta = v$ oder $V(t') = 0 = V(t_0)$.
Ist a grösser als b und v, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $t' > t_0$, so dass $a(t) > b(t) + \varepsilon$ und $a(t) > v(t) + \varepsilon$ für $t > t'$.
Wir formen die Fundamentalgleichung um zu

$$V(t')e^{\int_{t'}^{t}[v(\tau)-a(\tau)]\,d\tau}\{\delta(t) - v(t)\} = B(t')e^{\int_{t'}^{t}[b(\tau)-a(\tau)]\,d\tau} - A(t').$$

Da $v(\tau) - a(\tau) < -\varepsilon$ und $b(\tau) - a(\tau) < -\varepsilon$ für $\tau > t'$, streben auch hier wieder beide Integrale gegen $-\infty$ und die entsprechenden Werte der Exponentialfunktion gegen Null. Weil $\delta(t) - v(t)$ beschränkt, muss $A(t')$ und damit auch $A(t_0)$ Null sein.

Der Schluss für den Fall, das b grösser als a und v, ist analog.

Weiter gilt:
Ist ein Grenzwert strikt kleiner als die beiden andern, so ist für $t \to \infty$ die zugehörende Zeitfunktion gegenüber den beiden andern vernachlässigbar. Das heisst, falls

(i) $v < a = b$, ist: $\lim \dfrac{V(t)}{A(t)} = \lim \dfrac{V(t)}{B(t)} = 0;$

(ii) $b < a = v$; ist: $\lim \dfrac{B(t)}{V(t)} = \lim \dfrac{B(t)}{A(t)} = 0;$

(iii) $a < b = v$, ist: $\lim \dfrac{A(t)}{V(t)} = \lim \dfrac{A(t)}{B(t)} = 0;$

Wir führen den Beweis für (i); die übrigen Fälle werden analog bewiesen.
Falls $v < a = b$, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $t' > t_0$, so dass $a(t) > v(t) + \varepsilon$ für $t > t'$.
Dann ist

$$0 \leq \frac{V(t)}{A(t)} = \frac{V(t')}{A(t')} e^{\int_{t'}^{t} [v(\tau) - a(\tau)]\, d\tau} \leq \frac{V(t')}{A(t')} e^{-\varepsilon(t-t')} \to 0\,.$$

Also $\lim \dfrac{V(t)}{A(t)} = 0$. Analog ist $\lim \dfrac{V(t)}{B(t)} = 0$.

Für $v < a = b$, gilt weiter $\lim \dfrac{A(t)}{B(t)} = 1$, also Umlage.

Es gilt demnach:

Satz 3: Haben im Zeitintervall $[t_0, \infty)$ die Funktionen $A(t)$, $B(t)$ und $V(t)$ für $t \to \infty$ konvergente Wachstumsintensitäten, so gilt: das System strebt entweder gegen einen relativen finanziellen Beharrungszustand oder die Finanzierung konvergiert gegen die Umlage oder $A(t)$ oder $B(t)$ ist gegenüber $V(t)$ vernachlässigbar.

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir mit einem Beispiel, dass trotz Konvergenz nicht notwendig alle Intensitäten den gleichen Grenzwert haben. Die Finanzierung strebt dann gegen die Umlage oder $A(t)$ oder $B(t)$ ist gegenüber $V(t)$ vernachlässigbar:
Für die Ausgaben-, Reserve- und Zinsfunktion gelte $b(t) = b$, $v(t) = v$, $\delta(t) = \delta$. Die Intensität der Einnahmefunktion kann aufgrund der Fundamentalgleichung berechnet werden:

$$a(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{bB(t_0)e^{b(t-t_0)} - (\delta - v)vV(t_0)e^{v(t-t_0)}}{B(t_0)e^{b(t-t_0)} - (\delta - v)V(t_0)e^{v(t-t_0)}}$$

$a(t)$ konvergiert jeweils gegen den grösseren der Werte b oder v:
Ist $v < b$, teilt man Zähler und Nenner durch $e^{b(t-t_0)}$ und sieht, dass mit t gegen Unendlich $a(t)$ gegen b strebt. Analog überzeugt man sich, dass bei $v > b$ $a(t)$ gegen v konvergiert. Falls $v = b$, ist auch $a(t) = b$.

