# Über den Zusammenhang zwischen gewissen Zusatzversicherungen, Prämienzerlegungen und Approximationen in der Lebensversicherungstechnik

Autor(en): **Jecklin, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **44 (1944)**

PDF erstellt am: **19.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551030

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Über den Zusammenhang zwischen gewissen Zusatzversicherungen, Prämienzerlegungen und Approximationen in der Lebensversicherungstechnik

Von *Heinrich Jecklin,* Zürich

Bei der Tarifgestaltung in der Lebensversicherung wird oft eine einfache Grundkombination, z. B. die gemischte Versicherung, durch die Mitversicherung eines zusätzlichen Risikos erweitert, sei es, um einem wirklichen Versicherungsbedürfnis zu entsprechen, sei es, um aus Konkurrenzgründen den Tarif attraktiver zu gestalten. Wir wollen hier jedoch nicht auf jene Möglichkeit eintreten, bei welcher die Grundkombination lediglich durch eine weitere Versicherungsart additiv ergänzt wird (wie dies z. B. bei der Unfallzusatzversicherung der Fall ist), so dass zur Hauptversicherungssumme ein zusätzliches Kapital für spezielles Risiko tritt und folglich einfach die Prämien für Haupt- und Zusatzversicherung zu addieren sind. Uns interessiert hier vielmehr jene Erweiterung der ursprünglichen Kombination, zufolge welcher bei Eintritt eines bestimmten Ereignisses eine vorzeitige Kapitalzahlung (ganz oder teilweise) ausgelöst wird, ohne dass im Hinblick auf die Grundversicherung eine Summenerhöhung stattfindet. So kann beispielsweise die gemischte Versicherung dahin erweitert werden, dass die Summe nicht nur bei Tod oder Erleben, sondern auch im Falle permanenter Invalidität vorzeitig ausbezahlt wird, womit gegebenenfalls der Versicherungsanspruch abgegolten ist. Die Prämie für die Deckung dieses zusätzlichen Risikos muss offenbar darstellbar sein als Entschädigung für die Mitdeckung des Zins- und/oder Prämienentganges vom Zeitpunkt der vorzeitigen Kapitalzahlung, bis zu jenem Termin, in welchem die Versicherungssumme laut Grundkombination fällig wäre.

Es sind, theoretisch zumindest, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob das zusätzlich versicherte Ereignis wiederholt oder nur einmalig eintreten kann bzw. nur beim erstmaligen Eintritt entschädigungs-

pflichtig ist. Betrachten wir eine fiktive Versichertengesamtheit, so liegt der Unterschied darin, dass letzterenfalls in bezug auf das genannte Ereignis ein endgültiges Ausscheiden bedingt ist, während ersterenfalls die Möglichkeit der Wiedereingliederung besteht. Bei der mathematischen Behandlung des ersten Falles könnte man daher in Analogie zur ausgebildeten Theorie der Invaliditätsversicherung vorgehen, indem man unter Verwendung der Ausscheidewahrscheinlichkeit des zusätzlichen Risikos und seiner Wiedereingliederungswahrscheinlichkeit die beiden Ordnungen der vom zusätzlichen Ereignis Betroffenen und Nichtbetroffenen aufstellen würde [1]). Im Hinblick auf die Praxis ist es einfacher und wegen der Schwierigkeit der Beschaffung mancher Masszahlen wohl oft der einzig gangbare Weg, in Anlehnung an die klassische Methode der Krankengeldversicherung vorzugehen [2]).

Setzen wir vorerst die wiederholte Eintrittsmöglichkeit des zusätzlich versicherten Ereignisses voraus und bezeichnen deren jährliche Wahrscheinlichkeit mit $\alpha_{x+t}$, wobei $x$ das Eintrittsalter des Versicherten und $t$ die seit Versicherungsbeginn verflossene Zeit bedeuten. Der einfachste Fall liegt natürlich vor, wenn die Hauptversicherung aus einem gewöhnlichen Sparvertrag besteht. Die jährliche Nettoprämie hiefür beträgt für die Vertragssumme $S$ bekanntlich $S \cdot \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = S \cdot (\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - d)$. Es soll nun bei Eintritt des vorgenannten Ereignisses innerhalb der Dauer $n$ ab Beginn eine bestimmte Summe $S' \leq S$ vorzeitig, d. h. am Ende des Versicherungsjahres, in welchem das Ereignis eintritt, ausbezahlt werden (bei Wiederholung des Ereignisses darf insgesamt natürlich nicht mehr als $S$ zur Auszahlung gelangen). Betrachten wir vorläufig die Zusatzversicherung als selbständige Versicherung, so ist die jährliche Prämie pro Summeneinheit offenbar

