Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 16 (1921)

Artikel: Hat der Ausdruck (1-kdx) einen Sinn?

Autor: Küttner, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967469

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Hat der Ausdruck $(1 - kdx)$ einen Sinn?

Von Geheimem Hofrat **W. Küttner**, Dresden.

Gewiss, wird der auf *Leibniz'* Standpunkte stehende Mathematiker antworten. Dieser Ausdruck ist $= 1$, da kdx eine Infinitesimalgrösse ist, die gegen die 1 verschwindet.

Wird damit die Wahrscheinlichkeit für das *Nichteintreffen* eines ins Auge gefassten Ereignisses innerhalb der unendlich kleinen Zeit dx ausgedrückt, so stellt hiernach dieser Ausdruck *die Gewissheit dar, dass das Ereignis* **nicht** *stattfindet.* Das will aber der Versicherungsmathematiker, der diesen Ausdruck anwendet, damit nicht ausdrücken, denn er ist sich bewusst, dass das Ereignis zu seinem Eintritte keiner zeitlichen Ausdehnung bedarf, *dass dx nur die Eintrittsmöglichkeit einschränkt, nicht aber ausschliesst. Absicht und Bewertung von* $(1 - kdx)$ *befinden sich in diesem Falle somit im Widerspruche.*

Nun hat aber *J. Karup* bei seiner Entwicklung, die Aktivitätswahrscheinlichkeit durch das Produkt zweier unabhängiger Wahrscheinlichkeiten auszudrücken, den in Rede stehenden Ausdruck in seine Grundgleichung in dem erwähnten gegensätzlichen Sinne eingeführt, ohne sonderbarerweise deshalb von seinen erbitterten Gegnern *Behm* und *Zimmermann* angegriffen zu werden.

Auch später haben der *Verfasser G. Schaertlin, u. a.,* die fraglichen Ausdruck in diesem Sinne benützten, *keine* Angriffe erfahren. Dies muss überraschen und lässt sich nur damit erklären, dass die erzielten Ergebnisse immer durch andere Untersuchungen bestätigt worden sind.

Es erscheint daher nicht unwichtig, endlich einmal nach dem Grunde dieser befremdlichen Erscheinung zu forschen. Fassen wir zunächst die Arbeit *Karups* ins Auge und bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, im Alter x erwerbsfähig zu sein mit $\varphi(x)$, und weiter die Wahrscheinlichkeit, innerhalb des unendlich kleinen Altersintervalles von x bis $x + dx$ invalid zu werden mit $i(x)\,dx$, und zu sterben mit $\sigma(x)\,dx$, so schreibt derselbe an

$$\varphi(x + dx) = \varphi(x)\left[(1 - i(x)\,dx)\,(1 - \sigma(x)\,dx)\right]. \quad (1)$$

Das ist scheinbar eine durchaus heterogene Gleichung, die mit den theoretischen Werten für $1 - i(x)\,dx$ und $1 - \sigma(x)\,dx$ übergeht in

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \varphi'(x)\,dx = \sigma$$

$$\varphi(x) = \text{Konstante}$$

und zu einem Trugschlusse führen würde. Lösen wir dagegen, wie es *Karup* tut, die Gleichung (1) auf, ohne uns um die Werte von $1 - i(x)\,dx$ und $1 - \sigma(x)\,dx$ zu kümmern und reduzieren in üblicher Weise, so erhalten wir

$$\frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = -\,i(x)\,dx - \sigma(x)\,dx \quad (2)$$

eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung, 1. Grades, die nichts Zweifelhaftes mehr enthält und den Ausdruck unter (1) nur als eine unglückliche Form erscheinen lässt. Integrieren wir (2) zwischen den Grenzen x und $x+1$, so erhalten wir

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = e^{-\int_x^{x+1} i(x)\,dx} \cdot e^{-\int_x^{x+1} o(x)\,dx} . \qquad (3)$$

Im übrigen finden wir als Intensitäten ausgedrückt die Gleichung (2) unter (5 b) wieder.

Mit der Aufstellung der Gleichung (3) ist das vorgesteckte Ziel erreicht. Die Aktivitätswahrscheinlichkeit ist in ein *Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten* aufgelöst worden. Den ersteren Ausdruck,

$$e^{-\int_x^{x+1} i(x)\,dx},$$

nennt *Karup* die *unabhängige Wahrscheinlichkeit* für den x-jährigen Aktiven, im nächsten Jahre *nicht invalid* zu werden, und den anderen Ausdruck,

$$e^{-\int_x^{x+1} o(x)\,dx},$$

die *unabhängige Wahrscheinlichkeit* für denselben Aktiven, im nächsten Jahre *nicht als Aktiver zu sterben.* Ist (1) zulässig, so ist auch (3) unanfechtbar. Der Ausdruck unter (2) stellt die *Aktivitätsintensität* dar.

Von den *Schaertlinschen* Arbeiten greifen wir die Gleichung

$$l_x \mu_x dx = l_x^{\overline{aa}} \mu_x^a dx - l_x^{\overline{aa}} \nu_x dx \left(\frac{1 - \mu_x^i dx}{2} \right) + l_x^{\overline{ii}} \mu_x^i dx$$

heraus, die in seiner verdienstlichen Schrift: „Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung, Bern 1907“, Seite 9, enthalten ist. Durch eine leichte Reduktion dieses Ausdruckes finden wir

$$\mu_x^a = \mu_x + \nu_x + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (\mu_x - \mu_x^i), \tag{4}$$

also auch hier wieder eine durchaus homogene Gleichung, deren Richtigkeit nicht angezweifelt werden kann.

