Ruine et provision de fluctuation

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **79 (1979)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967120

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ruine et provision de fluctuation

par Marc-Henri Amsler, Lausanne

Introduction

A prendre en charge les sinistres tels qu'ils se présentent, et au rythme de leur survenance, les institutions d'assurance ne sont, en fin d'année, jamais à l'abri de surprises. L'alternance, irrégulière, des bonnes, des moins bonnes et des mauvaises années est un phénomène trop connu: elle représente le risque de l'assureur, risque qu'il doit dominer s'il désire durer. La théorie du risque collectif se propose notamment de mesurer le risque que court une compagnie d'assurance et de lui indiquer les moyens de réduire à un niveau acceptable le risque d'insolvabilité. La provision de fluctuation, absorbant d'une année à l'autre les irrégularités de parcours, est la marge de manœuvre par excellence dont doit disposer une institution d'assurance pour atteindre le niveau de solvabilité désiré.
La détermination du montant d'une provision de fluctuation a été l'objet, depuis fort longtemps, d'études théoriques et d'approches pragmatiques. Parmi les résultats marquants, citons les propositions du groupe de travail Buol qui, dans le cadre du Comité des Assurances de l'OCDE, a été chargé de l'étude des garanties financières qu'il y a lieu de requérir des entreprises d'assurance sur la vie: la «formule d'Ammeter» donne le montant de la provision de fluctuation minimale relative à un portefeuille d'assurance de risque pur [1], [4].
Dans un article antérieur [2], nous avons montré qu'il existe, pour tout portefeuille d'assurance, une relation mathématique fondamentale – dite «équation générale d'équilibre» – reliant les caractéristiques des risques acceptés aux caractéristiques des sécurités nécessaires. Pour autant qu'elle puisse être formulée sans trop de complications, cette équation d'équilibre devrait, en toute logique, fournir quelque connaissance sur le montant des provisions de fluctuation. C'est à cette recherche que le présent article va s'attacher.
L'équation générale d'équilibre d'un portefeuille d'assurance quelconque s'écrit, dans le cadre des hypothèses généralement admises en théorie du risque collectif:

$$(P + \Lambda)\frac{ln\,\varepsilon}{U} + \psi\left(\frac{-ln\,\varepsilon}{U}\right) = 0. \qquad (1)$$

Dans cette équation, les symboles signifient:

P: la prime pure exacte du portefeuille (prime pure de second ordre),

Λ: la marge de sécurité comprise dans la prime brute,

U: la provision de fluctuation,

ε: la borne supérieure acceptable pour la probabilité de ruine du portefeuille,

$\psi(s)$: la «fonction caractéristique réelle» du risque collectif. (Nous appelons «risque collectif» le montant total des sinistres intervenant pendant une année.)

Cette équation est exacte, en ce sens qu'elle ne fait appel à aucune approximation.

Lorsque l'on peut supposer que le risque collectif est une variable de type gamma, l'équation d'équilibre (1) s'écrit:

$$2 \cdot \Lambda' \cdot U + V \cdot ln\, \varepsilon = 0 \tag{2}$$

où Λ' et V représentent

Λ': une partie (bien définie) de la marge de sécurité Λ,

V: la variance du risque collectif.

En divisant cette dernière équation par P^2, on obtient l'équation suivante:

$$2 \cdot \lambda' \cdot u + \sigma^2 \cdot ln\, \varepsilon = 0 \tag{3}$$

liant les taux

$$\lambda' = \frac{\Lambda'}{P}, u = \frac{U}{P} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{V}{P^2}.$$

De cette équation, on tire aisément le taux u de la provision de fluctuation en fonction des autres paramètres:

$$u = \frac{|ln\, \varepsilon|}{2} \sigma^2 \cdot \frac{1}{\lambda'}. \tag{4}$$

La formule indique que, pour un risque collectif de type gamma, le taux u est proportionnel à la variance relative du risque collectif (σ^2) et inversément proportionnel à un taux réduit (λ') de la marge de sécurité, le coefficient de proportionnalité étant la moitié du logarithme de la borne supérieure ε de la probabilité de ruine. L'intuition peut accepter une telle formule; on s'étonnera néanmoins de sa simplicité.