$$z = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \cdot \sum_{0}^{n-1} {}_t\alpha_{x+t} \cdot v^{t+1} = \frac{d}{a_{\overline{n}|}} \cdot \sum_{0}^{n-1} \alpha_{x+t} \cdot {}_{t+1|}a_{\overline{n-t-1|}} +$$

$$+ \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} \cdot \sum_{0}^{n-1} \alpha_{x+t} = z_1 + z_2 .$$

---

[1]) Vgl. z. B. *O. W. Spring*, Beiträge zur math. Theorie der privaten und sozialen Krankenversicherung. Diss. Bern 1934.

[2]) Vgl. *H. Renfer*, Beiträge zur Krankenversicherung. St. Gallen 1912.

Hiebei ist $z_2$ die Prämie für Versicherungsleistung erst am Termin (unter Voraussetzung des Ereigniseintrittes) und $z_1$ die Zusatzprämie für vorzeitige Zahlung sofort bei Ereigniseintritt, d. h. Ende des betreffenden Versicherungsjahres. Ist insbesondere die Wahrscheinlichkeit des zusätzlichen Risikos konstant $= \alpha$, so wird hier

$$z = \frac{a_{\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \cdot \alpha = \alpha \cdot v = \alpha \cdot \frac{d}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} {}_{t+1|}\mathsf{a}_{\overline{n-t-1}|} + \frac{n \cdot \alpha \cdot v^n}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} = z_1 + z_2 .$$

Fragen wir nun im Sinne der Problemstellung nach der Prämie der durch die Zusatzversicherung erweiterten Hauptkombination, so ergibt sich diese offensichtlich als

$$S \cdot \frac{v^n}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} + S' \cdot z_1 = \frac{S}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \cdot \left( v^n + \frac{S'}{S} \cdot d \cdot \sum_0^{n-1} \alpha_{x+t \cdot t+1|}\mathsf{a}_{\overline{n-t-1}|} \right).$$

($z_2$ ist nicht zu berücksichtigen, da durch den Zusatz lediglich teilweise Vorauszahlung der Versicherungssumme, nicht aber eine Erhöhung derselben stipuliert ist.) — Ist nun beispielsweise die Grundkombination eine gemischte Versicherung, so ergibt sich:

$$z = \frac{v}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} \alpha_{x+t} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{d}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} \alpha_{x+t \cdot t+1|}\mathsf{a}_{x,\overline{n-t-1}|} +$$
$$+ \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} \alpha_{x+t \cdot t+1|} A_{x,\overline{n-t-1}|} = z_1 + z_2$$

und insbesondere für den Fall $\alpha =$ konst.:

$$z = \frac{a_{x\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \alpha = \alpha \cdot v = \alpha \cdot \frac{d}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} {}_{t+1|}\mathsf{a}_{x,\overline{n-t-1}|} +$$
$$+ \frac{\alpha}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_0^{n-1} {}_{t+1|} A_{x,\overline{n-t-1}|} = z_1 + z_2 .$$

Die Prämie der Gesamtkombination ergibt sich hier zu:

$$S \cdot P_{x\overline{n}|} + S' \cdot z_1 = \frac{S}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \left( A_{x\overline{n}|} + \frac{S'}{S} \cdot d \cdot \sum_0^{n-1} \alpha_{x+t \cdot t+1|}\mathsf{a}_{x,\overline{n-t-1}|} \right).$$

Diese Beispiele liessen sich leicht vermehren. Es ist jedoch noch eine Bemerkung in bezug auf die Grösse $\alpha_x$ anzubringen; diese bedeutet, wie gesagt, die jährliche Wahrscheinlichkeit des Eintritts des zusätzlich versicherten Ereignisses. Da vorausgesetzt ist, dass dieses Ereignis mehrfach eintreten kann, ist die Möglichkeit gegeben, dass es sich schon innerhalb ein und desselben Versicherungsjahres wiederholt. In diesem Sinne würde $\alpha_x$ richtiger als jährliche Eintretenshäufigkeit bezeichnet, und der Zusammenhang mit der bezüglichen Wahrscheinlichkeit $\alpha_x'$ ist, wenn die Zwischenzeit bis zur Wiederholungsmöglichkeit vernachlässigt wird, näherungsweise gegeben durch [1])

$$\alpha_x = \alpha_x' + \frac{(\alpha'_x)^2}{2} + \frac{(\alpha_x')^3}{8} + \ldots$$

