Gruppenweise Reserverechnung bei Verwendung von Selektions- und Dekremententafeln

Autor(en): **Börlin, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **38 (1939)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966763

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Gruppenweise Reserverechnung bei Verwendung von Selektions- und Dekrementententafeln.

Von *Walter Börlin*, Basel.

Einleitung.

Eine der wichtigsten Arbeiten, die in der Lebensversicherungspraxis dem Mathematiker obliegen, ist die Berechnung des Deckungskapitals für Bilanzzwecke.

Aus der Fülle der Probleme, die sich dabei stellen können, greifen wir das folgende heraus: Zur Verminderung der Kosten, welche die Erstellung einer Bilanz mit sich bringt, werden Verfahren gesucht, die gestatten, den Versicherungsbestand derart aufzuteilen, dass jeder Teilbestand als Einzelversicherung betrachtet werden kann. Demzufolge ist das Deckungskapital des ganzen Bestandes gleich der Summe der Deckungskapitalien dieser künstlich gebildeten Einzelversicherungen. Solche Verfahren heissen Gruppenmethoden.

Es gelang nun bisher, praktisch brauchbare Gruppenmethoden nur dann zu entwickeln, wenn als Rechnungsgrundlage eine Aggregat- oder eine Kompakttafel vorausgesetzt wurde, nicht aber bei Verwendung von Selektions- und Dekrementententafeln. Die Abhängigkeit der Rechnungsgrössen vom Eintrittsalter und der seit dem Versicherungsbeginn verflossenen Zeit führte in letzterem Falle stets zu einer so grossen Zahl von Teilbeständen, dass die Gruppenrechnung nahezu illusorisch wurde, d. h. fast gleich viel Arbeit wie die Einzelrechnung erforderte.

Wir wollen nun zeigen, dass es möglich ist, diese Vermehrung der Teilbestände, kurz Gruppen genannt, zu vermeiden. Das gelingt uns dadurch, dass wir einige spezielle Annahmen über die Konstruktion der Selektionssterbetafel treffen. Die Folge davon ist, dass sämtliche Grössen, die aus der Selektionssterbetafel abgeleitet werden können, ausschliesslich mit Hilfe von Werten aus der Schlusstafel darstellbar sind. Die so erhaltenen, neuen Grössen gestatten eine ebenso einfache gruppenweise Reserverechnung, wie wenn wir eine Aggregattafel als

Rechnungsgrundlage benützen würden und dann die Methode von Jecklin anwendeten.

Wir führen unsere Untersuchungen für die Bestimmung derjenigen Reserve durch, die zum Dividendenplan der steigenden Dividende gehört, weil dieses Beispiel mehrere andere als Spezialfälle enthält.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass unsere Formeln im allgemeinen für Selektions- und Dekrementententafeln gelten; auf allfällige Einschränkungen wird jeweils ausdrücklich hingewiesen werden.

I. Kapitel.

Die Ermittlung der Dividendenreserve mittels Einzelrechnung und bekannter Gruppenmethoden.

Ausgangspunkt der Betrachtungen des ersten Kapitels ist der Dividendenplan; hierauf stellen wir die Formeln der individuellen Dividendenreserve auf. Schliesslich wenden wir uns den bekannten Gruppenmethoden zu, um zu zeigen, dass keine von ihnen ohne irgendeinen Vorbehalt zur gruppenweisen Berechnung der Dividendenreserve geeignet ist, dass also neue Wege beschritten werden müssen.

§ 1.

Der Dividendenplan.

Wir gehen von der gemischten Versicherung aus und führen zu ihrer Beschreibung folgende Symbole ein: Wir bezeichnen mit

x	das Eintrittsalter,
n	die Prämienzahlungs- und die Versicherungsdauer,
K	das versicherte Kapital,
$\Pi_{[x]:\overline{n}\rvert}$	die dem Kapital K entsprechende Bruttoprämie,
t	die seit dem Versicherungsbeginn verflossene Zeit,
Π	diejenige von t unabhängige Grösse, die zur Bemessung der Dividende dient; z. B. ist Π gleich der Bruttoprämie $\Pi_{[x]:\overline{n}\rvert}$,
w	die Wartezeit, die vom Versicherungsbeginn bis zur Ausrichtung der ersten Dividende verstreicht,

ε_1 und ε_2 die Dividendensätze, und zwar mit

ε_1 den Anfangssatz, mit

ε_2 den Steigerungssatz,

ε_τ die bei Fälligkeit der τten Prämie für $\Pi = 1$ auszuschüttende Dividende:

$$\varepsilon_\tau \equiv 0 \qquad \text{für } \tau < w + 1$$
$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (\tau - w - 1) \quad \text{für } \tau \geqslant w + 1,$$

m die Selektionsperiode, die grösser als die Wartezeit w und kleiner als die Versicherungsdauer n sei; es gelte also die Ungleichung

$$0 < w < m < n.$$

Schliesslich setzen wir noch voraus, dass die Dividende während der ganzen Vertragsdauer steige. Sie werde also nicht in dem Sinne begrenzt, dass sie, wie das in der Praxis häufig der Fall ist, höchstens gleich der Bruttoprämie $\Pi_{[x]:\overline{n}|}$ ist.

Um zu diesem Plan die Dividendenreserve berechnen zu können, denken wir uns wie Böhmer die Prämie $\Pi_{[x]:\overline{n}|}$ derart konstruiert, dass sie sich in zwei Teile zerlegen lässt, wovon der eine, die ausreichende Prämie, zur Deckung der garantierten Versicherungsleistungen und aller Verwaltungskosten dient, während aus dem andern die Dividendenansprüche befriedigt werden sollen [1] [1]), S. 105. Letzterem geben wir die Gestalt einer jährlichen, gleichbleibenden Nettoprämie für eine nach w Jahren mit $\varepsilon_1 \Pi$ beginnende, jährlich um $\varepsilon_2 \Pi$ steigende temporäre Leibrente:

$$\pi_{[x]:\overline{n}|} = \Pi \frac{\varepsilon_1 \, {}_{w|}\mathrm{a}_{[x]:\overline{n-w}|} + \varepsilon_2 \, {}_{w+1|}(I\mathrm{a})_{[x]:\overline{n-w-1}|}}{\mathrm{a}_{[x]:\overline{n}|}}.$$

Nach dieser grundlegenden Beschreibung des Dividendenplans und der Herleitung der Dividendenprämie $\pi_{[x]:\overline{n}|}$, die wir im folgenden kurz mit π bezeichnen werden, gehen wir zur Bestimmung der individuellen Dividendenreserve über.

---

[1]) Zahlen in eckiger Klammer [] bezeichnen die betreffende Nummer im Literaturverzeichnis.

§ 2.

Herleitung der individuellen Dividendenreserve.

Wie die individuelle Prämienreserve in der Lebensversicherung, so kann auch die individuelle Dividendenreserve sowohl prospektiv als auch retrospektiv ermittelt werden.

Wir zerlegen zunächst die Versicherungsdauer n in die Abschnitte

$$0 \leqslant t \leqslant w$$
$$w \leqslant t \leqslant m$$
$$m \leqslant t \leqslant n$$

und erhalten daher zu jeder Methode drei Reserveformeln. Nach der prospektiven Methode ist für

$$0 \leqslant t \leqslant w$$

$${}_t\mathcal{V}_{[x]} = \Pi \left\{ \varepsilon_1 \, {}_{w|}\mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2 \, {}_{w+1|}(I\mathrm{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|} \right\} \frac{D_{[x]}}{D_{[x]+t}} - \pi \, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

(1) $$ {}_t\mathcal{V}_{[x]} = \pi \, \mathrm{a}_{[x]:\overline{n}|} \frac{D_{[x]}}{D_{[x]+t}} - \pi \, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}, $$

für $w \leqslant t \leqslant m$

(2) $${}_t\mathcal{V}_{[x]} = \Pi \left\{ \varepsilon_t \, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2 \, (I\mathrm{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|} \right\} - \pi \, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

und für $m \leqslant t \leqslant n$

(3) $${}_t\mathcal{V}_{[x]} = \Pi \left\{ \varepsilon_t \, \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2 \, (I\mathrm{a})_{x+t:\overline{n-t}|} \right\} - \pi \, \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|}.$$

Nach der retrospektiven Methode ist für

$$0 \leqslant t \leqslant w$$

(4) $$ {}_t\mathcal{V}_{[x]} = \pi \frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}, $$

für $w \leqslant t \leqslant m$

(5) $${}_t\mathcal{V}_{[x]} = \pi \frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} - \Pi \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) N_{[x]+w} + \varepsilon_2 (S_{[x]+w} - S_{[x]+t}) - \varepsilon_t N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}$$

und für $m \leqslant t \leqslant n$

$$(6)\quad {}_t\mathcal{V}_{[x]} = \pi \frac{N_{[x]} - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \Pi \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) N_{[x]+w} + \varepsilon_2 (S_{[x]+w} - S_{x+t}) - \varepsilon_t N_{x+t}}{D_{x+t}}.$$

Frl. Piccard schlug zur Berechnung dieser Dividendenreserve einen andern Weg ein [2]. Sie berechnete sie als Differenz zwischen der auf Grundlage zweiter Ordnung ermittelten «notwendigen» Reserve ${}_tV^v_{[x]}$ und der auf Grundlage erster Ordnung erhaltenen Nettoreserve ${}_tV_x$.

Wir geben ihre für uns wichtigen Formeln mit Ausnahme der Symbole ${}_tV^v_{[x]}$ und $P^v_{[x]:\overline{n}|}$ in unserer Bezeichnungsweise wieder. Wir haben dabei auch zwei Versehen korrigiert, welche die Formeln für ${}_tV_x$ und $P^v_{[x]:\overline{n}|}$ betreffen; vgl. S. 276 ff. der Arbeit von Frl. Piccard. Der aufmerksame Leser wird dort noch mehr, an sich unbedeutende Ungenauigkeiten finden.

Beim obigen Plan der steigenden Dividende lauten die Formeln von Frl. Piccard nach der prospektiven Methode:

Für $0 \leqslant t \leqslant w$

$$(7)\quad {}_tV^v_{[x]} = KA_{[x]+t:\overline{n-t}|} - P^v_{[x]:\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + (1-\beta)\, \pi\, \mathrm{a}_{[x]:\overline{n}|} \frac{D_{[x]}}{D_{[x]+t}},$$

wo

$$P^v_{[x]:\overline{n}|} = (1-\beta)\, \Pi_{[x]:\overline{n}|} - K\left(\frac{\alpha}{\mathrm{a}_{[x]:\overline{n}|}} + \gamma\right)$$

ist und α, β, γ in gewohnter Weise die Abschluss-, Inkasso- und Verwaltungskosten für das Kapital 1, bzw. die Bruttoprämie 1 bedeuten.

Für $w \leqslant t \leqslant m$ ist

$$(8)\quad {}_tV^v_{[x]} = KA_{[x]+t:\overline{n-t}|} - P^v_{[x]:\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + (1-\beta)\, \Pi \left\{\varepsilon_t\, \mathrm{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2\, (I\mathrm{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|}\right\}$$

und für $m \leqslant t \leqslant n$

$$(9)\quad {}_tV^v_{[x]} = KA_{x+t:\overline{n-t}|} - P^v_{[x]:\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + (1-\beta)\, \Pi \left\{\varepsilon_t\, \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2 (I\mathrm{a})_{x+t:\overline{n-t}|}\right\}.$$

Die Nettoreserve hat für

$$0 \leqslant t \leqslant n$$

die Gestalt

$$(10) \qquad {}_tV_x = KA_{x+t:\overline{n-t}|} - KP_{x:\overline{n}|}\, a_{x+t:\overline{n-t}|}.$$

Die Formeln nach der retrospektiven Methode sind folgende:

Für

$$0 \leqslant t \leqslant w$$

$$(11) \qquad {}_tV^v_{[x]} = P^v_{[x]:\overline{n}|} \frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} - K \frac{M_{[x]} - M_{[x]+t}}{D_{[x]+t}},$$

für

$$w \leqslant t \leqslant m$$

$$(12) \quad {}_tV^v_{[x]} = P^v_{[x]:\overline{n}|} \frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} - K \frac{M_{[x]} - M_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}$$

$$- (1-\beta)\, \Pi \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, N_{[x]+w} + \varepsilon_2\, (S_{[x]+w} - S_{[x]+t}) - \varepsilon_t\, N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}},$$

für

$$m \leqslant t \leqslant n$$

$$(13) \quad {}_tV^v_{[x]} = P^v_{[x]:\overline{n}|} \frac{N_{[x]} - N_{x+t}}{D_{x+t}} - K \frac{M_{[x]} - M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$- (1-\beta)\, \Pi \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, N_{[x]+w} + \varepsilon_2 (S_{[x]+w} - S_{x+t}) - \varepsilon_t\, N_{x+t}}{D_{x+t}};$$

für

$$0 \leqslant t \leqslant n$$

$$(14) \qquad {}_tV_x = KP_{x:\overline{n}|} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - K \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}.$$

Die Dividendenreserve ${}_t\mathcal{V}_{[x]} = {}_tV^v_{[x]} - {}_tV_x$ nimmt also bei der prospektiven Methode, wenn t von 0 bis n läuft, die Werte (7)—(10), (8)—(10) und (9)—(10) an. Entsprechendes gilt bei der retrospektiven Methode.

Die Gleichungen (7) und (8) und (11) bis (13) von Frl. Piccard enthalten formal die unsrigen, (1) bis (6). Der Übergang ergibt sich durch die Setzungen:

$$A_{[x]+t:\overline{n-t}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} = 0,$$
$$P^{v}_{[x]:\overline{n}|} = \pi,$$
$$\beta = 0$$

und
$$\frac{M_{[x]} - M_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = 0.$$

Da Frl. Piccard ebenfalls Gruppenmethoden untersuchte, kommen wir noch mehrmals auf ihre Arbeit zurück, wobei wir Gelegenheit haben werden, einige ihrer Schlussfolgerungen zu präzisieren.

§ 3.

Übersicht über die bekannten Gruppenmethoden.

Wir geben in diesem Paragraphen einen kurzen Abriss über das Wesen aller bisher entwickelten Gruppenmethoden, um schliesslich diejenigen angeben zu können, die zur Lösung unserer Aufgabe in Frage kommen.