Au sujet des divers facteurs intervenant dans le membre de droite de l'équation (4), il y a lieu de préciser ce qui suit:

Borne ε: la sécurité des institutions d'assurance exige ordinairement une borne ε de l'ordre de 0,5 à 1%. En choisissant $\varepsilon = 0{,}67\%$, on a $|ln\,\varepsilon| = 5$.

Taux λ': le taux partiel λ' est une fonction simple du taux complet λ de la marge de sécurité, voir à ce sujet l'annexe I de [2].

Variance σ^2: la variance dépend des éléments du risque, à savoir de la loi de distribution du nombre des sinistres et de celle du montant d'un sinistre.

Le paragraphe 1 ci-après s'emploiera à établir la formule de la variance relative σ^2 en fonction des éléments du risque, ce qui permettra d'expliciter, au § 2, la formule donnant le taux u de la provision de fluctuation. Au § 3, l'application de la formule générale, pour le taux u, à un portefeuille d'assurance de risque pur en cas de décès nous fera retrouver la «formule d'Ammeter». Un second exemple, au § 4, concernera la provision de fluctuation d'un portefeuille d'assurance-maladie. L'intention des institutions d'assurance n'étant pas de constituer des provisions de fluctuation par branche d'assurance, mais bien toutes branches réunies, nous étudierons dans une seconde partie (à paraître) du présent article, l'effet sur la provision de fluctuation de la réunion, en une seule entité, de plusieurs portefeuilles d'assurance. Enfin un exemple numérique un peu complet permettra de juger de l'efficacité de la méthode dans la recherche de situations optimales.
Dans toute la présente étude, nous ferons l'hypothèse que les risques collectifs considérés sont de type gamma.

§ 1 Ecart-type relatif du risque collectif

Notre premier objectif est de connaître ce dont est constitué la variance relative σ^2 intervenant dans la formule (4). Lorsqu'on désire connaître dans la pratique la variabilité du montant des sinistres, une première méthode consiste tout simplement à établir une statistique des montants des sinistres indemnisés. C'est ainsi qu'on opère en général en assurance-accidents ou en assurance-maladie pour les frais de guérison. Par contre, en assurance-incendie, l'usage est d'établir la variabilité du montant d'un sinistre à partir de deux éléments: la somme assurée et le taux du sinistre (c.-à.-d. le rapport entre le montant du sinistre et la somme assurée). En assurance d'indemnité journalière (accident et maladie), deux variables interviennent également: la durée de l'incapacité de travail et le montant de l'indemnité, lié ordinairement au revenu de l'assuré accidenté ou

tombé malade. Nous traiterons tout d'abord les types d'assurance pour lesquels le montant d'un sinistre s'exprime par une seule variable aléatoire puis compléterons les raisonnements lorsque le montant s'exprime par deux ou plusieurs variables.

1.1 Premier cas: le montant d'un sinistre s'exprime par une seule variable

Soient

X_1	le montant d'un sinistre,
$E(X_1)$	l'espérance mathématique,
$V(X_1)$	la variance,
$\psi_1(s)$	la fonction caractéristique réelle de la variable X_1[1].

Supposons le nombre N des sinistres intervenant en une année être une variable de Poisson pondérée, obtenue par pondération de la variable de Poisson H par une variable de structure W, et que de ces variables on connaisse:

	loi de Poisson	loi de structure
l'espérance mathématique	$E(H) = t$	$E(W) = 1$
la variance	$V(H) = t$	$V(W)$
la f.c.r.	$\psi_H(s)$	$\psi_W(s)$