Es ist klar, dass bei kleinen Wahrscheinlichkeiten die Differenz zwischen $\alpha_x$ und $\alpha_x'$ nur unbedeutend ist.

Eine Risikoart der Praxis, welche in die behandelte Kategorie gehört, ist z. B. die sogenannte Operationsklausel mit zinsfreiem Darlehen zur Deckung der Operationskosten. Diese zusätzliche Risikodeckung wird in der Lebensversicherung oftmals gratis gewährt. Es wäre aber irrig, anzunehmen, dass die für den Zinsausfall nötige Sonderprämie $z_1$ im Verhältnis zur Gesamtprämie $z$ der Operationskostendeckung (wie sie in der Krankenversicherung bekannt ist) von untergeordneter Bedeutung sei. Zerlegen wir in der besprochenen Weise diese Gesamtprämie $z$ in $z = z_1 + z_2$ und setzen $z_1 = k \cdot z$, so gibt uns $k = \frac{z_1}{z} = \frac{z - z_2}{z}$ den verhältnismässigen Prämienanteil für die Deckung des Zinsausfalles. Für das erstbehandelte Beispiel, wo die Hauptkombination ein Sparvertrag ist, wird bei konstantem $\alpha$ dieses $k = \frac{a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{a_{\overline{n}|}}$ und ist natürlich mit $i$ und $n$ variabel. Die folgende kleine Tabelle gibt die Werte $k$ für einige Positionen von $i$ und $n$:

| $i$ / $n$ | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 % . . . . | 0.1048 | 0.1496 | 0.1930 | 0.2348 | 0.2750 |
| 3 % . . . . | 0.1531 | 0.2170 | 0.2774 | 0.3343 | 0.3878 |
| 4 % . . . . | 0.1991 | 0.2797 | 0.3542 | 0.4228 | 0.4857 |

[1]) Vgl. *W. Thalmann*, Die Prämienbestimmung in der sozialen Betriebsunfallversicherung. Aktuarkongress Rom 1934, Band IV, S. 253 ff.

Im Mittel wird also durch die Komponente $z_1$ ca. $^1/_4$ bis $^1/_3$ der selbständigen Prämie $z$ absorbiert; ist die Hauptkombination eine gemischte Versicherung, so sind die Werte $k$ von der gleichen Grössenordnung wie hier.

Die Berücksichtigung der mehrmaligen Eintrittsmöglichkeit des zusätzlich versicherten Ereignisses wird bei kleinem $\alpha_x$ gegenüber dem Falle der nur einmaligen Eintrittsmöglichkeit im Prämienresultat nur kleine Differenzen zeitigen, wie man sich leicht überlegt. Sei wieder $\alpha$ = konstant und zudem $i = o$, und es sei die Zusatzversicherung als selbständige Versicherung betrachtet, die von keiner Ausscheideordnung abhängig ist ausser von der durch $\alpha$ im Falle der nur einmaligen Eintrittsmöglichkeit des Ereignisses selbst verursachten Abfallsordnung. Dann ist offenbar die jährliche Prämie im Falle der Wiederholungsmöglichkeit des Ereignisses einfach $z = \frac{1}{n} \sum \alpha = \alpha$, im zweiten Falle dagegen

$$z = \frac{1}{n} (\alpha + \alpha [1-\alpha] + \alpha [1-\alpha]^2 + \ldots + \alpha [1-\alpha]^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \alpha - \binom{n}{2} \cdot \alpha^2 + \binom{n}{3} \cdot \alpha^3 - \ldots).$$

Hier kann praktisch der Klammerausdruck meist gleich $n \cdot \alpha$ gesetzt werden. Es scheint, dass der Fall der wiederholten Eintrittsmöglichkeit der einfacher zu behandelnde sei. Sobald aber das zusätzliche Risiko nicht selbständig betrachtet wird, sondern im Zusammenhang mit einer Hauptversicherung, trifft das Gegenteil zu, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden.