Da wir stets mit Selektions- oder mit Dekrementententafeln rechnen, scheint es auf den ersten Blick nur nötig, solche Gruppenmethoden zu betrachten, bei welchen eine Selektions- oder eine Dekrementententafel vorausgesetzt wird. Das wäre richtig, wenn diese Methoden prinzipiell anders wären als diejenigen, denen eine Aggregattafel zu Grunde liegt. Dem ist aber nicht so: es sind bloss Verallgemeinerungen der letzteren.

1. Gruppenmethoden, bei welchen eine Aggregat- oder eine Kompakttafel vorausgesetzt wird.

a) Allgemeine Ausführungen.

Wir sagten zu Beginn dieser Arbeit, dass die Einführung von Gruppenmethoden in die Technik des Lebensversicherungsbetriebes den Zweck habe, die Berechnung der Deckungskapitalien zu vereinfachen. Es ist aber keineswegs selbstverständlich, dass es überhaupt brauchbare Gruppenmethoden gibt; in diesem Falle müssten wir eben die Reserve für jeden einzelnen Versicherungsvertrag berechnen und dann diese Einzelreserven addieren, um die Reserve des ganzen Bestandes zu erhalten. Dies wäre das eine Extrem; das andere bestände darin, dass zum vornherein der gesamte Bestand als eine Einzel-

versicherung betrachtet werden könnte, also eine Gruppierung überflüssig wäre.

Es wurden im Laufe der Zeit, besonders in England um die Jahrhundertwende, sehr viele Gruppenmethoden entwickelt. — Lochhead stellte die bis 1932 bekannten Methoden mit Angabe der Originalarbeiten zusammen [3]. — Die Verfasser gingen teils von arithmetischen Überlegungen aus, teils wurden sie von der graphischen Darstellung der Reserve zu ihren Untersuchungen angeregt, teils leiteten sie ihre Methoden einzig und allein aus Usanzen der Praxis ab. Die wichtigsten Beispiele der erstgenannten Art sind die Methoden von Altenburger oder Karup und die Lidstonesche Z-Methode. Es herrscht Unklarheit darüber, wem die ersterwähnte Methode zuzuschreiben ist. Wir nennen sie, auf Grund der uns zugänglich gewesenen Originalarbeiten, Methode von Karup; weitere Ausführungen hierzu sind bei Berger zu finden [4], S. 93. Zum zweiten Typus zählen wir die vielen Versuche bei der gemischten Versicherung ${}_tV_x$, $A_{x+t:\overline{n-t}|}$ und $a_{x+t:\overline{n-t}|}$ durch Polynome zu approximieren, um mit Hilfe von Formeln aus der Summen- und Differenzenrechnung die Gruppenreserve zu ermitteln. Elderton verwendete zur Begründung seiner Methode die Tatsache, dass die meisten gemischten Versicherungen auf das 60. Altersjahr abgeschlossen werden [3], S. 56. Sein Verfahren gehört daher zur dritten Gattung. Hiezu gehört auch die von Grieshaber beschriebene Art der Reserverechnung bei Pensionskassen [5], S. 61.

In neuerer Zeit schuf Smolensky die sogenannte Kompakttafel, die aus den nach dem Eintrittsalter und nach der verflossenen Zeit geordneten Beobachtungen durch Vernachlässigung des Alters entsteht [6], S. 235. Mit Hilfe der Kompakttafel ist es möglich, Gruppen gleichen Akquisitionsjahres zu bilden. Solche Gruppen stellen geschlossene Gesamtheiten dar, was z. B. für Untersuchungen, die den Aussendienst betreffen, von grossem Nutzen ist.

Anschliessend an seine Kritik der Smolenskyschen Methode zeigte Jecklin, dass die Reserverechnung nach Gruppen gleicher verflossener Zeit t auch bei Verwendung von Aggregattafeln durchgeführt werden kann [7], [8], [9]. Die Gruppierung nach t setzt also nicht mehr voraus, dass die Reserverechnung auf Grund einer Kompakttafel zu erfolgen hat.

b) Die Methoden von Lidstone und Jecklin.

Wir werden uns im Laufe dieser Untersuchungen immer wieder auf diese beiden Methoden stützen; es ist deshalb angebracht, sie etwas eingehender zu betrachten.

Die Z-Methode Lidstones ist in der Praxis sehr verbreitet; sie ist in den Lehrbüchern und in zahlreichen Spezialabhandlungen auf das genaueste untersucht worden. Es genügt also, hier nur die Resultate zusammenzustellen. Der Einfachheit halber nehmen wir eine nach Makeham ausgeglichene Aggregattafel als Rechnungsgrundlage an, obwohl Lanoix gezeigt hat, dass dies nicht unbedingt erforderlich ist [11]. Ferner setzen wir voraus, dass die Sterbefälle am Ende des Jahres erfolgen.

In der prospektiven Darstellung der Reserve der gemischten Versicherung,

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x &= K\left\{A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\, \mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right\} \\
&= K\left\{1 - d\, \mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\, \mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right\},
\end{aligned}
$$

entwickeln wir den temporären Rentenbarwert in eine unendliche Reihe. Es ist

$$
\mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda}\, \mathfrak{A}_{\lambda}\, (n-t-1)\, c^{\lambda x}, \tag{15}
$$

wo

$$
\mathfrak{A}_{\lambda}\, (n-t-1) = \frac{\nu^{\lambda}}{\lambda!}\, c^{\lambda t} \sum_{\tau=0}^{n-t-1} (vs)^{\tau}\, (c^{\tau}-1)^{\lambda}
$$

mit

$$
\nu = ln\, \frac{1}{g}
$$

ist. Dabei sind c, g und s die Parameter der Makehamschen Funktion und v der Diskontierungsfaktor. Aus den Untersuchungen von Lanoix und anderen geht hervor, dass, wenn wir diese Reihe schon nach dem zweiten Glied abbrechen, ein für die Praxis bedeutungsloser Fehler entsteht [11], S. 50. Alle Versicherungen gleicher restlicher Dauer $n - t$ bilden je eine Gruppe.

Weniger bekannt, für uns aber noch wichtiger, ist die Methode von Jecklin; siehe vor allem die Arbeit [9]. Wieder sei die Aggregattafel nach Makeham ausgeglichen. Nun aber schreiben wir den Aus-

druck für die Reserve der gemischten Versicherung im Gegensatz zu oben in der retrospektiven Form:

$$ {}_tV_x = K\left\{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\right\} $$

und wegen

$$ M_{x+t} = D_{x+t} - d\, N_{x+t} $$

ist

$$ {}_tV_x = K\left\{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:\overline{n}|} - \frac{D_x}{D_{x+t}} + 1 + d\,\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}\right\}. $$

Wir entwickeln

$$ \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \text{und} \quad \frac{D_x}{D_{x+t}} $$

in unendliche Reihen. Es ist mit $z = x + t$

$$ \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} = \sum_{\tau=1}^{t} \frac{D_{z-\tau}}{D_z} = \sum_{\tau=1}^{t} v^{-\tau}\, {}_{-\tau}p_z $$

$$ = \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau}\, e^{-\nu c^z (c^{-\tau}-1)} $$

$$ = \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau} \left\{1 - \frac{\nu}{1!} c^z (c^{-\tau} - 1) + \frac{\nu^2}{2!} c^{2z} (c^{-\tau} - 1)^2 \mp \ldots\right\} $$

$$ = \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau} - \frac{\nu}{1!} c^z \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau} (c^{-\tau} - 1) $$

$$ + \frac{\nu^2}{2!} c^{2z} \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau} (c^{-\tau} - 1)^2 \mp \ldots $$

(16) $$ \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda}\, \mathfrak{B}_{\lambda}(t)\, c^{\lambda x}, $$

wo
$$\mathfrak{B}_\lambda(t) = \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} c^{\lambda t} \sum_{\tau=1}^{t} (vs)^{-\tau} (c^{-\tau} - 1)^\lambda$$

ist. Auf gleiche Weise erhalten wir die Reihe

$$\frac{D_x}{D_{x+t}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \mathfrak{C}_\lambda(t)\, c^{\lambda x}, \tag{17}$$

wo
$$\mathfrak{C}_\lambda(t) = \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} c^{\lambda t} \left\{(vs)^{-t} (c^{-t} - 1)^\lambda\right\}$$

ist. Bezüglich des Näherungsfehlers, der entsteht, wenn wir wieder die Reihen nach dem zweiten Glied abbrechen, sehen wir ohne Mühe ein, dass er sich ungefähr in den gleichen Grenzen wie bei der Z-Methode bewegt. Gruppiert wird bei Jecklin nach t; wir sprechen deshalb auch von der t-Methode.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Gruppenmethoden ist aber noch enger: Bekanntlich wird das Lidstonesche Bilanzalter ξ aus

$$c^{\xi+n-t} \Sigma K = \Sigma K\, c^{x+n} \tag{18}$$

ermittelt, wo das Kapital K als Funktion von x betrachtet wird. Σ ohne Summationsindex kommt nur in Verbindung mit der gruppenweisen Reserverechnung vor und bedeutet eine Abkürzung für $\sum_{i=1}^{k} K(x_i)$, wo k die Anzahl der in einer Gruppe vereinigten Versicherungen ist. Multiplizieren wir in (18) beide Seiten mit c^{-n}, so stellt in

$$c^{\xi-t} \Sigma K = \Sigma K\, c^x \tag{19}$$

$\xi - t$ das mittlere Eintrittsalter der Gruppe dar, und rechts erhalten wir die Summe der Jecklinschen Hilfszahlen.

2. Gruppenmethoden, bei welchen eine Selektions- oder eine Dekremententafel vorausgesetzt wird.

Wir nehmen Bezug auf eine Arbeit von Riem [12]. Unter Verwendung der «British Offices Life Tables 1893» O^M und $O^{[M]}$, und der aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften ab-

geleiteten «Deutschen Sterblichkeits-Tafeln» $D^{M\ u.\ WI.}$ und $D^{[M\ u.\ WI.]}$ wird dort durch numerische Beispiele folgendes bewiesen: Wenn wir die Reserve für eine gemischte Versicherung nach einer Aggregat- und nach einer Selektionssterbetafel berechnen — welchen das gleiche Beobachtungsmaterial zu Grunde liegt —, so ist der absolute Betrag des Unterschiedes zwischen den beiden Reserven ziemlich klein. Auch bei anderen Versicherungsformen verhält es sich so. Es kommen also hier nur Methoden in Betracht, bei welchen die Differenz zwischen der Einzelrechnung und der gruppenweisen Reserverechnung äusserst gering ist, andernfalls würden ja die Feinheiten der Selektionssterbetafel zerstört. Da die gesuchten Methoden, wie wir erkannt haben, aufs engste mit den unter 1. besprochenen zusammenhängen, müssen wir dort Umschau halten. Das Ergebnis ist folgendes: Zum Ausbau auf Selektionssterbetafeln eignen sich nur die Methoden von Karup, Lidstone und Jecklin. Können wir jetzt schon sagen, welche von diesen den beiden andern vorzuziehen ist?

Wenn wir die Einzelreserve in der prospektiven Form darstellen, so können Schwierigkeiten bei der Berechnung der Gruppenreserve nur während der Selektionsperiode, d. h. für $t < m$ auftreten; denn nach Ablauf der Selektionsperiode hat unsere Formel (3) die gleiche Gestalt, wie wenn wir mit einer Aggregattafel rechnen würden. Für diesen Fall, also für $m \leqslant t \leqslant n$, können wir aber die Methoden von Karup und Lidstone anwenden. Bei den retrospektiven Darstellungen, Formeln (4) bis (6), gibt es keine derartige Vereinfachung, auch nicht für $t < m$. Wir vermuten daher, dass die Verallgemeinerung einer auf der prospektiven Einzelreserve basierenden Gruppenmethode leichter möglich sei, als wenn wir von der entsprechenden retrospektiven Formel ausgehen. Es trifft aber, wie wir noch sehen werden, das Gegenteil zu.

Unseres Wissens haben sich nur drei Autoren zu diesen komplizierten Gruppenmethoden präzise geäussert: Dickmann, Frl. Piccard und Jecklin [13], [2], [9]. Wir wollen damit sagen, dass einzig diese die Ergebnisse ihrer Untersuchungen in die Form eines Theorems kleiden, während andere nur das Fehlen befriedigender Lösungen konstatieren [3], S. 63.

Dickmann entwickelte seine Methode für die gemischte Versicherung. In der Arbeit von Frl. Piccard wird sie für die dort behan-

delte «notwendige» Reserve ebenfalls angegeben, allerdings ohne dass dabei Dickmann zitiert wird [2], S. 299. Es handelt sich um folgendes: Dickmann gruppiert bei Verwendung der Selektionssterbetafel zuerst nach dem Eintrittsalter und innerhalb jeder solchen Gruppe noch nach der verflossenen Zeit. Die Reserve dieser Untergruppen kann nach der Methode Karups berechnet werden. Bei der Methode Karups werden alle Versicherungen mit gleichem Bilanzalter $z = x + t$ in einer Gruppe vereinigt. Die Reserve einer Gruppe z-jähriger Personen, die alle eine gemischte Versicherung abgeschlossen haben, berechnet sich dann bekanntlich wie folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma_t V_x &= \Sigma\, K A_{x+t:\overline{n-t}|} - \Sigma\, K P_{x:\overline{n}|}\, \mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= A_z\, \Sigma\, K - \mathsf{a}_z\, \Sigma\, K P_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{D_z}\, \Sigma\, h, \end{aligned}$$

wo

$$h = K\,(N_x\, P_{x:\overline{n}|} - M_x)$$

ist. Die Aufgabe ist dadurch wohl gelöst; es ist aber eine doppelte Gruppierung vorzunehmen, wobei die Anzahl der Gruppen sehr gross wird. Nehmen wir beispielsweise an, die Eintritte erfolgten in den Altern 21 bis 45 und die längste Versicherungsdauer betrage 30 Jahre, dann liefert die Methode Dickmanns bis zu $25 \cdot 30 = 750$ Gruppen. Es ist daher begreiflich, wenn ihr in der Praxis kein Erfolg beschieden war. Im gleichen Fall gibt es nämlich bei der Methode von Karup höchstens $45 + 30 - 20 = 55$ Gruppen.

Zur Anwendbarkeit der Z-Methode bei Selektionssterbetafeln erklärt Frl. Piccard: Lidstones Methode ist erst für $t \geqslant m$ brauchbar, für $t < m$ ist nur Einzelrechnung möglich [2], S. 312. Wir werden aber im nächsten Kapitel, S. 74—75, ein praktisch sinnvolles Gegenbeispiel geben für $w \leqslant t \leqslant m$, sodass die Behauptung von Frl. Piccard nur noch für $0 \leqslant t < w$ richtig ist.