Si, de plus, on admet – comme c'est le cas ordinairement en théorie du risque collectif – que les montants des sinistres sont statistiquement indépendants les uns des autres et statistiquement indépendants du nombre des sinistres, on sait que le montant annuel total des sinistres s'obtient par pondération de la variable autoconvoluée des montants X_1 des sinistres par le nombre N des sinistres, le nombre aléatoire N étant lui-même obtenu par pondération de la variable de Poisson H par la variable de structure W. Aux opérations de pondération des variables correspondent des opérations d'imbrication des f.c.r [2]: on a pour la f.c.r du risque collectif

$$\psi(s) = \psi_W\left[\psi_H(\psi_1(s))\right] \tag{5}$$

[1] La définition de la «fonction caractéristique réelle» $\psi(s)$ (en abrégé f.c.r) d'une variable aléatoire X, de fonction de répartition $F(x)$, est

$$\psi(s) = ln\left[\int e^{sx} \cdot dF(x)\right],$$

l'intégrale étant étendue à l'ensemble des valeurs prises par la variable X – cf [2] § 1 –.
On a toujours $\psi(0) = 0$.

L'espérance et la variance de X s'obtiennent par dérivation de $\psi(s)$ à l'origine. La première dérivée

$$\psi'(s) = \psi_W'\left[\psi_H(\psi_1(s))\right] \cdot \psi_H'\left[\psi_1(s)\right] \cdot \psi_1'(s)$$

donne à l'origine $s = 0$

$$E(X) = \psi'(0) = \psi_W'(0) \cdot \psi_H'(0) \cdot \psi_1'(0)$$

c'est-à-dire

$$E(X) = E(W) \cdot E(H) \cdot E(X_1) \tag{6}$$

Dans cette expression, $E(W)$ vaut 1 par définition, $E(H)$ vaut t, soit le nombre moyen des sinistres par année, et $E(X_1)$ le coût moyen d'un sinistre. Ainsi pour la prime pure P, on a

$$P = E(X) = t \cdot E(X_1). \tag{7}$$

Par une nouvelle dérivation de $\psi'(s)$, on trouve à l'origine

$$\begin{gathered} V(X) = \\ V(W) \cdot E^2(H) \cdot E^2(X_1) + E(W) \cdot V(H) \cdot E^2(X_1) + E(W) \cdot E(H) \cdot V(X_1) \end{gathered} \tag{8}$$

Si, d'une façon générale, le symbole σ^2 représente la variance relative d'une variable aléatoire, c'est-à-dire l'expression

$$\sigma^2 = \frac{V}{E^2}, \tag{9}$$

on obtient en divisant la variance selon (8) par le carré de $E(X)$ selon (6):

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \frac{1}{E(W)}\sigma_H^2 + \frac{1}{E(W)} \cdot \frac{1}{E(H)}\sigma_1^2$$

où l'on a posé

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma_1^2.$$

Vu que par hypothèse $E(W) = 1$ et que pour la variable de Poisson H de moyenne t

$$E(H) = V(H) = t \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_H^2 = \frac{V(H)}{E^2(H)} = \frac{1}{E(H)}, \tag{11}$$

on obtient pour le σ^2 du montant annuel total des sinistres l'expression finale

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 (1 + \sigma_1^2) \tag{12}$$

Cette formule exprime de façon élémentaire la variance relative du risque collectif X en fonction des variances relatives des trois variables intervenant dans la composition du risque X, soit la variable de structure W, la variable de Poisson H et le montant X_1 d'un sinistre.
En général σ_1 est mesurable par la statistique, de même que σ_H. Par contre il est ordinairement nécessaire de faire une hypothèse sur la valeur de σ_W, c'est-à-dire sur la fluctuabilité de la variable de structure.