3 Anwendung in der Krankenversicherung

3.1 Einleitende Bemerkungen

Im folgenden setzen wir das Bestehen eines relativen finanziellen Beharrungszustandes voraus.
Beharrungszustände sind Denk- und Rechenmodelle, die jedoch der Wirklichkeit während langer Zeitperioden nahe kommen können. Die dynamische Mathematik erlaubt mit Hilfe einfacher Modellrechnungen vorgesehene Varianten durchzuspielen, sich über die langfristigen Auswirkungen der möglichen Realisierungen verschiedener Hypothesen Klarheit zu verschaffen und Zusammenhänge aufzudecken.
Zuerst wird die Struktur und Entwicklung der schweizerischen Krankenpflegekosten beschrieben. Man darf dabei nicht vergessen, dass die Krankenpflegeversicherung nur ein Teil der Gesundheitsausgaben deckt, vergleiche dazu [2]. In der Schweiz können die Prämien nach Eintrittsaltersgruppen abgestuft sein und dürfen bei den Frauen höchstens 10 % über denjenigen der Männer liegen. Der Erwachsene bleibt in der Regel in der bei seinem Eintritt zugeteilten Gruppe. Die Beiträge hängen dann nicht mehr vom laufenden Alter ab. Bei den Erwachsenen ist die Prämienaltersgruppe für Eintritte in den Altern von 26 bis 30 Jahren am tiefsten. Zum Eintrittsalter 26 berechnen wir für veränderliche Zins- und Kostensteigerungssätze jährliche Durchschnittsprämien nach dem Umlage- und Anwartschaftsdeckungsverfahren.
Dann gehen wir auf das Verhalten eines Versicherungssystems im relativen finanziellen Beharrungszustand ein. Hierzu sei erwähnt, dass in diesem Zustand die Verhältnisse

$$\frac{A(t)}{B(t)}, \quad \frac{V(t)}{B(t)}, \qquad \text{und} \quad \frac{A(t)-B(t)}{V(t)} \quad \text{usw.}$$

konstant sind (folgt direkt aus Gleichung (1)). Ebenso ist die Differenz

$$\delta(t) - \widetilde{\varrho}(t) = \frac{B(t)-A(t)}{V(t)}, \quad V(t) \neq 0 \tag{4}$$

konstant (Inhalt des Fundamentalsatzes des relativen finanziellen Beharrungszustandes). $\delta^* = \delta(t) - \widetilde{\varrho}(t)$ nennen wir die *reduzierte Zinsintensität*. Aus (4) folgt

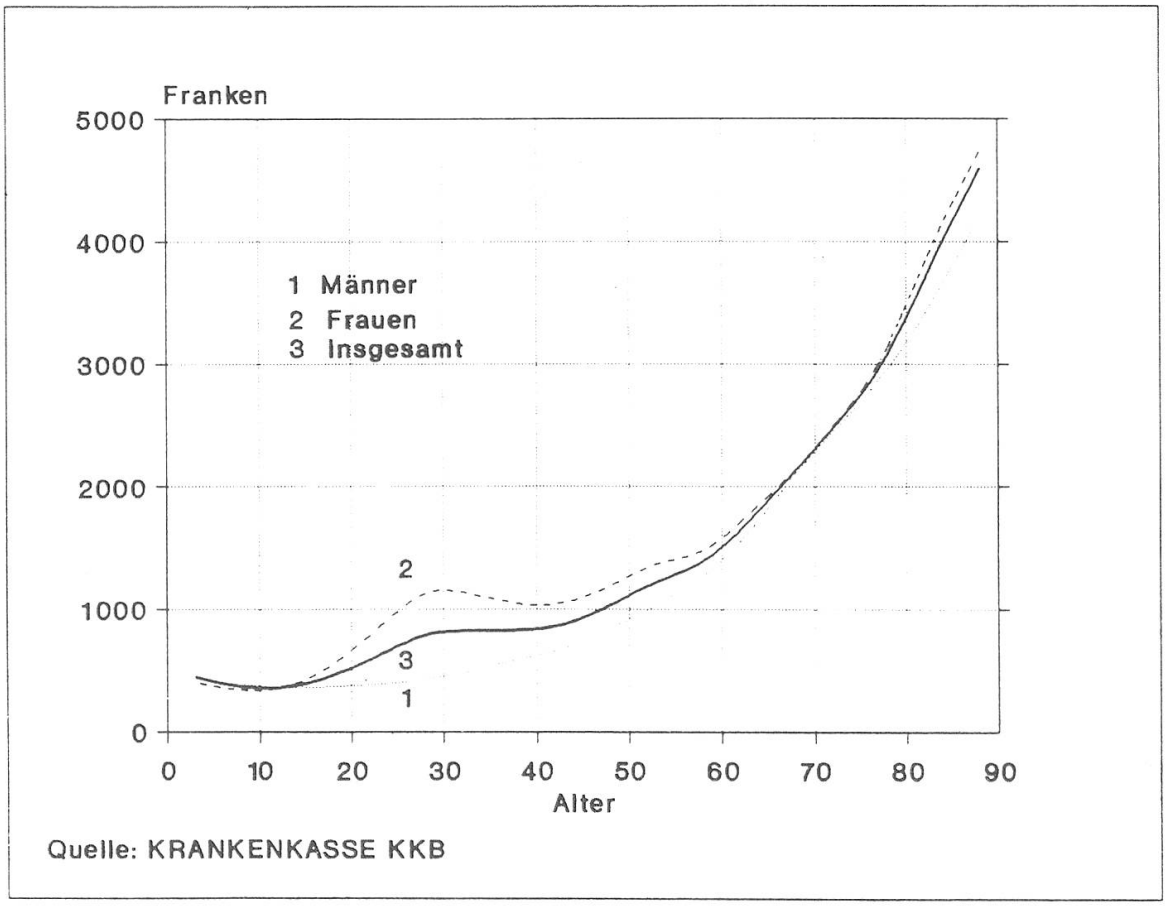
$$\frac{A(t)}{B(t)} = 1 - \frac{\delta^* V(t)}{B(t)}. \tag{4'}$$