Jecklin betont mehrmals, dass seine Methode auch für Selektionssterbetafeln anwendbar sei [8], S. 335, [9], S. 21 und S. 26. Er gibt ein Beispiel für die $O^{[M]}$-Tafel, wobei er aber das mittlere Eintrittsalter $\xi - t$ aus $q_{[\xi-t]} = \dfrac{\Sigma\, K\, q_{[x]}}{\Sigma\, K}$ berechnet [8]. In einer weiteren

Arbeit behandelt Jecklin nur q_x, nicht aber $q_{[x]}$; er zeigt dort, dass bei Tafeln, die nach Makeham ausgeglichen sind, q_x, μ_x und c^x für die Mittelbildung praktisch gleichwertig sind, und verlangt ganz allgemein, dass die q_x in dem zur Mittelbildung herangezogenen Tafelabschnitt monoton wachsen [10], S. 279. Obwohl wir überzeugt sind, dass Jecklins Methode bei Verwendung von Selektionssterbetafeln praktisch immer befriedigende Resultate gibt, scheint es uns vom theoretischen Standpunkt aus wünschenswert, dieses Verhalten auch mathematisch zu untersuchen. Wir werden uns mit diesem Problem ausführlich befassen.

Schliesslich noch einige Worte zu dem sehr schwierigen Thema: Gruppenmethoden, wenn eine Dekrementententafel vorausgesetzt wird. Hierüber ist uns nur die Ansicht von Frl. Piccard bekannt; sie lautet: Wenn wir mit einer dreifach abgestuften Dekrementententafel — Abstufung nach dem Eintrittsalter, der Versicherungsdauer und der verflossenen Zeit — rechnen wollen, so versagen Karups und Lidstones Methode vollkommen, d. h. sie lassen sich nicht verallgemeinern. Es ist nur Einzelrechnung möglich [2], S. 301 und S. 313. Wir stimmen dieser Aussage bei. Weitere Ausführungen über diese komplizierten Gruppenmethoden erfolgen am Schluss des dritten Kapitels.

Von den drei Methoden, die wir im zweiten Teil dieses Paragraphen betrachteten, scheiden wir nun diejenige von Dickmann als praktisch unbrauchbar aus. Im nächsten Kapitel wird also nur noch von den Methoden Lidstones und Jecklins die Rede sein.

II. Kapitel.

Die Methoden von Lidstone und Jecklin bei Verwendung einer Selektionssterbetafel.

Bevor wir den Versuch unternehmen, die Z-Methode und die t-Methode auf Selektionssterbetafeln auszudehnen, machen wir in § 1 Angaben über die Konstruktion der zu verwendenden Selektionssterbetafel. Hierauf verallgemeinern wir die Reihen (15) bis (17), damit wir sie bei Anwendung der Lidstoneschen Methode in die Formeln (1) bis (3) und bei Jecklins Methode in die Formeln (4) bis (6) einsetzen können.

§ 1.

Die Wahl der Selektionssterbetafel.

Ganz allgemein stellen wir folgende Überlegung an: Weil das Makehamsche Gesetz einen tieferen Einblick in die Struktur der Aggregattafeln und der daraus abgeleiteten Rentenbarwerte gewährt, liegt die Vermutung nahe, dass auch Selektionssterbetafeln nach einem mit dem Makehamschen Gesetz verwandten analytischen Ausdruck ausgeglichen werden können. Vielleicht gelingt es dann, die Ergebnisse von Frl. Piccard zu erweitern und Jecklins t-Methode auch für Selektionssterbetafeln mathematisch zu fundieren.

Solche Überlebensordnungen gibt es schon lange. Am Schluss einer holländisch geschriebenen Arbeit sagt Van der Hoek, dass Poterin du Motel der erste gewesen sei, der dieses Problem studiert habe; siehe [14], S. 80 und [15]. Van der Hoek zitiert noch andere Autoren und Formeln; unter andern G. F. Hardy und die Ausgleichung der $O^{[M]}$-Tafel.

Diese Formeln fanden unseres Wissens noch keine Anwendung in der Reserverechnung, zum mindesten nicht zur Bestimmung der Reserve einer Versicherung mit veränderlichen Leistungen im Sinne unserer «Dividendenversicherung».

Ebenso wie sich das Makehamsche Gesetz nur zur Beschreibung der Sterblichkeit bei den Erwachsenen eignet, trifft das für die nachstehend definierte Absterbeordnung zu:

Es gelte während der Selektionsperiode m

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu_{[x]+t} = A\,(t, m) + B\,(t, m)\,c^{x+t} \\ \text{und für } t \geqslant m \text{ das Makehamsche Gesetz} \\ \mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}. \end{cases}$$

Ferner sei für alle x und t

$$(21)\qquad \begin{cases} a)\ \mu_{[x]} \leqslant \mu_{[x+t]} \\ b)\ \mu_{[x]} \leqslant \mu_{[x]+t} \\ c)\ \mu_{[x]+t} \leqslant \mu_{x+t}\,, \end{cases}$$

wobei Gleichheit in *a)* und *b)* nur für $t = 0$, in *c)* nur für $t = m$ eintreten möge. Hierzu sind noch folgende Erläuterungen nötig:

1. Die Funktionen $A\ (t,\ m)$ und $B\ (t,\ m)$ sollen wie $\mu_{[x]+t}$ und μ_{x+t} integrierbar und differenzierbar sein. Sie dürfen, solange dabei die Bedingungen (21) erfüllt sind, positive und negative Werte annehmen, monotone oder nicht monotone Funktionen sein.

2. Es sei

$$(22)\qquad \begin{cases} A\ (m,\ m) = A = ln\ \dfrac{1}{s} \quad \text{und} \\[2ex] B\ (m,\ m) = B = ln\ c\ ln\ \dfrac{1}{g}, \end{cases}$$

wodurch für alle aus (20) ableitbaren Funktionen der glatte — bei graphischen Darstellungen keine Ecke erzeugende — Übergang vom Selektionsabschnitt in die Schlusstafel gewährleistet wird.

3. Die Bedingungen (21) bewirken, dass sämtliche Schnitte durch die Fläche $M\ (x,\ t) = \mu_{[x]+t}$, die parallel zur $x\ M$-Ebene oder zur $t\ M$-Ebene geführt werden, monoton steigende Kurven ergeben.

Für unsere Zwecke eignet sich statt der Form (20) die folgende, dazu äquivalente, besser.

Es gelte während der Selektionsperiode:

$$(23)\qquad \begin{cases} \mu_{[x]+t} = \mu_{x+t}\ H\ (t,\ m) + I\ (t,\ m) \\[1ex] \text{und für } t \geqslant m \text{ sei wie oben} \\[1ex] \mu_{x+t} = A + B\ c^{x+t}. \end{cases}$$

Der Zusammenhang mit (20) ergibt sich durch die Setzungen

$$(24)\qquad \begin{cases} A\ (t,\ m) = A\ H\ (t,\ m) + I\ (t,\ m) \\[1ex] \text{und} \\[1ex] B\ (t,\ m) = B\ H\ (t,\ m). \end{cases}$$

Die Funktionen $H(t, m)$ und $I(t, m)$ sollen ebenfalls die unter 1. genannten Bedingungen erfüllen. Unter Berücksichtigung von (22) folgt aus (24)

$$H(m, m) = 1 \text{ und } I(m, m) = 0.$$

Wenn wir in Zukunft die Wendung gebrauchen: «vorausgesetzt wird eine nach (23) ausgeglichene Tafel», so dürfen wir also immer (23) durch (20) ersetzen; denn wir haben die Bedingungen (21) nicht geändert.

Die theoretisch grosse Klasse von Funktionen $A(t, m)$, $B(t, m)$; $H(t, m)$, $I(t, m)$, welche die angeführten Forderungen befriedigen, existiert in der Praxis nicht. An Hand der Tafeln $O^{[M]}$, $O^{[NM]}$ und der norwegischen Leibrententafel «Norske aktuarer 1918», stellen wir fest, dass alle vier positiv sind, $A(t, m)$ und $B(t, m)$ monoton wachsen, $H(t, m)$ und $I(t, m)$ dagegen monoton abnehmen. Die numerischen Werte dieser Funktionen haben wir auf Seite 94—95 zusammengestellt, wo sich noch andere Beispiele zu den nachfolgenden Untersuchungen befinden. Die soeben genannte norwegische Tafel, die wir noch öfters unter Verwendung der dafür vom norwegischen Aufsichtsamt eingeführten Abkürzung N. akt. 1918 erwähnen werden, ist mit der vom «Norske Livsforsikringsselskapers Statistiske Kontor» veröffentlichten «Beregningsgrundlag for Livrenter 1920» identisch [1]).

Die nach (23) ausgeglichenen Tafeln haben eine für unsere Zwecke sehr wichtige Eigenschaft: sie verhalten sich im Selektions- und im Schlusstafelabschnitt bei der Mittelbildung nach Lidstone oder nach Jecklin wie eine nach Makeham ausgeglichene Aggregattafel. Es ist nämlich

$$\{\mu_\xi H(t, m) + I(t, m)\} \Sigma K = \Sigma K \{\mu_{x+t} H(t, m) + I(t, m)\},$$

d. h.

$$\mu_\xi \Sigma K = \Sigma K \mu_{x+t}$$

und wie Seite 63 (18) $c^{\xi+n-t} \Sigma K = \Sigma K c^{x+n}$,

bzw. (19) $c^{\xi-t} \Sigma K = \Sigma K c^x$.

---

[1]) Diese Bemerkung, wie auch die meisten Angaben, die ich noch über die Tafel N. akt. 1918 machen werde, verdanke ich zwei freundlichen Mitteilungen des Herrn F. Borch.

§ 2.

Verallgemeinerte Reihenentwicklungen.

Die grosse praktische Bedeutung der Z- und der t-Methode beruht auf der Tatsache, dass sie für die Darstellung der Einzelreserve für die gemischte Versicherung, und damit auch für die Gruppenreserve, die Reihenentwicklungen (15) bis (17) gestatten. Wir halten in unsern Formeln (1) bis (6) Nachschau, ob das dort ebenfalls möglich ist. Wir erkennen sogleich, dass wir verallgemeinerte Reihenentwicklungen benötigen.

Wir gehen folgendermassen vor: Zuerst integrieren wir $\mu_{[x]+t}$, dann setzen wir $l_{[x]+t}$ in die erforderlichen Ausdrücke ein, und schliesslich führen wir die Reihenentwicklung aus.

Wir integrieren $\mu_{[x]+t}$, das wir in der Form (23) annehmen, wie folgt:

$$\int_t^m \mu_{[x]+\tau}\, d\tau = \int_t^m \mu_{x+\tau}\, H(\tau, m)\, d\tau + \int_t^m I(\tau, m)\, d\tau$$

$$= \int_t^m \mu_{x+\tau}\, d\tau - \int_t^m \mu_{x+\tau}\, [1 - H(\tau, m)]\, d\tau + \int_t^m I(\tau, m)\, d\tau.$$

Dies gibt wegen der bekannten Beziehung

$$\mu_{[x]+\tau} = -\frac{d}{d\tau} ln\, l_{[x]+\tau}$$

$$-ln\, l_{[x]+\tau}\Big|_t^m = -ln\, l_{x+\tau}\Big|_t^m - \int_t^m \mu_{x+\tau}\, [1 - H(\tau, m)]\, d\tau + \int_t^m I(\tau, m)\, d\tau.$$

Da $l_{[x]+m} \equiv l_{x+m}$ und $H(m, m) = 1$ ist, erhalten wir

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}\, e^{-\int_t^m \mu_{x+\tau}[1-H(\tau, m)]\, d\tau}\, e^{\int_t^m I(\tau, m)\, d\tau}. \tag{25}$$

Entscheidend für die Möglichkeit, in unsern Formeln (1) bis (6) ähnliche Reihenentwicklungen wie für die Reserve der gemischten Versicherung einführen zu können, ist die Tatsache, dass sich diese Formeln als Summen oder Spezialfälle des Ausdruckes

$$\frac{D_{[x]+u}}{D_{[x]+t}}$$

darstellen lassen. Es ist wegen

$$\mu_{x+\tau} = A + B\, c^{x+\tau}$$

und

$$l_{x+u} = k\, s^{x+u}\, g^{c^{x+u}}$$

$$= k\, s^{x+u}\, e^{B\int_u^m c^{x+\tau}\, d\tau - c^{x+m} ln \frac{1}{g}}$$

$$D_{[x]+u} = k\,(vs)^x\,(vs)^u\, e^{-A\int_u^m [1-H(\tau,m)]\, d\tau}\, e^{B\int_u^m c^{x+\tau} H(\tau,\, m)\, d\tau - c^{x+m} ln \frac{1}{g}}\, e^{\int_u^m I(\tau,m)\, d\tau},$$

somit

$$\frac{D_{[x]+u}}{D_{[x]+t}} = (vs)^{u-t}\, e^{A\int_t^u [1-H(\tau,m)]\, d\tau}\, e^{-B\int_t^u c^{x+\tau} H(\tau,m)\, d\tau}\, e^{-\int_t^u I(\tau,m)\, d\tau}.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{R}_1(t) = (vs)^{u-t}\, e^{A\int_t^u [1-H(\tau,m)]\, d\tau}\, e^{-\int_t^u I(\tau,m)\, d\tau}$$

und

$$\mathfrak{R}_2(t) = B\int_t^u c^\tau\, H(\tau,m)\, d\tau.$$

Wir erhalten

$$\frac{D_{[x]+u}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{R}_1(t)\, e^{-\mathfrak{R}_2(t) c^x}$$

$$\frac{D_{[x]+u}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{R}_1(t) \left\{ 1 - \mathfrak{R}_2(t)\, c^x + \mathfrak{R}_2^2(t) \frac{c^{2x}}{2!} \mp \dots \right\} \tag{26}$$

und, wenn wir die Reihe nach dem zweiten Glied abbrechen,

$$\frac{D_{[x]+u}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{R}_1(t) - \mathfrak{R}_1(t)\, \mathfrak{R}_2(t)\, c^x.$$

Je nachdem wir eine der Formeln (1) bis (6) darstellen wollen, summieren wir entsprechend in Gleichung (26) über u von 0 bis $n - t - 1$ oder von 1 bis t oder von 1 bis $\mathfrak{t} = t - w$. Die Summation der rechten Seite von (26) ergibt die Reihenentwicklung des linksstehenden Ausdruckes; wir bezeichnen diese Summen rechts, entsprechend ihrer oberen Grenze, mit $\mathfrak{S}_\lambda(n-t-1)$, $\mathfrak{S}_\lambda(t)$, $\mathfrak{S}_\lambda(\mathfrak{t})$. Insbesondere sind die früher eingeführten Werte $\mathfrak{A}_\lambda(n-t-1)$, $\mathfrak{B}_\lambda(t)$, $\mathfrak{C}_\lambda(t)$ Spezialfälle der $\mathfrak{S}_\lambda$.