Variantes

La valeur σ_H^2 peut s'exprimer de diverses manières: de (10) et (11), on a

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{t},$$

c'est-à-dire aussi, selon (7)

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{t} = \frac{E(X_1)}{P}.$$

Ainsi les trois formules suivantes pour le σ^2 du risque collectif sont équivalentes:

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 (1 + \sigma_1^2) \tag{12a}$$

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \frac{1}{t}(1 + \sigma_1^2) \tag{12b}$$

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \frac{E(x_1)}{P}(1 + \sigma_1^2) \tag{12c}$$

1.2 Second cas: le montant d'un sinistre s'exprime par le produit de plusieurs variables

Considérons tout d'abord le cas de deux variables. Soient Y et Z les deux variables définissant le montant X_1 d'un sinistre:

$$X_1 = Y \cdot Z.$$

En assurance incendie, p. ex., Y représente le taux du sinistre et Z la somme assurée; en assurance d'indemnité journalière, Y représente l'indemnité journalière, Z la durée de l'incapacité de travail.
Si les deux variables Y et Z sont statistiquement indépendantes l'une de l'autre, on peut montrer que pour les moments (par rapport à l'origine) d'ordre k on a

$$m_k(X_1) = m_k(Y) \cdot m_k(Z) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

c'est-à-dire que les moments d'ordre k se combinent comme les variables elles-mêmes. Ainsi, pour $k = 1$:

$$E(X_1) = E(Y) \cdot E(Z) \tag{13}$$

et pour $k = 2$:

$$m_2(X_1) = m_2(Y) \cdot m_2(Z) \tag{14}$$

Vu que, pour une variable aléatoire quelconque

$$m_2 = V + E^2,$$

(14) devient

$$V(X_1) + E^2(X_1) = \left[V(Y) + E^2(Y)\right] \cdot \left[V(Z) + E^2(Z)\right].$$

En divisant cette dernière relation par E^2 selon (13), on obtient

$$\sigma_1^2 = (\sigma_Y^2 + 1)(\sigma_Z^2 + 1) - 1 \tag{15}$$

Cette règle peut s'étendre au produit de plus de deux variables. Pour obtenir le σ^2 du risque collectif, il y a lieu d'introduire le σ_1^2 selon (15) dans l'expression (12). On obtient

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 \cdot (1 + \sigma_Y^2)(1 + \sigma_Z^2) \tag{16}$$

Cette relation donne la valeur de la variance relative σ^2 du risque collectif en fonction des variances relatives des 4 variables intervenant dans le processus, à savoir W, H, Y et Z.

§ 2 *Provision de fluctuation. Formule explicite*

Les divers facteurs intervenant dans la formule (4) donnant le taux u de la provision de fluctuation

$$u = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{\lambda'} \tag{4}$$

nous sont maintenant mieux connus. Pour la variance relative, nous avons soit la formule (12) soit la formule (16)

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 (1 + \sigma_1^2) \tag{12}$$

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 (1 + \sigma_Y^2)(1 + \sigma_Z^2) \tag{16}$$

Pour le taux réduit λ' de la marge de sécurité, la relation implicite le reliant au taux complet λ

$$2(1 + \lambda) \cdot \lambda' + l\,n(1 - 2\,\lambda') = 0$$

peut, au besoin, être rendue explicite par la formule approximative suivante [2]:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{(1 + 0{,}3\,\lambda)(1 + \lambda)} \tag{17}$$

Du fait de la structure en deux parties des formules (12) et (16) pour σ^2, le taux u ci-dessus comporte également deux composantes: la première

$$u_1 = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma_W^2}{\lambda'} \tag{18}$$

dépend de la fluctuation des probabilités de base (loi de structure), la seconde

$$u_2 = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma_H^2}{\lambda'} \cdot (1 + \sigma_1^2) \tag{19}$$

dépend de la fluctuation du hasard poissonien et de celle du montant des sinistres.

Tous les risques assurables présentant des fluctuations des probabilités de base – évidemment plus ou moins marquées – la première composante u_1 dépend du genre du risque et non de l'ampleur du portefeuille. Quant à la seconde composante u_2, elle décroît avec l'importance du portefeuille; en effet

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{t}$$

est l'inverse du nombre moyen des sinistres.