Den Quotienten $\frac{V(t)}{B(t)}$ nennen wir hier *Grad der Kapitalisation*. Sind δ^* und $B(t)$ vorgegeben, so ist $A(t)$ durch den Grad der Kapitalisation bestimmt.

3.2 Die Struktur der Krankenpflegekosten nach Alter und Geschlecht und deren zeitliche Entwicklung

Grafik 1 stellt die Krankenpflegekosten pro Versicherten des Jahres 1990 der Krankenkasse KKB (rund 400 000 Versicherte) in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht dar.

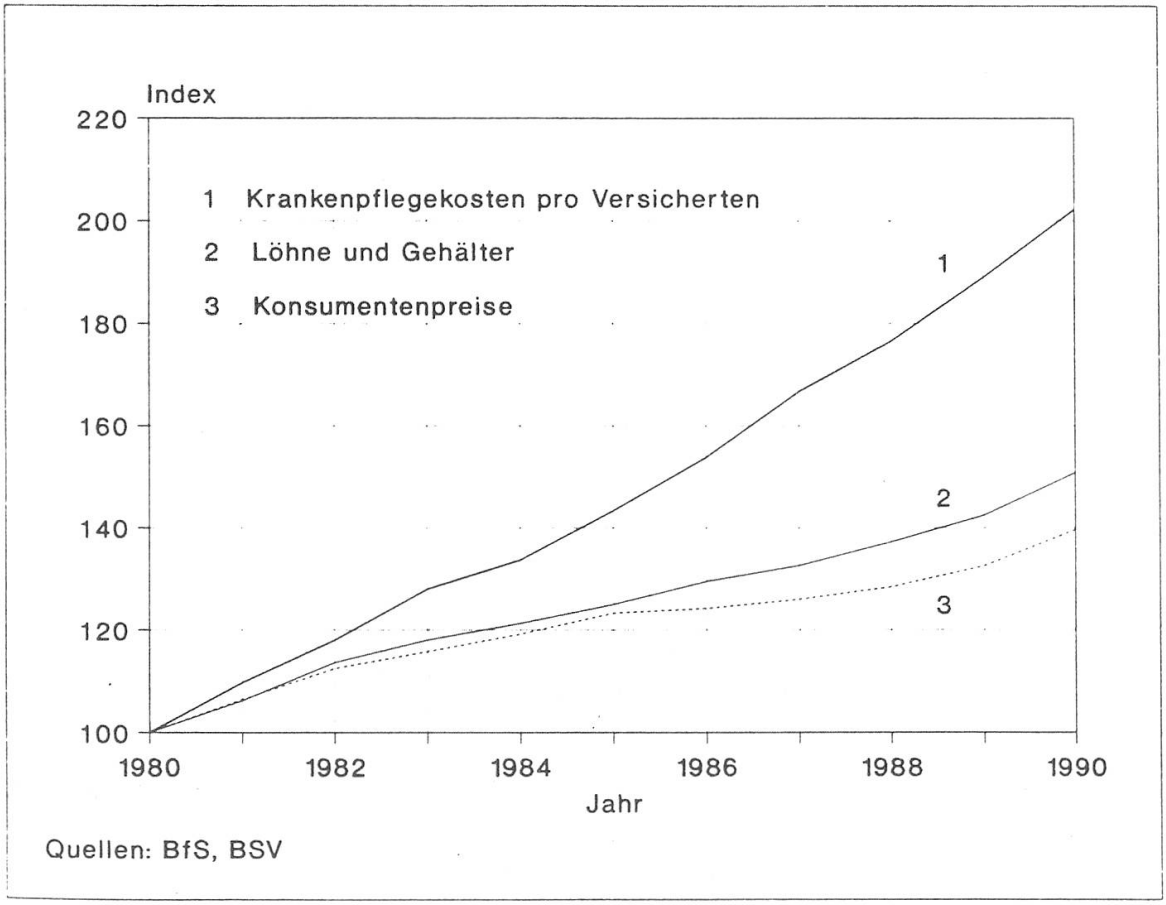
Grafik 1: Krankenpflegekosten pro Versicherten 1990