Es sei uns gestattet, die umfangreichen und sich stets wiederholenden Reihenentwicklungen, die wir zur Darstellung der Formeln (1) bis (6) benötigen, wegzulassen und nur die Resultate mitzuteilen.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Ausdrücke (29) bis (34) direkt den Formeln (1) bis (6) entnommen. (35) und (36) entstehen durch Umformung des Zählers des zweiten Gliedes rechts in (5):

$$(27)\qquad (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,N_{[x]+w} + \varepsilon_2\,(S_{[x]+w}-S_{[x]+t}) - [\varepsilon_1 + \varepsilon_2\,(t-w-1)]\,N_{[x]+t}$$
$$= (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[x]+w}-N_{[x]+t}) + \varepsilon_2\,[S_{[x]+w}-S_{[x]+t}-(t-w)\,N_{[x]+t}];$$

analog erhalten wir in (6)

$$(28)\qquad (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[x]+w}-N_{x+t}) + \varepsilon_2\,[S_{[x]+w}-S_{x+t}-(t-w)\,N_{x+t}]$$

und damit die Ausdrücke (37) und (38). Die restlichen vier, (39) bis (42), benötigen wir erst im nächsten Kapitel. Unsere Liste enthält zwölfmal die Differenz $\mathfrak{S}_\lambda - \mathfrak{S}_{\lambda+1}\,c^x$; immer sind es die ersten beiden Glieder der betreffenden Reihe. An Stelle von elf weiteren Buchstaben für die auftretenden Koeffizienten setzen wir Indizes.

$$(29)\qquad \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} = \mathfrak{S}_1(n-t-1) - \mathfrak{S}_2(n-t-1)\,c^x$$

$$(30)\qquad (I\,\mathsf{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|} = \mathfrak{S}_3(n-t-1) - \mathfrak{S}_4(n-t-1)\,c^x$$

$$(31)\qquad \mathsf{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \mathfrak{A}_0(n-t-1) - \mathfrak{A}_1(n-t-1)\,c^x$$

$$(32)\qquad (I\,\mathsf{a})_{x+t:\overline{n-t}|} = \mathfrak{S}_5(n-t-1) - \mathfrak{S}_6(n-t-1)\,c^x$$

$$(33)\qquad \frac{N_{[x]}-N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{S}_7(t) - \mathfrak{S}_8(t)\,c^x$$

$$\frac{N_{[x]}-N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_9(t) - \mathfrak{S}_{10}(t)\, c^x \tag{34}$$

$$\frac{N_{[x]+w}-N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{S}_{11}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{12}(\mathrm{t})\, c^x \tag{35}$$

$$\frac{S_{[x]+w}-S_{[x]+t}-(t-w)\, N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = \mathfrak{S}_{13}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{14}(\mathrm{t})\, c^x \tag{36}$$

$$\frac{N_{[x]+w}-N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{15}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{16}(\mathrm{t})\, c^x \tag{37}$$

$$\frac{S_{[x]+w}-S_{x+t}-(t-w)\, N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{17}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{18}(\mathrm{t})\, c^x \tag{38}$$

$$\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{B}_0(t) - \mathfrak{B}_1(t)\, c^x \tag{39}$$

$$\frac{N_{x+w}-N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{19}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{20}(\mathrm{t})\, c^x \tag{40}$$

$$\frac{S_{x+w}-S_{x+t}-(t-w)\, N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{21}(\mathrm{t}) - \mathfrak{S}_{22}(\mathrm{t})\, c^x \tag{41}$$

$$\frac{D_x-D_{[x]}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{23}(t) - \mathfrak{S}_{24}(t)\, c^x \tag{42}$$

Nach diesen Vorbereitungen behandeln wir unter Berücksichtigung obiger Ausdrücke in den beiden nächsten Paragraphen die Auswirkungen der nach (23) ausgeglichenen Selektionssterbetafel auf die gruppenweise Berechnung unserer Dividendenreserve nach den Methoden Lidstones und Jecklins.

§ 3.

Die Methode Lidstones bei Verwendung einer Selektionssterbetafel.

Wir wenden uns wieder den Formeln (1) bis (3) zu. Die erste können wir nicht so umformen, dass eine Gruppierung nach $n - t$ stattfinden kann. Dagegen führt (2) wegen

$$\varepsilon_t = \varepsilon_n - \varepsilon_2 (n-t)$$

auf

$$\Sigma_t \mathcal{V}_{[x]} = \mathsf{a}_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} \{\Sigma \Pi \varepsilon_n - \varepsilon_2 (n-t) \Sigma \Pi - \Sigma \pi\} + \varepsilon_2 (I\mathsf{a})_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} \Sigma \Pi$$
$$= \Sigma \{\Pi \varepsilon_n - \varepsilon_2 (n-t) \Pi - \pi\} \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + \varepsilon_2 \Sigma \Pi (I\mathsf{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|}.$$

Damit die Gruppenreserve gleich der Summe der Einzelreserven ist, müssen folgende vier Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden:

$$\mathsf{a}_{[\xi_1-t]+t:\overline{n-t}|} \Sigma \Pi \varepsilon_n = \Sigma \Pi \varepsilon_n \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|},$$
$$\mathsf{a}_{[\xi_2-t]+t:\overline{n-t}|} \Sigma \Pi = \Sigma \Pi \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|},$$
$$(I\mathsf{a})_{[\xi_3-t]+t:\overline{n-t}|} \Sigma \Pi = \Sigma \Pi (I\mathsf{a})_{[x]+t:\overline{n-t}|},$$
$$\mathsf{a}_{[\xi_4-t]+t:\overline{n-t}|} \Sigma \pi = \Sigma \pi \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}.$$

Nun setzen wir die Formeln (29) und (30) ein; wir erhalten wegen $\xi_2 \equiv \xi_3$ drei verschiedene Gleichungen zur Berechnung der Zentralalter ξ_1 bis ξ_4:

$$c^{\xi_1+n-t} \Sigma \Pi \varepsilon_n = \Sigma \Pi \varepsilon_n c^{x+n},$$
$$c^{\xi_{2,3}+n-t} \Sigma \Pi = \Sigma \Pi c^{x+n},$$
$$c^{\xi_4+n-t} \Sigma \pi = \Sigma \pi c^{x+n}.$$

Die Praxis lehrt, dass nur ein kleiner Fehler entsteht, wenn bei der gemischten Versicherung lediglich ein Zentralalter berechnet wird, obwohl theoretisch deren zwei erforderlich sind; es werden stets die Versicherungssummen zur Mittelbildung herangezogen; vgl. unsere Ausführungen auf Seite 63. Wir gehen nun analog vor, indem wir ξ_4 gleich $\xi_2 \equiv \xi_3$ setzen. Unter Umständen ist die Verteilung der ε_n eine solche, dass auch ξ_1 so wenig von ξ_2 abweicht, dass für die Durchführung der gruppenweisen Reserverechnung, wenn $w \leqslant t \leqslant m$ ist, vier Summationen genügen, nämlich

$$\Sigma \Pi, \ \Sigma \Pi \varepsilon_n, \ \Sigma \pi, \ \Sigma \Pi c^{x+n}.$$

Analog behandeln wir mit Hilfe der Formeln (31) und (32) die Reservegleichung (3) und erkennen, dass wir keine anderen Summationen nötig haben als die obigen.

Wir gelangen schliesslich zu folgendem Ergebnis, wobei $w \lesseqgtr m$ ist: Wenn die Selektionssterbetafel nach (23) ausgeglichen ist, so ist für $0 \leqslant t < w$ die Berechnung der Dividendenreserve nach Gruppen gleicher restlicher Dauer $n—t$ nicht möglich; wir müssen zur Einzelrechnung übergehen oder eine andere Gruppenmethode benützen. Die Z-Methode kann Verwendung finden, sobald $w \leqslant t \leqslant n$ ist. Nach Frl. Piccard trifft das aber erst zu, wenn sowohl die Wartezeit als auch die Selektionsperiode abgelaufen ist. Die Anwendung der Gruppenmethode ist also auch in dem praktisch wichtigen Fall $w < m$ für $w \leqslant t \leqslant m$ möglich.

§ 4.

Übertragung der Methode Jecklins auf Selektionssterbetafeln.

Im Gegensatz zur Lidstoneschen Methode ist diejenige von Jecklin an die retrospektive Darstellung der Einzel- bzw. Gruppenreserve gebunden, Formeln (4) bis (6).

Wir erhalten deshalb für

$$0 \leqslant t \leqslant w$$

$$\frac{N_{[\xi-t]}-N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}} \Sigma \pi = \Sigma \pi \frac{N_{[x]}-N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}. \tag{43}$$

Für $w \leqslant t \leqslant m$ formen wir Gleichung (5) mit Berücksichtigung von (27) derart um, dass wir die Gruppenreserve in der Gestalt

$$\begin{aligned} &\frac{N_{[\xi-t]}-N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}} \Sigma\pi - \left\{ \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[\xi-t]+w}-N_{[\xi-t]+t})}{D_{[\xi-t]+t}} \right. \\ &\qquad \left. + \varepsilon_2 \frac{S_{[\xi-t]+w}-S_{[\xi-t]+t}-(t-w)\,N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}} \right\} \Sigma \Pi \\ &= \Sigma \pi \frac{N_{[x]}-N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} - \Sigma \Pi \left\{ \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[x]+w}-N_{[x]+t})}{D_{[x]+t}} \right. \\ &\qquad \left. + \varepsilon_2 \frac{S_{[x]+w}-S_{[x]+t}-(t-w)\,N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} \right\} \end{aligned} \tag{44}$$

schreiben können.

Für $m \leqslant t \leqslant n$ entspricht der Einzelreserve (6) wegen (28) die Gruppenreserve

$$(45) \qquad \frac{N_{[\xi-t]}-N_{\xi}}{D_{\xi}} \Sigma \pi - \left\{ \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[\xi-t]+w}-N_{\xi})}{D_{\xi}} + \varepsilon_2 \frac{S_{[\xi-t]+w}-S_{\xi}-(t-w)\,N_{\xi}}{D_{\xi}} \right\} \Sigma \Pi$$

$$= \Sigma \pi \frac{N_{[x]}-N_{x+t}}{D_{x+t}} - \Sigma \Pi \left\{ \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(N_{[x]+w}-N_{x+t})}{D_{x+t}} + \varepsilon_2 \frac{S_{[x]+w}-S_{x+t}-(t-w)\,N_{x+t}}{D_{x+t}} \right\}.$$

Formel (43) führt wegen (33) auf die Bedingungsgleichung für das Zentralalter

$$(46) \qquad c^{\xi-t}\,\Sigma \pi = \Sigma \pi\, c^{x};$$

dazu kommt aus (44) wegen (35) und (36)

$$(47) \qquad c^{\xi-t}\,\Sigma \Pi = \Sigma \Pi\, c^{x},$$

während (45), wo die Gleichungen (34), (37) und (38) eingesetzt werden, keine von (46) oder (47) verschiedene liefert.

Wenn wir analog wie bei der Lidstoneschen Methode annehmen, die aus (46) und (47) berechneten Zentralalter seien näherungsweise gleich, so benötigen wir bei Gruppierung nach Jecklin, wenn t von 0 bis n läuft, drei Summationen, nämlich

$$\Sigma \Pi,\ \Sigma \pi,\ \Sigma \Pi\, c^{x}.$$

Eine Gegenüberstellung dieses Ergebnisses mit dem bei Anwendung der Z-Methode erhaltenen, ergibt zugunsten der t-Methode zwei Vorteile:

1. Die t-Methode ist für die Ermittlung der Dividendenreserve während der ganzen Versicherungsdauer verwendbar. Die Z-Methode dagegen muss während der Dividendenwartezeit durch eine andere ersetzt werden.

2. Wir brauchen zur Berechnung der Gruppenreserve nur drei statt mindestens vier Hilfsgrössen zu summieren.

Diese Vorteile werden unseres Erachtens nicht durch irgendwelche Nachteile wettgemacht.

Wir haben vorstehend den Nachweis erbracht, dass die t-Methode in der Tat auch dann anwendbar ist, wenn eine nach (23) ausgeglichene Selektionssterbetafel als Rechnungsgrundlage vorausgesetzt wird. Vergegenwärtigen wir uns aber die praktische Durchführung, so erkennen wir, dass sie doch noch ziemlich umständlich ist. Wir müssen nämlich folgendes bedenken: Angenommen, wir hätten die Summationen $\Sigma \Pi$, $\Sigma \pi$ und $\Sigma \Pi c^x$ ausgeführt und auch aus Gleichung (47) das Zentralalter $\xi - t$ berechnet. Dann setzen wir $\xi - t$ je nach dem Wert von t in eine der Formeln (43) bis (45) ein. Es sollten nun, damit der Praktiker bei der Ausführung der Reserverechnung nicht durch Nebenrechnungen gestört wird, die sechs Ausdrücke

$$(48)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{N_{[\xi-t]} - N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}}, \quad \dfrac{N_{[\xi-t]} - N_{\xi}}{D_{\xi}}, \quad \dfrac{N_{[\xi-t]+w} - N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}}, \\[2ex] \dfrac{S_{[\xi-t]+w} - S_{[\xi-t]+t} - (t-w)\, N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}}, \\[2ex] \dfrac{N_{[\xi-t]+w} - N_{\xi}}{D_{\xi}}, \quad \dfrac{S_{[\xi-t]+w} - S_{\xi} - (t-w)\, N_{\xi}}{D_{\xi}} \end{array} \right.$$

tabelliert vorhanden sein. Dazu brauchen wir aber Tabellen mit doppeltem Eingang, also ein Hilfsmittel, das der Praktiker, wenn immer möglich, vermeidet. An Stelle dieser Ausdrücke können wir die entsprechenden Reihenentwicklungen (33) bis (38) verwenden, wo wir nur x durch $\xi - t$ zu ersetzen haben. Das bedingt aber zwölf einfach abgestufte Tabellen, welche die Werte $\mathfrak{S}_7$ bis $\mathfrak{S}_{18}$ enthalten. Verglichen mit dem vorigen, ist das eine wesentliche Vereinfachung des Verfahrens. Diese Verbesserung kann aber noch bedeutend weiter getrieben werden.