Le praticien préfère souvent exprimer la provision de fluctuation U par rapport à la prime, marge comprise

$$P' = P + \Lambda.$$

Le taux est alors

$$u' = \frac{U}{P'} = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\lambda'} \cdot \frac{1}{1+\lambda} \tag{20}$$

Le praticien acceptant également des approximations si l'erreur faite est sans importance, nous obtenons en introduisant (17) dans (20)

$$u' = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1+0{,}3\,\lambda}{\lambda} \tag{21}$$

Cette dernière formule se scinde également en deux parties, comme u, la première partie u_1' dépendant de σ_W^2, la seconde u_2' de $\sigma_H^2(1+\sigma_1^2)$.
Dans le cas de montants X_1 exprimables par le produit de deux variables Y et Z, il y a lieu de remplacer dans toutes les formules, conformément à (12) et à (16)

$$(1+\sigma_1^2) \quad \text{par} \quad (1+\sigma_Y^2)(1+\sigma_Z^2).$$

§ 3 Premier exemple: assurance au décès (risque pur)

La structure de l'expression donnant le taux u de la provision de fluctuation nous engage à rechercher un rapprochement avec la formule d'Ammeter.
Ammeter a établi sa formule à partir des hypothèses suivantes:

X_1: le montant des sinistres est distribué selon une loi gamma de variance relative

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{a} = 2$$

N: le nombre des sinistres est distribué selon une loi de Poisson pondérée, obtenue par pondération de la variable de Poisson de moyenne t par une variable gamma de variance relative

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{h} = 0{,}01$$

ε: la borne supérieure de la probabilité de ruine ε est fixée à $\frac{1}{2}\%$.
Après simplification et aménagement des coefficients (notamment en augmentant la borne ε de $\frac{1}{2}\%$ à 0,67%), le groupe de travail de l'OCDE a obtenu par ses propres développements la formule suivante

$$U = \frac{1}{\lambda}\left[0{,}025 \cdot P' + 8 \cdot E(X_1)\right]$$

Notre formule (21) pour le taux u'

$$u' = \frac{U}{P'} = \frac{|ln\,\varepsilon|}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1 + 0{,}3\,\lambda}{\lambda},$$

dans laquelle

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2 (1 + \sigma_1^2),$$

devient, si l'on introduit les valeurs numériques des paramètres choisies par le groupe d'étude, soit

$$\sigma_W^2 = 0{,}01; \quad \sigma_H^2 = \frac{1}{t} = \frac{E(X_1)}{P}; \quad \sigma_1^2 = 2; \quad |ln\,\varepsilon| = 5,$$

$$\frac{U}{P'} = \frac{5}{2}\left[0{,}01 + \frac{E(X_1)}{P}(1 + 2)\right]\frac{1 + 0{,}3\,\lambda}{\lambda}$$

c'est-à-dire pour U lui-même

$$U = \frac{1}{\lambda}\left[0{,}025\,P' + 7{,}5 \cdot E(X_1) \cdot (1 + \lambda)\right] \cdot (1 + 0{,}3\,\lambda). \tag{22}$$

Si maintenant on néglige le facteur $(1 + 0{,}3\,\lambda)$ et on pose

$$7{,}5\,(1 + \lambda) \cong 8,$$

on retrouve exactement la formule d'Ammeter.
Il n'est pas sans intérêt de relever que les hypothèses faites par le groupe de travail de l'OCDE ne sont pas les mêmes que celles qui ont mené à la formule (21), découlant de «l'équation générale d'équilibre»: Le groupe de travail, lui, a fait des hypothèses précises sur la nature de la loi de distribution du montant d'un sinistre (une loi gamma), de même que sur la loi du nombre des sinistres (une loi binomiale négative). La combinaison de ces lois mène à un risque collectif bien défini, mais dont la loi de distribution n'est pas d'un type connu.