Gehen wir nun also dazu über, in allgemeinerer Betrachtung für das zusätzlich versicherte Risiko nur einmalige Eintrittsmöglichkeit vorauszusetzen. Auch hier liegt der einfachste Fall dann vor, wenn die Hauptversicherung ein reiner Sparvertrag ist. Bilden wir mit den $\alpha_x$ eine unabhängige Abfallsordnung, analog, wie wenn es sich um eine Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x$ handeln würde, und nennen in leicht verständlicher Analogie die Tafelwerte $l_x^\alpha$, wobei also $l_{x+1}^\alpha = l_x^\alpha (1-\alpha_x)$, und entsprechend die Kommutationszahlen $D_x^\alpha$, $N_x^\alpha$ usw., so haben wir als Netto-Einmalprämie pro Summeneinheit der vorerst als selbständig betrachteten Zusatzversicherung

$$Z = \frac{1}{l_x^a} \cdot \sum_0^{n-1} l_{x+t}^a \cdot \alpha_{x+t} \cdot v^{t+1} = \frac{1}{D_x^a} \cdot \sum_0^{n-1} C_{x+t}^a = \frac{M_x^a - M_{x+n}^a}{D_x^a} =$$

$$= d \cdot (\mathsf{a}_{\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}^a) + v^n \cdot \frac{l_x^a - l_{x+n}^a}{l_x^a} = Z_1 + Z_2 .$$

Ist insbesondere $\alpha_x = q_x$, so ist $Z$ die Einmalprämie für eine temporäre Todesfallversicherung. Wenn $S = S'$, so ergibt sich dann aus der Einmalprämie der Sparversicherung durch Ergänzung mit der Komponente $Z_1$ die Einmalprämie der gemischten Versicherung, nämlich für die Summeneinheit:

$$v^n + Z_1 = (1 - d \cdot \mathsf{a}_{\overline{n}|}) + d\,(\mathsf{a}_{\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}) = 1 - d \cdot \mathsf{a}_{x\overline{n}|} = A_{x\overline{n}|} .$$

Ist dagegen $\alpha_x$ z. B. eine Auslosungswahrscheinlichkeit, so erhalten wir durch Ergänzung des Sparvertrages mit $Z_1$ den Übergang zur Einmalprämie der sogenannten Kapitalisationspolice, wie sie in Frankreich von speziellen Gesellschaften häufig getätigt wird [1]). Geht man von der Einmal- zur Jahresprämie über, so ist nicht zu übersehen, dass im allgemeinen die Prämienzahlung bei Eintritt des zusätzlich versicherten Ereignisses aufhört. Diesfalls erstreckt sich die Zusatzkomponente nicht nur auf den Zinsausfall, sondern auch auf den Prämienausfall der ursprünglichen Kombination, und die jährliche Ergänzungsprämie ist dann also

$$z_e = (d + P_{\overline{n}|}) \cdot \frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}^a}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}^a} = \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}^a} - \frac{1}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} .$$

Ist nun aber die Hauptversicherung eine gemischte Versicherung, so hat man für die Zusatzversicherung auszugehen von der zusammengesetzten Ordnung der nicht vom Ereignis Betroffenen

$$l_{x+1}^{\beta\beta} = l_x^{\beta\beta}\,(1 - q_x^{\beta\beta})\,(1 - \alpha_x) .$$

Hierin ist $q_x^{\beta\beta}$ die Sterbenswahrscheinlichkeit der nicht vom zusätzlichen Ereignis Betroffenen (entspricht also dem $q_x^{aa}$ der Invaliditätsversicherung) und $\alpha_x$ die Eintrittswahrscheinlichkeit dieses Ereignisses (entspricht also dem $i_x$ der Invaliditätsversicherung).

---

[1]) Vgl. *H. Jecklin*, Die französischen Kapitalisations-Gesellschaften. Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung, Bd. II, Heft 3, 1936.