Borch teilte nämlich eine vereinfachte Darstellung der Selektionssterbetafel mit [16]. Ihre Einführung in unsere Reserveformeln (43) bis (45) bewirkt, dass wir anstatt der zwölf $\mathfrak{S}_\lambda$, $\mathfrak{S}_7$ bis $\mathfrak{S}_{18}$, bloss vier Hilfsgrössen brauchen, die allerdings noch komplizierter als die $\mathfrak{S}_\lambda$ gebaut sind.

III. Kapitel.

Lösung des Problems mit Hilfe einer Näherungsformel von Borch.

Die Arbeit von Borch ist für uns sehr wichtig, ja insofern ausschlaggebend, als die darin entwickelte allgemeine Näherungsformel für $l_{[x]+t}$ zur praktisch brauchbaren Lösung unserer Reserverechnung führt. Wir geben daher zuerst einen Auszug aus Borchs Untersuchungen, der aber nur das für unsere Zwecke Notwendige enthält. Nachdem wir dann mit Hilfe einer weiteren Näherung das eine Ziel, die gruppenweise Reserverechnung mittels Selektionssterbetafeln, erreicht haben, beschäftigen wir uns mit Gruppenmethoden, die angewandt werden können, wenn zur Reserverechnung eine Dekrementententafel gewählt wird.

§ 1.

Auszug aus einer Arbeit von Borch.

1. Eine Näherung für $l_{[x]+t}$.

Borch geht von der Identität

$$l_{[x]+t} = l_{x+t} - (l_x - l_{[x]}) \frac{l_{x+t} - l_{[x]+t}}{l_x - l_{[x]}}$$

aus. Er konstatiert, dass bei verschiedenen Tafeln, u. a. bei der $O^{[M]}$-Tafel und der Frauentafel der Seite 69 erwähnten norwegischen Grundlage, der Quotient

$$\varphi(x, t) = \frac{l_{x+t} - l_{[x]+t}}{l_x - l_{[x]}} \tag{49}$$

näherungsweise eine Funktion von t allein ist, die er mit $\varphi(t)$ bezeichnet. Er setzt also

$$l_{[x]+t} = l_{x+t} - (l_x - l_{[x]})\, \varphi(t)$$

und verlangt, dass $\varphi(t)$ folgende sechs Bedingungen erfülle:

$$(50)\quad \begin{cases} 1.\ \varphi(0) = 1, & \text{damit } l_{[x]+0} \equiv l_{[x]}, \\ 2.\ \varphi(m) = 0, & \text{damit } l_{[x]+m} \equiv l_{x+m}, \\ 3.\ \varphi'(t) < 0, & \text{damit } \varphi(t) \text{ im Intervall } 0 \leqslant t \leqslant m \text{ monoton abnimmt,} \\ 4.\ \varphi''(t) > 0, & \text{damit } \varphi(t) \text{ im Intervall } 0 \leqslant t \leqslant m \text{ konvex nach unten ist,} \\ 5.\ \varphi'(m) = 0, & \text{damit } \mu_{[x]+m} \equiv \mu_{x+m}, \\ 6.\ \varphi''(m) = 0, & \text{damit } \mu'_{[x]+m} \equiv \mu'_{x+m}, \end{cases}$$

d. h. die beiden Intensitätsfunktionen sollen für $t = m$ eine gemeinsame Tangente haben. Borch erzwingt auf diese Weise den gleichen Übergang der $\mu_{[x]+t}$ vom Selektions- zum Schlusstafelabschnitt, wie wir ihn durch unsere Bedingung (22) gefordert haben. Er setzt z. B. bei der Tafel N. akt. 1918, Frauen für $\varphi(t)$ auf Grund einer Ausgleichung der $\varphi(x,t)$ eine Parabel dritten Grades ein,

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{m}\right)^3,$$

und erhält dabei vorzügliche Näherungswerte für

$$q_{[x]+t} \text{ und } \mathsf{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}.$$

Wir wollen einen anderen Weg zur Bestimmung der Funktion $\varphi(t)$ einschlagen. Insbesondere verwenden wir nur die durch die Überlebensordnung vorgegebenen Grössen, also die Makehamschen Konstanten c, g, s und die Funktionen $A(t,m)$ und $B(t,m)$, bzw. $H(t,m)$ und $I(t,m)$. Wiederum sollen die Bedingungen (50) eingehalten werden.

Der Ansatz

$$(51)\qquad \varphi(t) = \frac{l_t - l_{[0]+t}}{l_0 - l_{[0]}}$$

erfüllt jedenfalls die Bedingungen (50); auf den ersten Blick mag er als zu einfach erscheinen. Er ist es aber nicht. Wir wollen das wie folgt begründen: Es ist nach (25)

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}\, e^{-\int_t^m \mu_{x+\tau}[1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; e^{\int_t^m I(\tau,m)\,d\tau}$$

und wegen

$$\mu_{x+\tau} = ln\frac{1}{s} + ln\, c\, ln\frac{1}{g}\, c^{x+\tau}$$

ist

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}\, s^{\int_t^m [1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; g^{\int_t^m c^{x+\tau}[1-H(\tau,m)]\,ln\,c\,d\tau}\; e^{\int_t^m I(\tau,m)\,d}$$

$$(52)\qquad l_{[x]+t} = l_{x+t}\, s^{\int_t^m [1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; g^{\int_t^m c^{x+\tau} H'(\tau,m)\,d\tau}\; g^{-[1-H(t,m)]\,c^{x+t}}\; e^{\int_t^m I(\tau,m)\,d\tau}.$$

Da $g \sim 1$, $c \sim 1$ und bei den uns bekannten Tafeln auch $H(t,m) \leqslant 1$ ist, vgl. S. 94—95, entsteht in (52) nur ein kleiner Fehler, wenn wir für kleine Werte von τ, $0 \leqslant \tau \leqslant m$, $g^{c^{x+\tau}} \sim g^{c^x+c^\tau}$ setzen. Analog ist $g^{c^{x+t}} \sim g^{c^x+c^t}$ für $0 \leqslant t \leqslant m$. Wir wenden diese Näherung zweimal an. Es ist

$$(53)\qquad \begin{cases} l_{[x]+t} \sim l_{x+t}\, s^{\int_t^m [1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; g^{\int_t^m (c^x+c^\tau) H'(\tau,m)\,d\tau} \\ \qquad\qquad \cdot\, g^{-[1-H(t,m)](c^x+c^t)}\; e^{\int_t^m I(\tau,m)\,d\tau} \\ \qquad \sim l_{x+t}\, s^{\int_t^m [1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; g^{\int_t^m c^\tau H'(\tau,m)\,d\tau}\; g^{-[1-H(t,m)]\,c^t}\; e^{\int_t^m I(\tau,m)\,d\tau}, \\ l_{[x]} \sim l_x\, s^{\int_0^m [1-H(\tau,m)]\,d\tau}\; g^{\int_0^m c^\tau H'(\tau,m)\,d\tau}\; g^{-[1-H(0,m)]}\; e^{\int_0^m I(\tau,m)\,d\tau} \end{cases}$$

und

$$(54)\qquad \begin{cases} l_{x+t} \sim l_t\, s^x\, g^{c^x-1}, \\ l_x \sim l_0\, s^x\, g^{c^x-1}. \end{cases}$$

Wenn wir nun die Näherungen (54) in (53) einsetzen und dann $\varphi(x,t)$ bilden, so entsteht

$$\varphi(t) = \frac{l_t - l_{[0]+t}}{l_0 - l_{[0]}}.$$

Wir müssen daher zur Berechnung von $\varphi(t)$ die Selektionssterbetafel um die Werte $l_{[0]+t}$ und l_t für $0 \leqslant t \leqslant m-1$ ergänzen. Der Übergang von $\varphi(x,t)$ zu $\varphi(t)$ lässt sich als Mittelbildung interpretieren, und zwar als Analogon zur Konstruktion der Kompakttafel. Theorie und Erfahrung lehren, dass es vorteilhaft ist, bei Mittelbildungen die Struktur der Verteilung zu berücksichtigen. In unserem Falle geschehe das dadurch, dass wir in $\varphi(t)$ das Alter 0 durch x_0 ersetzen, wo x_0 das mittlere Eintrittsalter der Versicherten bedeutet. Die Beobachtungen der Praxis ergeben bekanntlich, dass x_0 als zeitlich konstant betrachtet werden darf. Wir verallgemeinern deshalb den Ansatz (51) zu

$$\varphi(t) = \frac{l_{x_0+t} - l_{[x_0]+t}}{l_{x_0} - l_{[x_0]}}. \tag{55}$$

2. Kommutationszahlen und Rentenbarwerte.

Die approximative Darstellung von $l_{[x]+t}$,

$$l_{[x]+t} = l_{x+t} - (l_x - l_{[x]})\,\varphi(t),$$

liefert mit

$$v^t\,\varphi(t) = \psi(t) \tag{56}$$

die Kommutationszahlen

$$D_{[x]+t} = D_{x+t} - (D_x - D_{[x]})\,\psi(t),$$

$$N_{[x]+t} = N_{x+t} - (D_x - D_{[x]}) \sum_{u=t}^{m} \psi(u),$$

$$S_{[x]+t} = S_{x+t} - (D_x - D_{[x]}) \sum_{\tau=t}^{m} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u), \text{ usw.}$$

Um die Formeln in möglichst einfacher Gestalt zu haben, erstrecken wir die Summation von $\psi(u)$ bis m statt bis $m-1$; das ändert den Wert der Summen wegen $\psi(m) = 0$ nicht.

Wenn wir diese Kommutationszahlen in

$$
(57)\quad \begin{cases} \mathsf{a}_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} = \dfrac{N_{[\xi-t]+t} - N_{\xi-t+n}}{D_{[\xi-t]+t}} \\ \text{und} \\ (I\mathsf{a})_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} = \dfrac{S_{[\xi-t]+t} - S_{\xi-t+n} - (n-t)\, N_{\xi-t+n}}{D_{[\xi-t]+t}} \end{cases}
$$

einsetzen, so erhalten wir

$$
\mathsf{a}_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} = \frac{N_\xi - N_{\xi-t+n}}{D_\xi - (D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]})\,\psi(t)} - \frac{(D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]}) \sum\limits_{u=t}^{m} \psi(u)}{D_\xi - (D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]})\,\psi(t)}
$$

und

$$
(I\mathsf{a})_{[\xi-t]+t:\overline{n-t}|} = \frac{S_\xi - S_{\xi-t+n} - (n-t)\, N_{\xi-t+n}}{D_\xi - (D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]})\,\psi(t)} - \frac{(D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]}) \sum\limits_{\tau=t}^{m} \sum\limits_{u=\tau}^{m} \psi(u)}{D_\xi - (D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]})\,\psi(t)}.
$$

Borchs Rentenbarwerte haben also die für die Praxis äusserst vorteilhafte Eigenschaft, dass zu ihrer Berechnung ausser der Schlusstafel nur zwei kleine Tabellen, welche die Ausdrücke

$$
D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]},
$$

bzw.

$$
\psi(t),\quad \sum_{u=t}^{m} \psi(u),\quad \sum_{\tau=t}^{m} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u)
$$

enthalten, notwendig sind [16], S. 227.

Nun erhebt sich jedoch die Frage, ob diese Rentenbarwerte zur Anwendung bei der Z-Methode geeignet sind oder nicht. Wir müssen

sie verneinen, weil der Nenner zu kompliziert ist, vor allem aber, weil wir wegen der Zähler

$$(D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]}) \sum_{u=t}^{m} \psi(u)$$

und

$$(D_{\xi-t} - D_{[\xi-t]}) \sum_{\tau=t}^{m} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u)$$

gar nicht mehr nach $n - t$ gruppieren können, solange $0 \leqslant t < m$ ist. Die Methode von Lidstone bleibt aber, gemäss unseren früheren Ausführungen, S. 75, für $w \leqslant t \leqslant n$ anwendbar.

Wir werden dagegen im nächsten Paragraphen zeigen, dass es mit Hilfe einer weiteren Näherung gelingt, die S. 77 geschilderten Mängel der t-Methode zu beheben.

§ 2.

Berechnung der Dividendenreserve mittels Selektionssterbetafeln nach Gruppen gleicher verflossener Zeit.

Bei der t-Methode entsprechen den Rentenbarwerten (57) die Ausdrücke (48). Wenn wir dort die Borchschen Kommutationszahlen einsetzen, so können wir sie nur wegen des Nenners nicht in die Form

$$\mathfrak{S}_\lambda(t) - \mathfrak{S}_{\lambda+1}(t)\, c^x$$

überführen. Um dieses letzte Hindernis zu überwinden, setzen wir

$$\Phi(x, t) = D_{x+t} \frac{1}{L(t)}$$

und

$$D_{[x]+t} = F(x, t) \sim \Phi(x, t)$$

$$D_{[x]+t} \sim D_{x+t} \frac{1}{L(t)}.$$

Es sei x_0 eine vom Eintrittsalter einer einzelnen Versicherung unabhängige Grösse, z. B. wie im vorigen Paragraphen das mittlere Eintrittsalter des Bestandes. Wir setzen ferner

$$L(t) = \frac{l_{x_0+t}}{l_{[x_0]+t}}. \tag{58}$$

Wir prüfen die Zweckmässigkeit dieser Setzungen, indem wir den relativen Fehler

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} - 1$$

berechnen. Es ist

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} = \frac{l_{x+t}}{l_{[x]+t}} \cdot \frac{l_{[x_0]+t}}{l_{x_0+t}}$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (25) nach einigen Kürzungen

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} = e^{B(c^x - c^{x_0}) \int_t^m c^\tau [1 - H(\tau, m)]\, d\tau}.$$

Das Integral

$$f(t) = \int_t^m c^\tau [1 - H(\tau, m)]\, d\tau$$

ist so einfach gebaut, dass wir den Verlauf des relativen Fehlers leicht überblicken können, sobald wir $H(t, m)$ kennen. In der Praxis ist, vgl. S. 94—95, $H(t, m)$ positiv, monoton wachsend, $H(m, m) = 1$, und es gilt für alle t, $0 \leqslant t \leqslant m$,

$$ln\, c \geqslant H'(t, m) \geqslant [1 - H(t, m)]\, ln\, c;$$

dann ist

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) = -c^t [1 - H(t, m)] \leqslant 0 \\ \text{und} \\ f''(t) = -c^t \{[1 - H(t, m)]\, ln\, c - H'(t, m)\} \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{59}$$

Somit ist

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} - 1$$

für $x > x_0$ monoton fallend und konvex nach unten. Das Maximum ist bei $t = 0$ mit

$$\frac{\Phi(x, 0)}{F(x, 0)} - 1 = e^{B(c^x - c^{x_0}) f(0)}. \tag{60}$$

Wegen $ln\, c \geqslant [1 - H(t, m)]\, ln\, c$ ist

$$\frac{\Phi(x, 0)}{F(x, 0)} - 1 < \left(\frac{1}{g}\right)^{(c^x - c^{x_0})(c^m - 1)} - 1 = \frac{{}_m p_{x_0}}{{}_m p_x} - 1.$$

Das Minimum wird bei $t = m$ erreicht und hat den Wert 0. Für $x = x_0$ ist definitionsgemäss

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} - 1 = 0 \tag{61}$$

für alle t.