Die Kosten der Frauen steigen bereits ab Alter 15 an, erreichen bei 30 einen ersten Höhepunkt, sinken bis zum Alter 42 leicht ab und nehmen erneut zu. Bei den

Männern sind die Kosten etwa im Alter 20 am tiefsten, steigen von da an kontinuierlich, nähern sich ungefähr im Alter 70 der Kurve der Frauen und nehmen dann wiederum weniger stark zu. Die Durchschnittskosten betragen bei den Männern Fr. 911.– und bei den Frauen Fr. 1383.–.
Die Berechnung der Prämien basiert auf Kurve 3; diese Kostenwerte hängen vom Alter x und der Zeit t ab und werden im folgenden mit $k(x,t)$ bezeichnet.
In Grafik 2 wird die Entwicklung der Krankenpflegekosten mit derjenigen der Konsumentenpreise, der Löhne und Gehälter verglichen. Die zugrundeliegenden Informationen basieren auf der Statistik über die Krankenversicherung (Bundesamt für Sozialversicherung, BSV) und dem Statistischen Jahrbuch der Schweiz.

Grafik 2: Entwicklungsvergleich



Von 1980 bis 1990 haben sich die Kosten pro Versicherten verdoppelt. Die durchschnittliche jährliche Steigerung beträgt 7,3 %. Im selben Zeitraum sind die Konsumentenpreise bzw. Löhne und Gehälter jährlich nur um 3,4 bzw. 4,2 % gestiegen. Demnach sind jährlich die Kosten real um 3,8 % gewachsen.

Es hat sich gezeigt, dass in erster Näherung die Kosten in allen Altern gleichmässig steigen. Deshalb nehmen wir für das folgende an, dass

$$k(x,t) = e^{bt}k(x,0) = e^{bt}k(x)\,.$$

Der Einfluss der Alterung der schweizerischen Wohnbevölkerung auf die Kosten ist relativ gering: Durch Gewichtung der Kosten des Jahres 1990 mit der schweizerischen Wohnbevölkerung nach Alter und Geschlecht der Jahre 1980 und 1990 erhält man den alterungsbedingten Anteil der Kostensteigerung. Für die angegebene Periode beträgt dieser durchschnittlich pro Jahr nominell ein halbes Prozent. Hier werden wir diesen Einfluss nicht berücksichtigen.
Wir legen zwecks besserer Repräsentanz im folgenden die Überlebensordnung $l(x)$ der *Schweizerischen Sterbetafel SM/SF 78/83* zugrunde. So gewichtet ergeben sich folgende Durchschnittskosten:
ab Alter 0: Männer: Fr. 980.–, Frauen: Fr. 1390.–
ab Alter 26: Männer: Fr. 1270.–, Frauen: Fr. 1800.– und zusammen Fr. 1550.–.

3.3 Durchschnittsprämien nach dem Umlage- und Anwartschaftsdeckungsverfahren und zum Verhalten eines Versicherungssystems im relativen finanziellen Beharrungszustand

Im folgenden gehen wir von der Überlebensordnung $l(x)$ und den Kosten $k(x,t)$ aus und setzen voraus, dass

$$k(x,t) = e^{bt}k(x), \qquad b \quad \text{zwischen } 0.07 \text{ und } 0.08\,.$$

Zuerst berechnen wir Durchschnittsprämien nach dem Umlage- und Anwartschaftsdeckungsverfahren für die zugrundegelegte Bevölkerung ab Alter 26.