En partant de l'équation d'équilibre, il ne nous a pas été nécessaire de faire d'hypothèses ni sur la loi du montant d'un sinistre, ni sur la loi du nombre des sinistres; par contre il a fallu faire l'hypothèse que le risque collectif, lui, est d'un type bien défini, à savoir de type gamma.
Les deux groupes d'hypothèses, celles du groupe de travail de l'OCDE et les nôtres, ont mené en fait à la même formule. Le fait que l'on ait retrouvé la formule d'Ammeter à partir d'un autre groupe d'hypothèses montre notamment que cette formule revêt un degré de généralité plus grand que l'on ne pouvait imaginer de prime abord.
Dans l'établissement de la formule de la provision de fluctuation, la méthode basée sur l'équation d'équilibre a peut-être l'avantage d'aboutir plus rapidement à la formule finale. Elle a certainement l'avantage d'indiquer directement d'où proviennent les coefficients numériques figurant dans la formule:

$$0{,}025 \text{ est la valeur numérique de } \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2}\,\sigma_W^2$$

$$8 \text{ est la valeur numérique de } \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2}(1+\sigma_1^2)\,(1+\lambda),$$

si l'on fait abstraction du facteur $(1 + 0,\ 3\ \lambda)$ numériquement sans grande importance.
Enfin, du fait que l'équation d'équilibre des risques de type gamma livre une provision de fluctuation légèrement plus forte que selon les hypothèses choisies par le groupe de travail de l'OCDE (par suite de la présence du facteur $1 + 0,\ 3\ \lambda$), on peut conclure que, pour le risque collectif «décès risque pur», le type gamma est légèrement plus fluctuant que celui qu'ont imaginé les experts de l'OCDE. L'hypothèse d'un risque collectif gamma ne se situe donc pas hors des réalités!

§ 4 Deuxième exemple: assurance d'indemnité journalière en cas de maladie

Dans un portefeuille d'assurance d'indemnités journalières en cas de maladie, le montant d'un sinistre est une variable aléatoire X_1 qui s'obtient par multiplication des deux variables
J: montant de l'indemnité journalière
T: durée de l'incapacité de travail:

$$X_1 = J \cdot T.$$

Imaginons un portefeuille d'assurance couvrant, par exemple, 80% du gain journalier, l'indemnité étant accordée après 30 jours de délai d'attente et au plus jusqu'au 540e jour de maladie [2]. Le taux de la provision de fluctuation par rapport à la prime pure P est donnée par la formule (4), soit

$$u = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{\lambda'}$$

dans laquelle, cette fois-ci, selon (16),

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_H^2\,(1 + \sigma_J^2)\,(1 + \sigma_T^2) \tag{23}$$

Estimation de σ_W^2: en assurance sur la vie, il est presque d'usage de choisir

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{h} = 0{,}01$$

c'est-à-dire de supposer une fluctuation des probabilités de base d'écart-type relatif $\sigma_W = 10\%$. En assurance-maladie, la fluctuation devrait être plus forte. Supposons

$$\sigma_W^2 = 0{,}02$$

Estimation de σ_H^2: σ_H^2 est l'inverse du nombre des sinistres. Certaines observations statistiques indiquent pour les maladies dépassant 30 jours une probabilité annuelle de $q = 5{,}3\%$. Si n représente le nombre des risques compris dans le portefeuille

$$t = q \cdot n$$

et

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{q \cdot n} = \frac{1}{0{,}053 \cdot n}.$$

Estimation de σ_J^2: Puisque le taux de l'indemnité journalière est supposé uniforme (80%), indemnité journalière J et salaire annuel L sont proportionnels. Ainsi

$$\sigma_J^2 = \sigma_L^2$$

[2] Cette forme d'assurance correspond aux propositions faites par la commission d'experts chargée de la révision partielle de l'assurance-maladie [3], page 37.

Une statistique des salaires donne approximativement

$$\sigma_L \cong 0{,}15$$

c'est-à-dire $\sigma_L^2 = 0{,}0225$

donc $\sigma_J^2 = 0{,}0225$

Estimation de σ_T^2: Certaines observations statistiques réalisées par un groupe d'assureurs privés ont montré que dans une population de travailleurs industriels la durée, mesurée en jours, des maladies dépassant 30 jours peut être représentée – avec une très bonne approximation – par une variable de Pareto, de fonction de répartition