Für $x < x_0$ ist

$$\frac{\Phi(x, t)}{F(x, t)} - 1$$

monoton steigend und konkav nach unten. Das Maximum ist bei $t = m$ und hat den Wert 0. Das Minimum wird bei $t = 0$ mit

$$\frac{\Phi(x, 0)}{F(x, 0)} - 1 = e^{B(c^x - c^{x_0}) f(0)} \tag{62}$$

erreicht; wir machen nochmals von der Abschätzung

$$ln\, c \geqslant [1 - H(t, m)]\, ln\, c$$

Gebrauch und erhalten

$$\frac{\Phi(x, 0)}{F(x, 0)} - 1 > \left(\frac{1}{g}\right)^{(c^x - c^{x_0})(c^m - 1)} - 1 = \frac{{}_m p_{x_0}}{{}_m p_x} - 1.$$

Da die Grössen c, g und m Tafelkonstanten sind, können wir durch geschickte Wahl von x_0 den relativen Fehler beeinflussen; vgl. das Beispiel im IV. Kapitel.

Nun kehren wir zur Reserverechnung zurück. Die Formeln (43) bis (45) werden durch das Einsetzen der verschiedenen Näherungen zunächst äusserlich komplizierter, unübersichtlicher; sie lassen sich aber mit Hilfe einiger Abkürzungen in einfacher Form darstellen.

Wir zeigen diesen Vorgang an der Formel (43)

$$\frac{N_{[\xi-t]}-N_{[\xi-t]+t}}{D_{[\xi-t]+t}}\,\Sigma\,\pi = \Sigma\,\pi\,\frac{N_{[x]}-N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}.$$

Wir setzen nun in den Zählern die Borchschen Kommutationszahlen, in den Nennern die soeben angegebene Näherung für $D_{[\xi-t]+t}$ ein und erhalten

$$\left\{\frac{N_{\xi-t}-N_{\xi}}{D_{\xi}}-\frac{(D_{\xi-t}-D_{[\xi-t]})\sum\limits_{u=0}^{t-1}\psi(u)}{D_{\xi}}\right\}L(t)\,\Sigma\,\pi =$$

$$\Sigma\pi\left\{\frac{N_{x}-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{(D_{x}-D_{[x]})\sum\limits_{u=0}^{t-1}\psi(u)}{D_{x+t}}\right\}L(t).$$

Der zweite Schritt besteht darin, dass wir die Reihenentwicklungen (39) und (42) berücksichtigen. Das ergibt

$$\left\{\mathfrak{B}_0(t)-\mathfrak{B}_1(t)\,c^{\xi-t}-[\mathfrak{S}_{23}(t)-\mathfrak{S}_{24}(t)\,c^{\xi-t}]\sum_{u=0}^{t-1}\psi(u)\right\}L(t)\,\Sigma\,\pi =$$

$$\Sigma\,\pi\left\{\mathfrak{B}_0(t)-\mathfrak{B}_1(t)\,c^{x}-[\mathfrak{S}_{23}(t)-\mathfrak{S}_{24}(t)\,c^{x}]\sum_{u=0}^{t-1}\psi(u)\right\}L(t).$$

Analog behandeln wir mit Hilfe von (40) und (41) die Gleichungen (44) und (45).

Wir geben unseren Reserveformeln, die sich auf die Gruppierung nach t beziehen, endgültig folgende Gestalt:

Für $$0 \leqslant t \leqslant w$$

(63) $$\{X_1(t)-X_2(t)\,c^{\xi-t}\}\,\Sigma\,\pi = \Sigma\,\pi\,\{X_1(t)-X_2(t)\,c^{x}\},$$

für $$w \leqslant t \leqslant m$$

(64) $$\{X_1(t)-X_2(t)\,c^{\xi-t}\}\,\Sigma\,\pi - \{X_3(t)-X_4(t)\,c^{\xi-t}\}\,\Sigma\,\Pi =$$
$$\Sigma\,\pi\,\{X_1(t)-X_2(t)\,c^{x}\}-\Sigma\,\Pi\,\{X_3(t)-X_4(t)\,c^{x}\},$$

für $$m \leqslant t \leqslant n$$

$$(65) \qquad \{X_1(t) - X_2(t)\, c^{\xi - t}\}\, \Sigma\, \pi - \{X_3(t) - X_4(t)\, c^{\xi - t}\}\, \Sigma\, \Pi =$$
$$\Sigma \pi\, \{X_1(t) - X_2(t)\, c^{x}\} - \Sigma\, \Pi\, \{X_3(t) - X_4(t)\, c^{x}\}.$$

Die Gleichungen (64) und (65) stimmen formal überein; der Unterschied liegt in den Hilfsgrössen $X_3(t)$ und $X_4(t)$. Es ist

$$X_1(t) = \left\{ \mathfrak{B}_0(t) - \mathfrak{S}_{23}(t) \sum_{u=0}^{t-1} \psi(u) \right\} L(t),$$

$$X_2(t) = \left\{ \mathfrak{B}_1(t) - \mathfrak{S}_{24}(t) \sum_{u=0}^{t-1} \psi(u) \right\} L(t),$$

$$X_3(t) = \Bigg\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \mathfrak{S}_{19}(\mathfrak{t}) + \varepsilon_2\, \mathfrak{S}_{21}(\mathfrak{t})$$
$$- \mathfrak{S}_{23}(t) \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{u=w}^{m} \psi(u) + \varepsilon_2 \sum_{\tau=w}^{t-1} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u) - \varepsilon_t \sum_{u=t}^{m} \psi(u) \right] \Bigg\} L(t),$$

$$X_4(t) = \Bigg\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \mathfrak{S}_{20}(\mathfrak{t}) + \varepsilon_2\, \mathfrak{S}_{22}(\mathfrak{t})$$
$$- \mathfrak{S}_{24}(t) \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{u=w}^{m} \psi(u) + \varepsilon_2 \sum_{\tau=w}^{t-1} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u) - \varepsilon_t \sum_{u=t}^{m} \psi(u) \right] \Bigg\} L(t).$$

Für $m \leqslant t \leqslant n$ reduziert sich $X_3(t)$ auf

$$X_3(t) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \mathfrak{S}_{19}(\mathfrak{t}) + \varepsilon_2\, \mathfrak{S}_{21}(\mathfrak{t})$$
$$- \mathfrak{S}_{23}(t) \left\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{u=w}^{m} \psi(u) + \varepsilon_2 \sum_{\tau=w}^{m} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u) \right\}$$

und $X_4(t)$ auf

$$X_4(t) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \mathfrak{S}_{20}(\mathfrak{t}) + \varepsilon_2\, \mathfrak{S}_{22}(\mathfrak{t})$$
$$- \mathfrak{S}_{24}(t) \left\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{u=w}^{m} \psi(u) + \varepsilon_2 \sum_{\tau=w}^{m} \sum_{u=\tau}^{m} \psi(u) \right\},$$

weil die Summation von ψ bei $t = m$ abgebrochen wird, $\psi(m) = 0$ und in diesem Abschnitt $L(t) = 1$ ist.

Von den beiden Bedingungsgleichungen, die sich aus (63) bis (65) für $\xi - t$ ergeben,

$$c^{\xi-t} \Sigma \pi = \Sigma \pi c^x$$

und

$$c^{\xi-t} \Sigma \Pi = \Sigma \Pi c^x, \tag{66}$$

lassen wir wie bisher die erste weg, sodass zur gruppenweisen Berechnung unserer Dividendenreserve, d. h. der Reserve einer komplizierten Versicherungsform, nur drei Operationen erforderlich sind: Es sind die drei Summen $\Sigma \pi$, $\Sigma \Pi$ und $\Sigma \Pi c^x$ zu bilden, dann ist aus (66) ξ zu bestimmen und hernach, je nach dem Wert von t, eine der Formeln (63) bis (65) auszuwerten. Dabei brauchen wir anstatt zwölf Tabellen für $\mathfrak{S}_7$ bis $\mathfrak{S}_{18}$ nur noch vier, welche die Werte $X_1(t)$ bis $X_4(t)$ enthalten. Die Gleichungen (63) bis (65) weisen die nämliche Form auf, wie wenn wir die Dividendenreserve mit einer Aggregattafel berechnen würden. Der Einfluss der Selektion auf unsere Reserverechnung wird durch die Einführung der Grössen $X(t)$ berücksichtigt. Bei expliziter Darstellung von $L(t)$, von $\Sigma \psi(u)$, bzw. $\Sigma\Sigma \psi(u)$ und der $\mathfrak{S}(t)$, bzw. $\mathfrak{S}(t)$ gelangten wir allerdings, der vielen Glieder wegen, zu recht komplizierten Ausdrücken.

Wir wollen diese Methode die Jecklin-Borchsche Gruppenmethode nennen, oder auch «die auf Selektionssterbetafeln erweiterte t-Methode».

Durch Abänderung der $X(t)$ können wir auf gleiche Weise auch die Gruppenreserve zu andern Versicherungen ermitteln.

In Analogie zu früheren Aussagen gilt hier: Die nach (20), bzw. nach (23) ausgeglichene Selektionssterbetafel eignet sich für die mathematische Behandlung besonders gut; die praktische Anwendung der Gruppenmethode erstreckt sich aber nicht nur auf diese, sondern auf alle Tafeln, welche die Ungleichungen (21) erfüllen.

Wir schliessen damit unsere theoretischen Ausführungen über die Selektionssterbetafel ab und wenden uns noch dem entsprechenden Problem bei Verwendung von Dekrementententafeln zu.

§ 3.

Übertragung der neuen Ergebnisse auf die Reserverechnung mittels Dekrementententafeln.

Wir betrachten zwei Arten von Dekrementententafeln, die sich dadurch voneinander unterscheiden, dass die unabhängige Stornierungsordnung bei der ersten nach dem Eintrittsalter x und nach der seit dem Beginn der Versicherung verflossenen Zeit t, bei der zweiten zudem noch nach der vereinbarten Versicherungsdauer n abgestuft ist. Die Notwendigkeit, zweierlei Dekrementententafeln zu behandeln, ergibt sich aus folgendem: Für praktische Zwecke kommen nur Tafeln erster Art in Frage; dagegen führen theoretische Überlegungen auf Tafeln zweiter Art. Diese Gedanken entwickeln wir vorweg, sodass sich daraus die Folgerungen für die Reserverechnung ohne weiteres ziehen lassen.

1. Vergleichung der beiden Dekrementententafeln.

Die Dekrementententafeln erster Art seien derart aus zwei unabhängigen Ordnungen, einer Selektionssterbetafel und einer nach x und t abgestuften Stornierungsordnung, zusammengesetzt, dass ihre Gesamtintensität während der Selektionsperiode m die Form

$$\overset{s}{\mu}_{[x]+t} = \mu_{[x]+t} + \sigma_{[x]+t}$$

hat und für $t \geqslant m$ $\qquad \overset{s}{\mu}_{x+t} = \mu_{x+t} + \sigma_{[x]+t}$

ist. Dabei bedeutet σ die Stornointensität und s die Stornoperiode, d. h. für $t < s$ hängt die Stornointensität vom Eintrittsalter und von der abgelaufenen Dauer t ab, $\sigma = \sigma_{[x]+t}$, während sie für $t \geqslant s$ nur vom erreichten Alter $x + t$ abhängt, also $\sigma = \sigma_{x+t}$ ist. Ein Beispiel für diese Konstruktion einer Dekrementententafel erwähnt Friedli in seiner Arbeit: «Intensitätsfunktion und Zivilstand» [17], S. 50.

Wir sollten nun die Fälle $m \gtreqless s \leqslant n$ unterscheiden. Weil aber in der Praxis die erste Prämie beim Beginn der Versicherung fällig ist, und der Versicherungsnehmer gemäss Art. 89 des Bundesgesetzes über den Versicherungsvertrag vom 2. April 1908 das Recht hat, nach Entrichtung der ersten Jahresprämie, jederzeit vom Versicherungsvertrag zurückzutreten, betrachten wir nur den Fall $m < s = n$.

Da für alle x und n gelten muss: $\sigma_{[x]+n} = 0$, so sollte σ auch noch von n abhängig sein, also $\sigma = \sigma\,(x,\ t,\ n)$. Die Bedingung $\sigma_{[x]+n} = 0$ führt uns somit unmittelbar auf die Dekrementententafel zweiter Art. Auf Grund dieser Überlegung müssen wir Reserven, die nach einer Dekrementententafel erster Art berechnet worden sind, als Näherungen der mittels einer Dekrementententafel zweiter Art ermittelten Reserven betrachten. Es ist nun das Für und Wider einer solchen Näherung zu untersuchen.

Erfahrungsgemäss überwiegen im Versicherungsbestand einer Gesellschaft, mindestens in der Schweiz, die gemischten Versicherungen, und die Ablaufsalter liegen zur Hauptsache zwischen 55 und 65 Jahren. Elderton setzt sogar, wie wir schon auf Seite 60 erwähnt haben, zur Herleitung seiner Gruppenmethode voraus, dass alle Versicherungen auf das 60. Altersjahr abgeschlossen werden. Er nimmt also an, dass alle 30jährigen eine Versicherung mit der Dauer $n = 30$ eingehen, alle 40jährigen eine mit $n = 20$, usw. und führt somit zu jedem Eintrittsalter x eine mittlere Versicherungsdauer $n\,(x)$ ein. Unter diesen Voraussetzungen enthält $\sigma_{[x]+t}$ auch den Einfluss der Versicherungsdauer auf die Stornointensität, und es ist die theoretische Forderung $\sigma_{[x]+n} = \sigma_{[x]+n(x)} = 0$ für alle x und n trotz Verwendung einer Tafel erster Art erfüllt.