In der *Umlage*, wo Prämien = Durchschnittskosten, beträgt die *Durchschnittsprämie Fr. 1550.–*.

Für die Berechnung nach dem *Anwartschaftsdeckungsverfahren* erinnere man sich zuerst an die Bezeichnungen für den Fall $b = 0$ (absoluter Beharrungszustand); vergleiche dazu auch [5]. Hier ist die einmalige Nettoprämie zum Eintrittsalter x gegeben durch

$$Z(x;\delta) = \frac{1}{l(x)}\{l(x)k(x)+l(x+1)e^{-\delta}k(x+1)+l(x+2)e^{-2\delta}k(x+2)+\cdots\}$$

Im relativen finanziellen Beharrungszustand berechnen sich die entsprechenden Grössen mit der reduzierten Zinsintensität $\delta^* = \delta(t) - b$; vgl. dazu auch [4], S. 59

(Hauptsatz über die Grundstruktur der Prämien im relativen finanziellen Beharrungszustand). Wir wollen diesen Sachverhalt andeuten: Wachsen die Kosten jährlich mit der Intensität b, so erhält man für die einmalige Nettoprämie

$$\frac{1}{l(x)}\{l(x)k(x) + l(x+1)e^{-\delta}e^{b}k(x+1) + l(x+2)e^{-2\delta}e^{2b}k(x+2) + \cdots\}$$
$$= \frac{1}{l(x)}\{l(x)k(x) + l(x+1)e^{-(\delta-b)}k(x+1) + l(x+2)e^{-2(\delta-b)}k(x+2) + \cdots\}$$
$$= Z(x;\delta-b) = Z(x;\delta^*)\,.$$

Bei Kostensteigerungen zwischen 7 und 8 % und technischen Zinssätzen von 4 und 5 % erhält man für δ^* die Werte -0.02, -0.03 und -0.04. Wie wir gleich sehen, sind die zugehörigen Prämien zum Eintrittsalter 26 nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren sehr hoch. Zum Vergleich werden weitere δ^*-Werte mitberücksichtigt. Den zu δ^* gehörigen reduzierten Zinsfuss bezeichnen wir mit i^*.
Auf der Basis der Krankenpflegekosten KKB 1990 und der Schweizerischen Sterbetafel SM/SF 78/83 ergibt sich folgende Tabelle:

Tabelle 1: Prämien und Grad der Kapitalisation

i^*	δ^*	Prämie	A/B	V/B
5 %	0.049	1050	0.67	6.85
4 %	0.039	1110	0.72	7.40
0 %	0	1550	1	9.82
−2 %	−0.020	1900	1.22	10.87
−3 %	−0.031	2100	1.35	11.27
−4 %	−0.041	2300	1.48	11.57

Gehen wir von einem Rechnungszinsfuss von 4 % und einer Kostensteigerung von 8 % aus. Es ist dann $\delta^* = -0.04$, und die Jahresprämie beträgt Fr. 2300. – . Würde man mit zeitlich konstanten Kosten rechnen (statische Betrachtungsweise), so wäre $\delta^* = 0.04$ und die zugehörige Jahresprämie = Fr. 1110. – . In diesem Fall entstünde ein systematisches Defizit. Für die Behandlung dynamischer Kosten versagen statisch gedachte Verfahren.
Die Prämien wachsen mit abnehmendem δ^*. Dies lässt sich mittels Gleichung (4) erklären. Vorher veranschaulichen wir anhand Tabelle 2 den Zusammenhang zwischen dem Verhältnis A/B und dem Grad der Kapitalisation, vgl. Gleichung (4′).

Tabelle 2: Das Verhältnis Prämieneinnahmen zu Ausgaben

Grad der Kapitalisation $V(t)/B(t)$	$A(t)/B(t)$ $\delta^* = -0.04$	-0.02	0	0.04
0	1	1	1	1
0.5	1.02	1.01	1	0.98
2	1.08	1.04	1	0.92
4	1.16	1.08	1	0.84
6	1.24	1.12	1	0.76
8	1.32	1.16	1	0.68
10	1.40	1.20	1	0.60
11	1.44	1.22	1	0.56
12	1.48	1.24	1	0.52

Gleichung (4′) ist an kein festes Finanzierungsverfahren gebunden. Für vergleichbare Kapitalisationsgrade stellen wir eine sehr gute Übereinstimmung der Werte der Tabellen 1 und 2 fest. So lesen wir z.B. für $\delta^* = -0.02$ aus Tabelle 1 (Berechnung nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren) einen Kapitalisationsgrad von 10.87 und ein Prämienverhältnis von 1.22 ab; Tabelle 2 gibt für den Kapitalisationsgrad 11 das Prämienverhältnis 1.22 an.