$$F(\tau) = 1 - \left(\frac{a}{a + b \cdot \tau}\right)^{a+1}$$

avec $a = 0{,}3$ et $b = 0{,}0125$, τ représentant la durée de la maladie à compter du 30e jour. L'espérance mathématique et la variance de cette variable, tronquée en $t = 510$ jours (540 jours de maladie moins les 30 jours de délai d'attente) sont:

$$E(T) = 48{,}5 \text{ jours}$$
$$V(T) = 8117.$$

Nous obtenons donc pour la variance relative

$$\sigma_T^2 = 3{,}45$$

Calcul de σ^2: En introduisant les valeurs des divers σ dans (23), nous obtenons

$$\sigma^2 = 0{,}02 + \frac{1}{0{,}053 \cdot n} \cdot 1{,}0225 \cdot 4{,}45$$

c'est-à-dire

$$\sigma^2 = \frac{1}{50} + \frac{86}{n} \tag{24}$$

Il y a lieu de signaler le peu d'influence de la variabilité des salaires sur le résultat final de σ^2 (facteur 1,0225). La provision de fluctuation d'un portefeuille tel qu'imaginé ci-dessus doit donc être constituée au taux

$$u = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{86}{n}\right) \cdot \frac{1}{\lambda'}.$$

Si l'on tient compte d'une marge de sécurité de $\lambda = 5\%$, le taux réduit se monte à $\lambda' = 4{,}68\%$ [2]. En exigeant une borne supérieure de $\varepsilon = 1\%$ ($|l\,n\,\varepsilon| = 4{,}6$), on obtient

$$u = 1 + \frac{4200}{n} \tag{25}$$

La juxtaposition de la formule littérale et de la formule dans laquelle ont pris place les valeurs numériques des paramètres du risque:

$$u = \frac{|l\,n\,\varepsilon|}{2}\left[\sigma_W^2 + \sigma_H^2 \cdot (1 + \sigma_L^2) \cdot (1 + \sigma_T^2)\right] \cdot \frac{1}{\lambda'}$$

$$u = \frac{4{,}6}{2}\left[\frac{1}{50} + \frac{1}{0{,}053\,n} \cdot 1{,}0225 \cdot 4{,}46\right] \cdot \frac{1}{0{,}0468}$$

éclaire la provenance de la formule (25), ainsi que l'influence des divers paramètres du risque sur le résultat final. Comme indiqué au § 2 ci-dessus, la provision de fluctuation se compose de deux parties

$$u = u_1 + u_2$$

avec $u_1 = 1$

$u_2 = \dfrac{4200}{n}$; n = nombre des personnes assurées.

Bien que la borne supérieure pour la probabilité de ruine soit relativement élevée:

$$\varepsilon = 1\%,$$

le taux de la provision de fluctuation est important.

§ 5 Conclusions provisoires

A ce stade de l'étude, on est en droit d'exprimer sa déception: selon les formules établies, soit pour un portefeuille d'assurances au décès (§ 3), soit pour un portefeuille d'assurances en cas de maladie (§ 4), les montants des provisions de fluctuation sont importants, tout spécialement lorsque la marge de sécurité comprise dans les primes est faible. Dans le cas du portefeuille-maladie, il y aurait lieu, selon nos formules, de constituer une provision de fluctuation égale à une prime pure pour tenir le risque dû à la fluctuation des probabilités de base, aug-

mentée p. ex. d'une seconde prime pure dans le cas d'un portefeuille englobant 4200 assurés! L'intuition est réellement prise en défaut.

Ces constatations – encore peu satisfaisantes – appellent les remarques suivantes:

1° La formule identifie la probabilité de ruine à sa borne supérieure. Pour une probabilité de ruine donnée, la provision de fluctuation se situe donc en dessous du niveau déterminé par nos formules. L'état actuel de la science ne permet malheureusement pas, dans le cas général, de mieux appréhender la réalité.

2° Le risque de ruine est pris en considération dans le futur immédiat et lointain, même jusqu'à la fin des temps, ce qui peut paraître abusif. Des études ont été menées pour tenter de situer la question dans un cadre plus réaliste [5], [6]. La réponse n'est pas encore concluante.