Praktisch wird man $q_x^{\beta\beta} = q_x^{\alpha} = q_x$ setzen, und es ist dann einfach $l_x^{\beta\beta} = \frac{1}{C} l_x \cdot l_x^{\alpha}$, wo $C = l_0^{\beta\beta}$, nach dem bekannten und wichtigen Satz[1]), dass sich eine zusammengesetzte Ordnung als Produkt der aus der Einzelwirkung der Ausscheideursachen resultierenden unabhängigen Ordnungen ergibt. Wir haben nun

$$Z = \frac{1}{D_x^{\beta\beta}} \cdot \sum_0^{n-1} D_{x+t}^{\beta\beta} \cdot \alpha_{x+t} = d \cdot (\mathsf{a}_{x\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}^{\beta\beta}) +$$

$$+ \frac{1}{D_x^{\beta\beta}} \cdot \sum_0^{n-1} D_{x+t}^{\beta\beta} \cdot \alpha_{x+t} \cdot A_{x+t,\,\overline{n-t}|} = Z_1 + Z_2$$

und die jährliche Ergänzungsprämie wird

$$z_e = (d + P_{x\overline{n}|}) \cdot \frac{\mathsf{a}_{x\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}^{\beta\beta}}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}^{\beta\beta}} = \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}^{\beta\beta}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}}.$$

Als zusätzliche Risiken, welche praktisch in Ergänzung zur einfachen gemischten Versicherung treten können, seien beispielsweise erwähnt: ein verbundenes Leben, permanente Invalidität, einmalige Operationskosten, Auslosung usw.

Nach dem Gesagten können wir ohne weiteres zur Feststellung übergehen, dass sich die jährlichen Prämien zahlreicher Kombinationen der Lebensversicherung darstellen lassen als einfache Grundkombination plus Zusatzversicherung von der Form einer temporären Überlebensrente für Zins- und/oder Prämienentschädigung, und zwar ist dies immer dann möglich, wenn die Prämie der Grundkombination und der zusammengesetzten Versicherung als Funktion von Rentenwerten in der Form $P = \frac{1 - d \cdot \mathsf{a}}{\mathsf{a}'}$ darstellbar sind (wobei $\mathsf{a} = \mathsf{a}'$ sein kann, aber nicht muss). Die genannte Überlebensrente bezieht sich nur auf den Zins, nur auf die Prämie oder auf beides, je nachdem, ob bei der Gesamtkombination im Vergleich zur Grundkombination sich nur der Zähler, nur der Nenner oder beides geändert hat. Am besten werden zur Erläuterung die folgenden paar Beispiele dienen:

---

[1]) Siehe *W. Friedli*, Intensitätsfunktion und Zivilstand. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, S. 44 ff.

1. Nur Zähler ändert sich.

Übergang von Terme-fixe-Versicherung zu gemischter Versicherung:

$$P_1 = \frac{A_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = d \cdot \frac{a_{\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},$$

Übergang von gemischter Versicherung mit Prämienbefreiung bei Invalidität zu gemischter Versicherung mit Kapitalvorauszahlung bei Invalidität:

$$P_1 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A^{aa}_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = d \cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a^{aa}_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}}.$$

2. Nur Nenner ändert sich.

Übergang von gemischter Kinder-Versicherung zu Versicherung mit Prämienbefreiung bei vorzeitigem Tode des Vaters:

$$P_1 = \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = P_1 \cdot \frac{a_{z\overline{n}|} - a_{xz\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}},$$

Übergang von gemischter Versicherung zu solcher mit Prämienbefreiung im Invaliditätsfall:

$$P_1 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = P_1 \cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a^{aa}_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}}.$$

3. Zähler und Nenner ändern sich.

Übergang von gemischter Versicherung auf verbundene gemischte Versicherung:

$$P_1 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A_{xy\overline{n}|}}{a_{xy\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = (P_1 + d) \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a_{xy\overline{n}|}}{a_{xy\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{xy\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}},$$

Übergang von Terme-fixe-Versicherung auf Kinderversicherung mit Prämienbefreiung bei vorzeitigem Tode des Versorgers:

$$P_1 = \frac{A_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}},\ P_2 = \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}},\ P_2 - P_1 = z_e = P_1 \cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a_{xz\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}} + d \cdot \frac{a_{\overline{n}|} - a_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}}.$$