Beim folgenden, dem zweiten Argument für die Anwendung von Dekrementententafeln erster Art, stützen wir uns auf die deutschen Sterbetafeln $\mathfrak{B}\frac{\text{vor } 76/05}{76/06}$ [10] und die damit in Verbindung stehende Stornotafel von Oster [18], [19]. Diese beiden Tabellenwerke enthalten die Sterbens-, bzw. die Stornierungswahrscheinlichkeiten. Wir stellen ohne nähere Begründung fest, dass wir für unsere Zwecke diese Wahrscheinlichkeiten gleich den entsprechenden Intensitäten setzen dürfen. Demgemäss verlaufen nach Oster die Intensitäten $\sigma_{[x]+t}$ von $\sigma_{[x]}$ bis $\sigma_{[x]+n}$ monoton fallend und nähern sich dem Wert $\sigma_{[x]+n} \sim 0$ asymptotisch. Für die Eintrittsalter 25 bis 45 nimmt $\sigma_{[x]+t}$ mit zunehmendem t sehr rasch ab, während die entsprechenden $\mu_{[x]+t}$ monoton, aber im Vergleich zur Abnahme von $\sigma_{[x]+t}$ langsam, wachsen. Diese Abnahme der Stornointensität ist so stark, dass es im allgemeinen auch bei kurzen Versicherungsdauern, $n < 15$, einen Wert $t = t_0$ derart gibt, dass für $t > t_0$ die Zunahme der Sterbeintensität grösser ist als die

Abnahme der Stornointensität. So kann nur ein kleiner Fehler entstehen, wenn die Voraussetzung $\sigma_{[x]+t} = 0$ nicht erfüllt ist. — Die Gesamtintensität $\overset{s}{\mu}_{[x]+t}$ verläuft somit im allgemeinen wie eine unsymmetrische Kettenlinie, deren Minimum beim Alter $[x] + t_0$ liegt. Wir untersuchen die Frage, ob $\overset{s}{\mu}_{[x]+t}$ wirklich als Kettenlinie darstellbar ist, nicht näher; wir wollen mit diesem Bild lediglich den typischen Verlauf kennzeichnen.

Der dritte und wichtigste Grund, der für die Verwendung von Dekrementententafeln erster Art genannt werden kann, ist der folgende: Wir können nachweisen — siehe unten —, dass wir bei der Reserverechnung mittels Dekrementententafeln erster Art wie bisher nur eine einfache Gruppierung des Bestandes vornehmen müssen, bei Anwendung der Tafeln zweiter Art hingegen eine doppelte Gruppierung benötigen.

Wir kommen nun zu den Gegenargumenten: Wir können Schwankungen der mittleren Versicherungsdauern $n\,(x)$, wo also

$$x + n\,(x) \neq \text{konstant}$$

ist, als Zinsfussänderungen interpretieren, und diese haben bekanntlich einen grossen Einfluss auf die Reserve. Es ist ferner zu bedenken, dass solche Schwankungen oder die Nichterfüllung der Bedingung $\sigma_{[x]+n} = 0$ die kleinen Unterschiede zwischen den nach Aggregat- und den nach Selektionssterbetafeln berechneten Reserven teilweise oder ganz aufheben können. Das ist aber mit unserem theoretischen Bestreben, gerade diese Unterschiede bei Anwendung von Gruppenmethoden zu erfassen, unvereinbar.

Das Bisherige waren prinzipielle Erörterungen. Nun befassen wir uns mit den Einzelheiten; denn erst diese erlauben uns eine abschliessende Aussage zu machen.

2. Die Reserverechnung mittels Dekrementententafeln erster Art.

Die Sterbeintensitäten $\mu_{[x]+t}$ und μ_{x+t} wurden von uns als monoton wachsende Funktionen vorausgesetzt; das gestattete aus Gleichung (19) die eindeutige Berechnung des Zentralalters ξ, bzw. des mittleren Eintrittsalters $\xi - t$. Jetzt aber gibt es hiefür zwei Lösungen, die eine auf dem absteigenden, die andere auf dem zunehmenden Ast der durch

$$\overset{s}{\mu}_{[\xi-t]} = \frac{\Sigma K \overset{s}{\mu}_{[x]}}{\Sigma K}, \text{ bzw. } \overset{s}{\mu}_{[\xi\ t]} = \frac{\Sigma \Pi \overset{s}{\mu}_{[x]}}{\Sigma \Pi}$$

dargestellten Kettenlinie. Einen Entscheid, welcher der beiden Werte der brauchbare ist, vermögen wir nicht zu fällen. Das hängt vom Verlauf der Kettenlinie, mithin von den Rechnungsgrundlagen, von der Verteilung der Kapitalien K, bzw. der Grössen Π und von der Altersstruktur der Gruppe ab. Wir können aber wenigstens den vermutlich häufigsten Fall beschreiben, wobei wir uns wieder auf die Praxis stützen. Die meisten Versicherungen werden in den Altern 25 bis 45 abgeschlossen, sodass das mittlere Eintrittsalter einer Gruppe etwa den Wert $\xi - t = 35$ hat. Aus den Tabellen [18], S. 114 und [19] ergibt sich, dass bei diesen Eintrittsaltern die Minima der Kettenlinien bei $[\xi - t] + t > 40$ liegen. Im Laufe der Abwicklung einer bestimmten Gruppe, die bei der Methode von Jecklin eine geschlossene Gesamtheit darstellt, pendelt das mittlere Eintrittsalter um den für $t = 0$ angenommenen Wert hin und her. Wir dürfen aber auf Grund der vorausgesetzten Struktur annehmen, dass dabei $\xi - t$ für $t > 20$ nur ausnahmsweise grösser als 40 ist, und wir eigentlich erst dann solche Ausnahmen zu erwarten haben, wenn der Bestand der Gruppe sehr klein geworden ist und damit die Zweckmässigkeit der Gruppenrechnung sowieso in Frage gestellt wird.

Das zu Beginn dieses Abschnittes aufgeworfene Problem kann somit unter Beachtung obiger Vorbehalte als gelöst betrachtet werden, und wir dürfen den Satz formulieren: Die Methode von Jecklin ist auch dann anwendbar, wenn die Rechnungsgrundlage eine Dekrententafel erster Art ist.

Wir möchten aber nicht unerwähnt lassen, dass die numerische Durchführung so lange umständlich ist, als wir die, nun auf Grund von Dekrententafeln erster Art berechneten Ausdrücke (48) nicht in Reihen entwickeln können. Das ist leider nicht möglich, da es unseres Wissens noch keine analytisch ausgeglichene, zusammengesetzte Ordnung $l^s_{[x]}$ gibt. Wir müssen also bei der praktischen Anwendung der Methode jene sechs Ausdrücke tabellieren und $\xi - t$ jeweilen einsetzen.

3. Die Reserverechnung mittels Dekrementententafeln zweiter Art.

Wenn die Stornointensität von x, t und n abhängig ist, sprechen wir von Dekrementententafeln zweiter Art. Wir haben unter 1. die Dekrementententafeln erster Art einer Kritik unterzogen, aus der hervorgeht, dass $\sigma = \sigma\ (x, t, n)$ zu fordern ist. Da nun $n \neq n\ (x)$ ist, müssen wir, um die Bedingung $\sigma_{[x]+n} = 0$ erfüllen zu können, den Versicherungsbestand für die Reserverechnung zuerst nach n und dann innerhalb jeder solchen Gruppe noch nach t gruppieren. Wenn wir annehmen, es sei $15 \leqslant n \leqslant 30$, so gibt es also bis zu $\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{14 \cdot 15}{2} = 360$ Gruppen. Jede derart gebildete Gruppe gestattet die Reserverechnung nach der unter 2. mitgeteilten Methode.

Für praktische Zwecke kommt also die Verwendung von Dekrementententafeln zweiter Art wegen der Notwendigkeit, eine doppelte Gruppierung vornehmen zu müssen, wohl kaum in Betracht. Dagegen ist es von theoretischem Interesse, dass auch jetzt wieder die Methode von Jecklin im Vergleich zu den von Frl. Piccard untersuchten, siehe S. 66, als prinzipieller Fortschritt betrachtet werden kann.

IV. Kapitel.

Beispiele.

Wir wollen zum Schluss dieser Arbeit Beispiele zu unsern Formeln geben. Zuerst stellen wir die Konstanten, bzw. die Werte der in (20) und (23) eingeführten Funktionen $A\ (t, m)$, $B\ (t, m)$; $H\ (t, m)$ und $I\ (t, m)$ für einige Selektionssterbetafeln zusammen. Dann zeigen wir die Güte der Näherungen

$$\varphi\ (x, t) \sim \varphi\ (t),$$

$$D_{[x]+t} \sim D_{x+t} \frac{1}{L\ (t)}$$

und

$$\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} \sim \left\{ \mathfrak{B}_0\ (t) - \mathfrak{B}_1\ (t)\ c^x - [\mathfrak{S}_{23}\ (t) - \mathfrak{S}_{24}\ (t)\ c^x] \sum_{u=0}^{t-1} \psi\ (u) \right\} L\ (t)$$

$$\sim X_1\ (t) - X_2\ (t)\ c^x.$$

§ 1.

Konstanten von Selektionssterbetafeln.

Aus den Angaben von Van der Hoek und mit Benützung des Werkes: «British Offices Life Tables 1893. Select Tables. Males» berechneten wir folgende Daten für die $O^{[M]}$-Tafel:

$$A(t,m) = A - r_1(m-t) - r_2 r_3^t$$

und

$$B(t,m) = B - r_4(m-t)c^{-t}$$

mit

$$m = 10,$$

$$A = ln\frac{1}{s} = 0.0060\,123,$$

$$B = ln\,c\,ln\frac{1}{g} = 0.0001\,02632,$$

$$\log c = 0.039,$$

$$r_1 = 0.0001\,8860,$$

$$r_2 = 0.0036\,8032,$$

$$r_3 = 0.24,$$

$$r_4 = 0.0000\,0512\,422;$$

vgl. [14], S. 85—87 und [20]. Ferner ist auf Grund der Gleichung (24)

$$H(t,m) = \frac{B(t,m)}{B} = 1 - \frac{r_4}{B}(m-t)c^{-t} \leqslant 1$$

und

$$I(t,m) = A(t,m) - \frac{A}{B}B(t,m) = (m-t)\left(\frac{A}{B}r_4c^{-t} - r_1\right) - r_2 r_3^t.$$

Wir bemerken aber, dass entgegen unseren Voraussetzungen $A(m,m) \neq A$ und $I(m,m) \neq 0$ ist, jedoch der Fehler $\left|r_2 r_3^m\right| = 2.334 \cdot 10^{-9}$ praktisch ohne jede Bedeutung ist.

Die Werte des zweiten Beispiels, der $O^{[NM]}$-Tafel, entnehmen wir einer Arbeit von Hardy [21], S. 508. Diese Tafel ist nach (20) ausgeglichen; denn es ist:

$$A(t,m) = A - r_1 (m-t)^3$$

und $$B(t,m) = \mathrm{B}\{1 - r_2 (m-t)^2 + r_3 (m-t)^3\}$$

mit
$$m = 5,$$
$$A = 0.0066\,076,$$
$$B = 0.0001\,08987,$$
$$\log c = 0.039,$$
$$r_1 = 0.0000\,311,$$
$$r_2 = 0.0405\,6,$$
$$r_3 = 0.0054\,08.$$

Ferner ist

$$H(t,m) = 1 - r_2 (m-t)^2 + r_3 (m-t)^3 \leqslant 1$$

und $$I(t,m) = A\, r_2 (m-t)^2 - (r_1 + A\, r_3)(m-t)^3.$$

Wir wenden uns dem dritten Beispiel zu. Es ist die Tafel N. akt. 1918, die Borch zur Illustration seiner Untersuchungen benützte. Es ist eine hypothetische, auf norwegische Erfahrungen vor 1914 gestützte, nach Geschlechtern getrennte Tafel.
Die Männertafel ist nach (23) ausgeglichen; es ist von $x = 0$ an

für $0 \leqslant t \leqslant m$: $$\mu_{[x]+t} = \mu_{x+t}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^2\right\} + 0.1\, A\left(1 - \frac{t}{m}\right)^2$$

und für $t \geqslant m$: $\mu_{x+t} = A + B\, c^{x+t}$

mit
$$m = 10,$$
$$A = 0.0004\,0295,$$
$$B = 0.0000\,36132,$$
$$\log c = 0.043.$$

Die Frauentafel ist ein Spezialfall von (23); denn es ist wiederum von $x = 0$ an

$$(67)\quad \begin{cases} \text{für } 0 \leqslant t \leqslant m: \mu_{[x]+t} = \mu_{x+t}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^2\right\} \\ \text{und für } t \geqslant m: \mu_{x+t} = A + B\, c^{x+t} \end{cases}$$

mit
$$m = 10,$$
$$A = 0.0032\,927,$$
$$B = 0.0000\,312335,$$
$$\log c = 0.043.$$

Nur zur Erleichterung von Vergleichungen berechnen wir unsere Näherungen mit der von Borch benützten Tafel (67). Wir wollen also keineswegs Rentengrundlagen für die Berechnung von Dividendenreserven empfehlen.

§ 2.

Anwendungen.

1. Die Näherung $\varphi(x,t) \sim \varphi(t)$.

In seiner schon wiederholt genannten Arbeit, wählte Borch bei N. akt. 1918, Frauen, für $\varphi(t)$ auf Grund der numerischen Werte von $\varphi(x, t)$ und der sechs Bedingungen (50) die Parabel

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{m}\right)^3. \tag{68}$$

In Tab. I. geben wir nun die genauen Werte $\varphi(x,t)$ und ihre Näherung $\varphi(t)$ nach (68) an. Jede der Kolonnen $\varphi(x,t)$ stellt aber nach (55) auch eine Näherung $\varphi(t)$ dar, da x_0 beliebig ist.