3° La provision de fluctuation est constituée pour un seul risque: le risque décès ou le risque maladie. La constitution de provisions de fluctuation par branche d'assurance ne cadre pas avec les principes généraux de l'assurance: les institutions recherchent au contraire l'équilibre par la diversification des risques. Sur le plan des compensations que l'on peut attendre de regroupements de portefeuilles, il est possible d'apporter quelques éclaircissements. La seconde partie de la présente communication sera consacrée précisément à cette étude.

Bibliographie

[1] *Ammeter H.*, Das Solvabilitätsproblem in der Risiko-Lebensversicherung, Bull. Ass. Act. Suisses, 1970, 1.

[2] *Amsler M-H.*, L'équation générale d'équilibre d'un risque collectif, Bull. Ass. Act. Suisses, 1978, 2.

[3] Commission d'experts chargée de la révision partielle de l'assurance-maladie. Rapport du 5 juillet 1977. OCFIM, Berne.

[4] Organisation de Coopération et de Développement Economiques: Les garanties financières requises des entreprises d'assurance-vie. OCDE, Paris, 1971.

[5] *Seal H. L.*, The numerical calculation of U(w,t), the probability of non-ruin in an interval (o,t). Scand. Act. Journal, Vol 57, 1974.

[6] *Thorin O.*, *Wikstad N.*, Numerical evaluation of ruin probabilities for a finite period. ASTIN-Bull. Vol VII, 2, 1973.

Marc-Henri Amsler
Professeur à l'Université
Bâtiment B. F. S. H.
1015 Lausanne-Dorigny

Résumé

Partant de l'équation générale d'équilibre d'un risque collectif, développée précédemment, l'auteur établit une formule donnant, sous certaines hypothèses, la valeur de la provision de fluctuation qu'il y a lieu de prévoir pour parer à la variabilité des charges annuelles dues au hasard. L'application de la formule au risque de décès lui fait retrouver la «formule d'Ammeter», élaborée dans le cadre de l'OCDE. Un autre exemple concerne l'assurance-maladie.
Une seconde partie du présent article étudiera l'effet, sur le montant de la provision de fluctuation, de regroupements et de fusions de plusieurs portefeuilles d'assurance.

Zusammenfassung

Ausgehend aus der allgemeinen Gleichgewichtsgleichung, welche an anderer Stelle besprochen wurde, wird eine Formel hergeleitet, welche unter bestimmten Voraussetzungen die Höhe der zum Schutz vor den zufallsbedingten Schwankungen der Jahresbelastung erforderlichen Schwankungsrückstellung angibt. Die Anwendung der abgeleiteten Formel an das Todesfallrisiko führt zur im Kreise des OCDE ausgearbeiteten Ammeter'schen Formel. Ein weiteres Beispiel bezieht sich auf ein Krankenversicherungsportefeuille.
In einem zweiten Teil des Artikels wird die Auswirkung auf die Höhe der Schwankungsrückstellung von Gruppenzusammenzügen und Fusionen von Portefeuilles untersucht werden.

Summary

Starting from the general balance equation of the collective risk theory, developed in another connexion, the author works out a formula which gives under certain conditions the value of the risk reserve protecting the business against the fluctuation of the year outgo. The application of the formula to the death risk leads to the Ammeter formula which has been elaborated within the framework of the OECD. Another example concerns a sickness insurance portfolio.
In a second part of the present article (to be published) the effect of aggregation of portfolios on the value of the risk reserve will be studied.

Riassunto

Partendo dall'equazione generale d'equilibrio d'un rischio collettivo svilupato precedemente, l'autore presente una formula che, sotto certi ipotesi, da il valore della riserva di fluttuazione necessaria per pareggiare la variabilità dei risultati annuali. L'applicazione della formula al caso morte ci conduce alla formula di Ammeter svilupata nel quadro degli studi nell'OCDE. Un altro esempio tratta dell'assicurazione di malattia.
Nella seconda parte dell'articolo si studia l'influenza sulla riserva di flututazioni causata da ragruppamenti e fusioni di portafoglio.