Es hat keinen grossen Zweck, die Beispiele dieser Zerlegungen zu vermehren. Im Hinblick auf die Praxis müssten sie übrigens weitgehend nur als Spielerei betrachtet werden, wenn nicht die Möglichkeit bestünde, die Ergänzungsprämie $z_e$ mit für manche Zwecke hinreichender Genauigkeit approximativ zu bestimmen. Wir knüpfen dabei an die von Cantelli [1]) erstmals systematisch verwendete Idee an, wonach man Quotienten aus Summen über die Glieder zusammengesetzter Ordnungen oftmals gut approximieren kann, indem man in Zähler und Nenner die zusammengesetzten Ordnungen um eine (aber je die gleiche) unabhängige Ordnung reduziert, also z. B.

$$\frac{\sum\limits_0^{n-1} {}_t l_{x+t} \cdot l^{\alpha}_{x+t} \cdot l^{\beta}_{x+t} \cdot l^{\gamma}_{x+t} \cdot v^t}{\sum\limits_0^{n-1} {}_t l_{x+t} \cdot l^{\alpha}_{x+t} \cdot l^{\beta}_{x+t} \cdot v^t} \sim \frac{\sum\limits_0^{n-1} {}_t l_{x+t} \cdot l^{\alpha}_{x+t} \cdot l^{\gamma}_{x+t} \cdot v^t}{\sum\limits_0^{n-1} l_{x+t} \cdot l^{\alpha}_{x+t} \cdot v^t}.$$

Die obigen Formeln für die verschiedenen Überlebensrenten lassen sich ohne weiteres als Differenzen derartiger Quotienten anschreiben, so dass sich in jedem Falle Näherungen nach folgendem Schema durchführen lassen:

$$\frac{a_{x\overline{n}|} - a_{xy\overline{n}|}}{a_{xy\overline{n}|}} \sim \frac{a_{\overline{n}|} - a_{y\overline{n}|}}{a_{y\overline{n}|}} = \left(\frac{1}{a_{y\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \cdot a_{\overline{n}|}.$$

Zwei Beispiele mögen zur Illustration genügen:

1. $$P^{aa}_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|} + (P_{x\overline{n}|} + d) \cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a^{aa}_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}} = P_{x\overline{n}|} + \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{a_{x\overline{n}|} - a^{aa}_{x\overline{n}|}}{a^{aa}_{x\overline{n}|}} \sim$$

$$\sim P_{x\overline{n}|} + \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{a_{\overline{n}|} - a^{i}_{x\overline{n}|}}{a^{i}_{x\overline{n}|}} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|} \cdot a^{i}_{x\overline{n}|}} - d.$$

Daraus folgt auch $a^{aa}_{x\overline{n}|} \sim \dfrac{a_{x\overline{n}|} \cdot a^{i}_{x\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$.

---

[1]) *F. P. Cantelli*, Genesi e costruzione delle tavole di mutualità. Bollet. di Notizie sul Credito e sulla Previdenza, N° 3, Rom 1914.

Numerisches Beispiel für $x = 30$ auf Basis S. M. 1921/30 und I. M. 1931 zu $2\frac{3}{4}$ %:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n = 15$: | $a_{\overline{xn}\rceil} = 12.1039$ | $n = 20$: | $a_{\overline{xn}\rceil} = 14.9425$ |
| | $a^{aa}_{\overline{xn}\rceil} = 11.9512$ | | $a^{aa}_{\overline{xn}\rceil} = 14.6112$ |
| | $a^{i}_{\overline{xn}\rceil} = 12.3302$ | | $a^{i}_{\overline{xn}\rceil} = 15.2861$ |
| | $a_{\overline{n}\rceil} = 12.4910$ | | $a_{\overline{n}\rceil} = 15.6460$ |
| | $P^{aa}_{\overline{xn}\rceil} = 56.91\ ^0/_{00}$ | | $P^{aa}_{\overline{xn}\rceil} = 41.68\ ^0/_{00}$ |
| | $a^{aa}_{\overline{xn}\rceil} \sim 11.9481$ | | $a^{aa}_{\overline{xn}\rceil} \sim 14.5988$ |
| | $P^{aa}_{\overline{xn}\rceil} \sim 56.93\ ^0/_{00}$ | | $P^{aa}_{\overline{xn}\rceil} \sim 41.73\ ^0/_{00}$ |