Tab. I. *Grundlagen: N. akt. 1918, Frauen.*

$\varphi(x,t)$ nach (49) und gleichzeitig $\varphi(t)$ nach (55)					$\varphi(t)$ nach (68)
t \ x, x_0	0	25	35	45	
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.729	0.734	0.740	0.752	0.729
2	0.511	0.519	0.531	0.548	0.512
3	0.341	0.351	0.364	0.380	0.343
4	0.215	0.222	0.233	0.248	0.216
5	0.125	0.130	0.139	0.149	0.125
6	0.065	0.066	0.071	0.078	0.064
7	0.027	0.030	0.031	0.036	0.027
8	0.009	0.009	0.009	0.011	0.008
9	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Zusammenfassend ziehen wir aus den theoretischen Untersuchungen und dieser Tabelle den Schluss, dass prinzipiell auf die Berechnung einer speziellen Funktion $\varphi(t)$ verzichtet werden darf und, dass es genügt, irgendeine der Kolonnen $\varphi(x, t)$ gleich $\varphi(t)$ zu setzen. Wie bereits ausgeführt, soll dabei der Bestandesstruktur Rechnung getragen werden. Es würde sich auf diese Weise die etwas zeitraubende Ausgleichung der $\varphi(x, t)$, um $\varphi(t)$ zu erhalten, erübrigen.

2. Die Näherung $F(x,t) \sim \Phi(x,t)$.

Zwecks Vorbereitung der folgenden Tabelle, haben wir auf S. 84 die allgemeine Behandlung obiger Näherung für den Fall $H(t,m)$ positiv, monoton zunehmend und

$$ln\, c \geqslant H'(t,m) \geqslant [1 - H(t,m)]\, ln\, c$$

ergänzt. Denn bei der Grundlage N. akt. 1918, Frauen, ist

$$H(t,m) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^2,$$

erfüllt also die Gleichungen (59). Diese gehen nämlich über in

$$f'(t) = -\frac{1}{2} c^t \left(1 - \frac{t}{m}\right)^2 \leqslant 0,$$

$$f''(t) = -\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{t}{m}\right)(m\, ln\, c - 2 - t\, ln\, c)\, c^t \geqslant 0,$$

weil in der Praxis $m\, ln\, c < 2$ ist. Dementsprechend erreichen die relativen Fehler wegen

$$f(0) = \frac{1}{ln\, c}\left\{\frac{c^m - 1}{(m\, ln\, c)^2} - \frac{1}{m\, ln\, c} - \frac{1}{2}\right\} > 0$$

folgende Extrema:

Tab. II. Grundlage: N. akt. 1918, Frauen.

$\frac{\Phi(x,0)}{F(x,0)} - 1$ nach (60) bis (62) in $^0/_{00}$				
x \ x_0	0	25	35	45
25	0.74	0.00	—1.37	—5.04
35	2.11	1.37	0.00	—3.67
45	5.81	5.06	3.69	0.00

3. Näherung für $\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}$, bzw. $\frac{N_{[x]} - N_{x+t}}{D_{x+t}}$.

Bei der Tafel N. akt. 1918, Frauen, gibt die Integration von (67)

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}\, s^{\frac{m}{6}\left(1-\frac{t}{m}\right)^3} g^{\frac{c^{x+m}}{(m\ln c)^2}}\, g^{-c^{x+t}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{m}\right)^2 + \frac{1-\frac{t}{m}}{m\ln c} + \frac{1}{(m\ln c)^2}\right\}};$$

speziell ist $$l_{[x]} = l_x s^{\frac{m}{6}} g^{\varrho c^x}$$

mit $$\varrho = \frac{c^m - 1}{(m\ln c)^2} - \frac{1}{m\ln c} - \frac{1}{2},$$

ferner $$l_{x+t} = k s^{x+t}\, g^{c^{x+t}}.$$

In den Formeln (63) bis (65) haben wir

$$\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = \left\{\mathfrak{B}_0(t) - \mathfrak{B}_1(t)\, c^x - [\mathfrak{S}_{23}(t) - \mathfrak{S}_{24}(t)\, c^x] \sum_{u=0}^{t-1} \psi(u)\right\} L(t)$$

gesetzt. Es ist nach (16), bzw. (39)

$$\mathfrak{B}_0(t) = \sum_{u=1}^{t} (vs)^{-u}$$

und $$\mathfrak{B}_1(t) = \left\{\sum_{u=1}^{t} (vs\, c)^{-u} - \mathfrak{B}_0(t)\right\} c^t \ln \frac{1}{g}.$$

Ferner ist nach (42)

$$\frac{D_x - D_{[x]}}{D_{x+t}} = \mathfrak{S}_{23}(t) - \mathfrak{S}_{24}(t)\, c^x.$$

In unserem Falle ist

$$\frac{D_x}{D_{x+t}} = (vs)^{-t}\, g^{c^{x+t}(c^{-t}-1)}$$

$$\sim (vs)^{-t} \left\{ 1 - c^{x+t}\,(c^{-t}-1)\, ln \frac{1}{g} \right\},$$

$$\frac{D_{[x]}}{D_{x+t}} = (vs)^{-t}\, s^{\frac{m}{6}}\, g^{c^{x+t}\left\{(1+\varrho)\, c^{-t}-1\right\}}$$

$$\sim (vs)^{-t}\, s^{\frac{m}{6}} \left\{ 1 - c^{x+t}\,[(1+\varrho)\, c^{-t} - 1]\, ln \frac{1}{g} \right\},$$

somit $\qquad \mathfrak{S}_{23}(t) = (vs)^{-t} \left(1 - s^{\frac{m}{6}}\right)$

und $\qquad \mathfrak{S}_{24}(t) = \left\{ (vsc)^{-t} \left[1 - (1+\varrho)\, s^{\frac{m}{6}} \right] - \mathfrak{S}_{23}(t) \right\} c^t\, ln \frac{1}{g}.$

Schliesslich erinnern wir uns, dass (56)

$$\psi(u) = v^u\, \varphi(u)$$

und nach (58)

$$L(t) = \frac{l_{x_0+t}}{l_{[x_0]+t}}$$

ist. Wir erhalten also

$$\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} = X_1(t) - X_2(t)\, c^x \tag{69}$$

mit $X_1(t) = \left\{ \sum_{u=1}^{t} (vs)^{-u} - (vs)^{-t} \left(1 - s^{\frac{m}{6}}\right) \sum_{u=0}^{t-1} \psi(u) \right\} L(t)$

$$\text{und } X_2(t) = \left\{ \left[\sum_{u=1}^{t} (vsc)^{-u} - (vsc)^{-t} \left\{ 1 - (1+\varrho)\, s^{\frac{m}{6}} \right\} \sum_{u=0}^{t-1} \psi(u) \right] L(t) - X_1(t) \right\} c^t \ln \frac{1}{g}.$$

Tab. III. *Grundlage: N. akt. 1918, Frauen, 4 %.*

$\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}}$ mit $x_0 = 35$									
x / t	25			35			45		
	nach (69) (1)	genau (2)	$\frac{(1)}{(2)}$	nach (69) (3)	genau (4)	$\frac{(3)}{(4)}$	nach (69) (5)	genau (6)	$\frac{(5)}{(6)}$
1	1.043	1.042	1.000	1.043	1.043	1.000	1.041	1.043	0.998
3	3.265	3.263	1.001	3.266	3.266	1.000	3.271	3.275	0.999
5	5.684	5.683	1.000	5.695	5.695	1.000	5.723	5.726	0.999
7	8.325	8.325	1.000	8.354	8.355	1.000	8.432	8.433	1.000
10	12.754	12.755	1.000	12.838	12.839	1.000	13.065	13.069	1.000
15	21.591	21.592	1.000	21.907	21.914	1.000	22.760	22.808	0.998
20	32.715	32.722	1.000	33.649	33.687	0.999	36.161	36.447	0.992
25	46.911	46.936	0.999	49.346	49.532	0.996			
30	65.424	65.534	0.998						

Die Tabellen II. und III. zeigen, dass die Näherung

$$\frac{N_{[x]} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+t}} \sim X_1(t) - X_2(t)\, c^x$$

als sehr gut bezeichnet werden darf. Da unsere individuell oder gruppenweise berechnete Dividendenreserve als Summe, bzw. Differenz solcher Ausdrücke darstellbar ist, erkennen wir auch, dass die allgemeine Forderung für Gruppenmethoden: Gruppenreserve gleich Summe der Einzelreserven, in sehr guter Näherung erfüllt ist. Dies gilt sowohl für Selektions- als auch für Dekrementententafeln.

Schlusswort.

Wir fassen den Inhalt der vorliegenden Arbeit kurz zusammen.

An Hand einer bestimmten Versicherungsform — wie sie etwa durch den Plan der steigenden Dividende mit Wartezeit verwirklicht wird — studierten wir die Übertragung bekannter Gruppenmethoden auf die Reserverechnung, wenn als Rechnungsgrundlage eine Selektions- oder eine Dekrementententafel gewählt wird.

Wir erhielten unter gewissen Voraussetzungen folgende Resultate: Wenn wir mit einer Selektionssterbetafel rechnen, so kann die Methode von Lidstone angewandt werden, sobald die seit dem Versicherungsbeginn verflossene Zeit gleich oder grösser als die Dividendenwartezeit ist. Die Methode von Jecklin kann auf Selektionssterbetafeln übertragen werden; ferner auf doppelt abgestufte Dekrementententafeln. Dabei ist stets nur nach einer Grösse, der abgelaufenen Zeit, zu gruppieren. Eine doppelte Gruppierung, nämlich nach der verflossenen und nach der vereinbarten Versicherungsdauer, ist nur bei den dreifach abgestuften Dekrementententafeln erforderlich. Die Reserve der so erhaltenen Untergruppen kann ebenfalls nach der Methode von Jecklin berechnet werden.

Die Methode von Jecklin ist vermutlich nicht nur zur Ermittlung von Reserven in der Lebensversicherung geeignet, sondern kann auch bei andern Zweigen der Personenversicherung angewandt werden. Wir denken dabei insbesondere an die Krankenversicherung und an die Invaliden- und Witwen-Pensionskassen, wo sie gegebenenfalls zur Berechnung des Kassenfonds grosse Dienste leisten könnte.

Literaturverzeichnis.

[1] *P. Böhmer:* Die technischen Erfordernisse bei der Berechnung der Dividendenreserve. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft. Heft XXIV, 1912.

[2] *S. Piccard:* Des méthodes de groupement dans le calcul des réserves mathématiques et des réserves nécessaires. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 27. Heft, 1932.

[3] *R. K. Lochhead:* Valuation and surplus. Cambridge, University Press, 1932.

[4] *A. Berger:* Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. Bd. 1. Berlin, Julius Springer, 1923.

[5] *H. Grieshaber:* Technisches zur Bilanzierung von Pensionskassen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 18. Heft, 1923.

[6] *P. Smolensky:* Sulle tavole compatte di mortalità. Mitteilungen des X. Internationalen Aktuarkongresses. Bd. 2. Rom 1934.

[7] *H. Jecklin:* Einige Bemerkungen zu Smolensky's «Kompakt-Tafel». Das Versicherungsarchiv. 5. Jahrgang, 1934.

[8] *H. Jecklin:* Reserverechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer. Das Versicherungsarchiv. 5. Jahrgang, 1934.

[9] *H. Jecklin:* Retrospektive Reserverechnung nach Gruppen gleichen Acquisitionsjahres. Aktuárské Vědy. 6. Bd., 1936.

[10] *H. Jecklin:* Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung. Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete. 4. Bd., 1938.

[11] *V. Lanoix:* Du calcul des réserves mathématiques par la méthode Lidstone. Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français. T. 41, 1935.

[12] *J. Riem:* Die Selektionssterbetafeln, die Unkostendeckung und die Verrechnung von Abschlusskosten der Versicherungen auf den Todesfall. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 2. Heft, 1907.

[13] *K. Dickmann:* Über doppelte Gruppierung der Versicherungen für Berechnung der Prämienreserve. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft. Bd. 3, 1903.

[14] *R. Van der Hoek:* Over: «The Law of Uniform Seniority.» Gebr. Hoitsema, Groningen 1925.

[15] *H. Poterin du Motel:* Usage et ajustement des tables de mortalité par âges à l'entrée. Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français. T. 3, 1893.

[16] *F. Borch:* Über eine Methode zur Vereinfachung der versicherungstechnischen Berechnungen bei doppelt abgestuften Sterbetafeln. Skandinavisk Aktuarietidskrift. Jahrgang 19, 1936.

[17] *W. Friedli:* Intensitätsfunktion und Zivilstand. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. Heft 21, 1926.

[18] *A. Abel:* Die Sterbetafeln 1926 des Vereins Deutscher Lebensversicherungs-Gesellschaften. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft. Heft XXXX, 1926.

[19] *B. Oster:* Die Stornofall-Versicherung. Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete. 1. Bd., 1928.

[20] *H. J. Baker and A. H. Raisin:* Select Tables deduced from the graduated experiences of Whole-Life Participating and Non-participating assurances on Male Lives. London, Ch. E. Layton, 1904.

[21] *G. F. Hardy:* The British Offices Life Tables. 1893. Memorandum on the Graduation of the Whole-Life Without-Profit Mortality Table. Male Lives. Journal of the Institute of Actuaries. Vol. 38, 1904.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 53

I. Kapitel. Die Ermittlung der Dividendenreserve mittels Einzelrechnung und bekannter Gruppenmethoden.

§ 1. Der Dividendenplan 54
§ 2. Herleitung der individuellen Dividendenreserve 56
§ 3. Übersicht über die bekannten Gruppenmethoden 59

II. Kapitel. Die Methoden von Lidstone und Jecklin bei Verwendung einer Selektionssterbetafel.

§ 1. Die Wahl der Selektionssterbetafel 67
§ 2. Verallgemeinerte Reihenentwicklungen 70
§ 3. Die Methode Lidstones bei Verwendung einer Selektionssterbetafel 73
§ 4. Übertragung der Methode Jecklins auf Selektionssterbetafeln . . 75

III. Kapitel. Lösung des Problems mit Hilfe einer Näherungsformel von Borch.

§ 1. Auszug aus einer Arbeit von Borch 78
§ 2. Berechnung der Dividendenreserve mittels Selektionssterbetafeln nach Gruppen gleicher verflossener Zeit 83
§ 3. Übertragung der neuen Ergebnisse auf die Reserverechnung mittels Dekrementententafeln 89

IV. Kapitel. Beispiele.

§ 1. Konstanten von Selektionssterbetafeln 94
§ 2. Anwendungen 96

Schlusswort 101

Literaturverzeichnis 102