Sehen wir uns nun Gleichung (4) näher an:

Ist $\delta^* > 0$, also $\delta(t) > \widetilde{\varrho}(t)$, so ist $B(t) > A(t)$, das heisst die Prämien sind tiefer als die Kosten.

Im Grenzfall $\delta^* = 0$ erhält man die reine Umlage: $A(t) = B(t)$. Die vollen Zinsen $V(t)\delta(t)$ dienen allein zur Aufstockung der Reserve, ohne dass sie zur Finanzierung des Systems beitragen. Die Reserve und ihre weitere Aufstockung wären nur sinnvoll unter der Annahme einer beschränkten Dauer des Beharrungszustandes mit einem späteren $\delta^* > 0$.

Falls $\delta^* < 0$, müssen die Prämien höher als die der reinen Umlage sein, um zusätzlich zur Deckung der Ausgaben eine immer höhere Aufstockung der Reserve zu sichern. Für diese Situation ist im allgemeinen die Umlage sinnvoll.

Hugo Huber
Eichholz
1735 Giffers

Literatur

[1] *Bohn, K.:* Die Mathematik der deutschen Privaten Krankenversicherung. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1980.

[2] *Huber, H.:* Gesundheitsmarkt Schweiz. Allgemeiner Teil: Kennziffern und Vergleichszahlen. Verlag Krankenkasse KKB, Bern 1991.

[3] *Thullen, P.:* Mathematische Methoden der Sozialen Sicherheit. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1977.

[4] *Thullen, P.:* Die Mathematik der sozialen Rentenversicherung unter dynamischen Bedingungen. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1982.

[5] *Schmid, H./Volkmer, J.P.:* Morbiditätsstatistik KKB 1974. Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker 1976.

Zusammenfassung

Die dynamische Mathematik der Sozialen Sicherheit geht von einer sogenannt offenen Risikogemeinschaft aus, einer Bevölkerung, die die Eigenschaft der Perennität, der unbeschränkten Dauer besitzt. Grundlegend ist der Begriff des relativen finanziellen Beharrungszustandes, in welchem per Definition die Wachstumsintensitäten der Einnahmen, Ausgaben und Reserve gleich sind.
In dieser Arbeit werden neue Bedingungen aufgestellt, die das Bestehen des relativen finanziellen Beharrungszustandes gewährleisten: Bei konstanten Wachstumsraten oder – unter bestimmten Konditionen – konstantem Verhältnis Reserve zu Einnahmen, respektive Reserve zu Ausgaben befindet sich ein Versicherungssystem bereits in einem solchen Zustand; konvergieren die Wachstumsintensitäten für t gegen Unendlich, so konvergiert, abgesehen von Ausnahmefällen, auch das Versicherungssystem gegen einen relativen finanziellen Beharrungszustand.
Es wird auch auf die Anwendung in der Krankenversicherung eingegangen: Struktur und Dynamik der schweizerischen Krankenpflegekosten werden beschrieben und – während der Dauer des relativen finanziellen Beharrungszustandes – der Einfluss verschiedener Finanzierungsverfahren auf die Prämien sichtbar gemacht.

Résumé

Les méthodes mathématiques dynamiques de la sécurité sociale supposent la pérennité des populations. Les états stationnaires relatifs (stables) présentent un intérêt particulier: ils supposent l'égalité des trois intensités de l'évolution (encaisse de primes, prestations et provisions).
L'article présente des conditions suffisantes pour l'éxistence d'un état stationnaire relatif. Il montre en particulier que la convergence des trois intensités de l'évolution lorsque t tend vers l'infini implique la convergence du système vers un état stationaire relatif.
Le modèle est utilisé enfin pour examiner différentes méthodes de financement de l'assurance-maladie en Suisse, spécialement dans le domaine des soins de santé.

Summary

The dynamic mathematical methods of social insurance are based on the assumption of a perennial population. Of a particular interest is the relative stationary (stable) situation, in which the three forces of growth (of premium income, of benefits and of the reserves) are equal.
We derive sufficient conditions for the relative stationary situation. It is also shown that convergence of the three forces of growth when t goes to infinity implies convergence of the system to the relative stationary situation.
The model is then applied to examine different funding methods in the context of Swiss health insurance, in particular health care.