2. $$P_{\overline{xyn}\rceil} = P_{\overline{xn}\rceil} + (P_{\overline{xn}\rceil} + d) \cdot \frac{a_{\overline{xn}\rceil} - a_{\overline{xyn}\rceil}}{a_{\overline{xyn}\rceil}} = P_{\overline{xn}\rceil} +$$

$$+ \frac{1}{a_{\overline{xn}\rceil}} \cdot \frac{a_{\overline{xn}\rceil} - a_{\overline{xyn}\rceil}}{a_{\overline{xyn}\rceil}} \sim P_{\overline{xn}\rceil} + \frac{1}{a_{\overline{xn}\rceil}} \cdot \frac{a_{\overline{n}\rceil} - a_{\overline{yn}\rceil}}{a_{\overline{yn}\rceil}} = \frac{a_{\overline{n}\rceil}}{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil}} - d,$$

woraus auch folgt $a_{\overline{xyn}\rceil} \sim \dfrac{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil}}{a_{\overline{n}\rceil}}$.

Numerisches Beispiel: Auf Basis der Tafel der 17 englischen Gesellschaften zu $3\frac{1}{2}$ % ergibt sich $P_{35,45\ \overline{20}\rceil}$ genau zu 51.07 $^0/_{00}$ und genähert zu 51.75 $^0/_{00}$.

Auf die letztgenannte Näherungsformel für die gemischte Versicherung auf zwei verbundene Leben und für die bezügliche Verbindungsrente wurde in der Literatur auch schon hingewiesen [1]), ohne dass sie jedoch unseres Wissens im Rahmen der hier aufgezeigten Zusammenhänge behandelt worden wäre. Interessant ist nun der Umstand, dass sich das aufgezeigte Näherungsverfahren in stufenmässigem Abbau höherer zusammengesetzter Ordnungen weiterführen lässt. Wir zeigen es am Schema der gemischten Versicherung:

$$P_{\overline{xyzn}\rceil} = P_{\overline{xyn}\rceil} + \frac{1}{a_{\overline{xyn}\rceil}} \cdot \frac{a_{\overline{xyn}\rceil} - a_{\overline{xyzn}\rceil}}{a_{\overline{xyzn}\rceil}} \sim \frac{a_{\overline{n}\rceil}}{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil}} - d + \frac{a_{\overline{n}\rceil}}{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil}} \cdot \frac{a_{\overline{yn}\rceil} - a_{\overline{yzn}\rceil}}{a_{\overline{yzn}\rceil}} \sim$$

$$\sim \frac{a_{\overline{n}\rceil}}{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil}} \left(1 + \frac{a_{\overline{yn}\rceil} \cdot a_{\overline{n}\rceil} - a_{\overline{yn}\rceil} \cdot a_{\overline{zn}\rceil}}{a_{\overline{yn}\rceil} \cdot a_{\overline{zn}\rceil}}\right) - d = \frac{(a_{\overline{n}\rceil})^2}{a_{\overline{xn}\rceil} \cdot a_{\overline{yn}\rceil} \cdot a_{\overline{zn}\rceil}} - d.$$

---

[1]) Siehe *E. Meyer*, Näherungsmethoden für Versicherungen verbundener Leben. Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen, 1928, Nr. 7.

Schliesslich ergibt sich allgemein:

$$P_{x_1 x_2 \cdots x_k \overline{n}|} \sim \frac{(a_{\overline{n}|})^{k-1}}{a_{x_1 \overline{n}|} \cdot a_{x_2 \overline{n}|} \cdots a_{x_k \overline{n}|}} - d,$$

bzw. $$a_{x_1 x_2 x_3 \cdots x_k \overline{n}|} \sim \frac{a_{x_1 \overline{n}|} \cdot a_{x_2 \overline{n}|} \cdots a_{x_k \overline{n}|}}{(a_{\overline{n}|})^{k-1}},$$

wobei die Indizes 1 bis $k$ bei den $x$ andeuten, dass $k$ verbundene Leben oder Ausscheideursachen vorliegen. Man hätte demnach die einfache Regel, dass der Rentenwert aus einer $k$-fach zusammengesetzten Ordnung näherungsweise erhalten wird, indem man das Produkt der Rentenwerte der $k$ unabhängigen Ordnungen durch die ($k$–1). Potenz des entsprechenden Zeitrentenwertes dividiert. Dass man auf die Tragfähigkeit dieser Näherungsrechnung nicht allzugrosse Hoffnungen setzen darf, leuchtet ein; die Brauchbarkeit sinkt mit steigendem $n$ und insbesondere mit zunehmendem $k$ sehr rasch. Hat man eine gemischte Versicherung auf $k$ verbundene Leben gleichen Alters (resp. Durchschnittsalters), so folgt insbesondere

$$P_{\underbrace{xx \cdots x}_{k} \overline{n}|} \sim \frac{(a_{\overline{n}|})^{k-1}}{(a_{x\overline{n}|})^{k}} - d,$$

und um eine Idee bezüglich der praktischen Brauchbarkeit zu vermitteln, haben wir im folgenden auf Grund der letzten Formel einige Resultate ausgewertet ($x = 35$, Tafel S. M. 1921/30 à 3½ %), wobei in Klammern die genauen Prämienwerte beigegeben sind:

| $n$ / $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 10 . . . . | 87.998 ‰ | 90.919 ‰ | 93.911 ‰ | 96.974 ‰ |
| | (87.964) | (90.813) | (93.688) | (96.591) |
| 15 . . . . | 57.058 ‰ | 60.766 ‰ | 64.626 ‰ | 68.642 ‰ |
| | (56.972) | (60.494) | (64.060) | (67.668) |
| 20 . . . . | 42.735 ‰ | 47.416 ‰ | 52.384 ‰ | 57.656 ‰ |
| | (42.543) | (46.812) | (51.125) | (55.470) |
| 25 . . . . | 35.278 ‰ | 41.196 ‰ | 47.620 ‰ | 54.596 ‰ |
| | (34.887) | (39.960) | (45.028) | (50.077) |

In Berücksichtigung des Umstandes, dass die Reihe der Potenzen von $v$ selbst auch als Abfallsordnung betrachtet werden kann, ist

es möglich, unter Benützung des Schemas $\frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \sim \frac{n - e_{x\overline{n}|}}{e_{x\overline{n}|}} =$ $= \left(\frac{1}{e_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot n$, wobei $e_{x\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_0^{n-1} l_{x+t}$, in vorstehenden Approximationen noch einen Schritt weiter zu gehen, mit dem Ergebnis:

$$P_{x_1 x_2 \cdots x_k \overline{n}|} \sim \frac{n^k}{\mathsf{a}_{\overline{n}|} \cdot e_{x_1 \overline{n}|} \cdot e_{x_2 \overline{n}|} \cdots e_{x_k \overline{n}|}} - d,$$

$$\text{bzw.} \quad \mathsf{a}_{x_1 x_2 \cdots x_k \overline{n}|} \sim \frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|} \cdot e_{x_1 \overline{n}|} \cdot e_{x_2 \overline{n}|} \cdots e_{x_k \overline{n}|}}{n^k}.$$

Diese Formel gibt naturgemäss auf der ganzen Linie ungünstigere Resultate als die vorgängig behandelte Näherung. Sie ist aber doch von Interesse, indem sie bei $k = 1$ eine sehr handliche Näherungsformel liefert zur Berechnung einfacher Renten- und Prämienwerte ohne Zuhilfenahme von Kommutationszahlen, nämlich

$$P_{x\overline{n}|} \sim \frac{n}{\mathsf{a}_{\overline{n}|} \cdot e_{x\overline{n}|}} - d, \text{ bzw. } \mathsf{a}_{x\overline{n}|} \sim \frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|} \cdot e_{x\overline{n}|}}{n}.$$

Wir schliessen unsere Darlegungen mit der Angabe einiger bezüglicher numerischer Werte (Tafel S. M. 1921/30 à 3½ %):

| | | $\mathsf{a}_{x\overline{n}|}$ | | $P_{x\overline{n}|}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $n$ | genähert | genau | genähert | genau |
| 30 | 10 | 8.434 | 8.447 | 84.75 ‰ | 84.57 ‰ |
| | 15 | 11.518 | 11.559 | 53.00 ‰ | 52.70 ‰ |
| | 20 | 13.967 | 14.069 | 37.78 ‰ | 37.26 ‰ |
| 40 | 10 | 8.308 | 8.330 | 86.55 ‰ | 86.23 ‰ |
| | 15 | 11.193 | 11.269 | 55.53 ‰ | 54.92 ‰ |
| | 20 | 13.331 | 13.527 | 41.20 ‰ | 40.11 ‰ |