Weiter entnehmen wir derselben Schrift, Seite 9,

$$(1 - \mu_x^a dx) + \mu_x^{\overline{aa}} dx + \nu_x dx = 1, \tag{5a}$$

eine Gleichung, die in den homogenen Ausdruck

$$\mu_x^a = \mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x \tag{5b}$$

übergeht und damit das Gesetz, das durch (5) ausgedrückt werden soll, richtig zur Darstellung bringt. Siehe (2).

Diese Beispiele, die durch beliebig viele andere mit gleichen Ergebnissen sich vermehren lassen, zeigen

uns, dass die Ausdrücke von der Form $(1 - kdx)$ die ihnen beigelegte Wahrscheinlichkeit richtig zum Ausdruck bringen, während eine einfache Überlegung lehrt,

„dass das immer dann der Fall sein wird, wenn der vorgelegte, mit Gliedern von der Form $(1 - kdx)$ belastete Ausdruck durch Auflösungen bzw. Zusammenfassungen sich als *homogen* erweist".

Wo das nicht zutrifft, kann mit den in Rede stehenden Ausdrücken nicht operiert werden. In diesen Fällen ist zu versuchen, vom *Endlichen* auszugehen und die Untersuchung über das *Unendlichkleine* hinaus wieder zum *Endlichen* zu führen, wodurch überdies noch alles Metaphysische vermieden wird, das, wie der Streit *Karup-Behm* und *Küttner-Zimmermann* gelehrt hat, von einem Teile der deutschen Mathematiker perhorresziert wird.

Nehmen wir die im Eingange behandelte Untersuchung über die Aktivitätswahrscheinlichkeit wieder auf, so können wir anschreiben, wenn aus der Gesamtheit $\overline{l_m^{aa}}$ bis zum Alter x J_x Invaliden und T_x^a aktiv Verstorbene hervorgegangen und *beobachtet* worden sind,

$$\overline{l_{x+\Delta x}^{aa}} = \overline{l_x^{aa}} - (J_{x+\Delta x} - J_x) - (T_{x+\Delta x}^a - T_x^a). \quad (5)$$

Lässt man jetzt Δx bis zu dx abnehmen, so folgt

$$\overline{l_x^{aa}}' dx = - J_x' dx - T_x^{a'} dx \quad (6)$$

und, wenn mit $\overline{l_x^{aa}}$ dividiert und sodann innerhalb der Grenzen x bis $x + 1$ integriert wird,

$$\text{lognat.}\ \frac{l_{x+1}^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = -\int_x^{x+1} \frac{J'_x}{l_x^{\overline{aa}}}\,dx - \int_x^{x+1} \frac{T_x^{a'}}{l_x^{\overline{aa}}}\,dx \qquad (7)$$

oder

$$\frac{l_{x+1}^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = p_x^{\overline{aa}} = e^{-\int_x^{x+1} \frac{J'_x}{l_x^{\overline{aa}}}dx} \cdot e^{-\int_x^{x+1} \frac{T_x^{a'}}{l_x^{\overline{aa}}}dx}. \qquad (8)$$

Damit sind wir zu demselben Ergebnisse gelangt, zu dem *Karup* vermittels der Differentialgleichung (1) gekommen ist, denn offenbar ist

$$i(x)\,dx = \frac{J'_x}{l_x^{\overline{aa}}}\,dx \text{ und } \sigma(x)\,dx = \frac{T_x^{a'}}{l_x^{\overline{aa}}}\,dx.$$

Wichtig ist, dass wir hieraus erfahren, dass der Bestimmung von $i(x)\,dx$ und $\sigma(x)\,dx$ die *beobachteten* Invaliditäts- und Todesfälle *in ihrer Abhängigkeit voneinander zugrunde zu legen sind.* Alle Einwürfe, die seinerzeit gegen die *Karupsche* Beweisführung erhoben wurden, werden hier gegenstandslos, und es erübrigt sich auch der von mir zur Begründung der Gleichung (1) aufgestellte Satz:

Wenn x Ereignisse, die von x voneinander abhängigen Ursachen bedingt werden, sich sämtlich oder teilweise ausschliessen, d. h. wenn das vorherige Eintreffen des einen oder des anderen das Eintreffen eines anderen oder aller übrigen unmöglich macht, so kann bei einem unendlich kleinen Zeitintervall doch dieses Abhängigkeitsverhältnis nicht in Frage

kommen, weil, wenn die Aufeinanderfolge zweier oder mehrerer Ereignisse von dem Zusammentreffen durch unsere Sinne unterschieden werden soll, immer ein *endliches,* wenn auch noch so kleines Zeitintervall zwischen denselben liegen muss. Für ein unendlich kleines Zeitintervall werden daher derartige abhängige Ereignisse unabhängig voneinander, und die Sätze der *unabhängigen Wahrscheinlichkeiten* sind auf sie anwendbar.

Der Satz, der auf *Leibniz'* Anschauung basiert, dass das *Unendlichkleine unteilbar* ist, ist von *Zimmermann* heftig angegriffen worden, von *Bortkiewicz* anerkannt und gewürdigt, in der Neuzeit aber wiederum von *P. Spangenberg* [1]) abfällig beurteilt und als verwirrend hingestellt worden. Inwieweit dies berechtigt ist, überlasse ich getrost der Beurteilung der Fachgenossen, die nicht auf einseitigem Standpunkte stehen, dass nur die *Grenzmethode* überzeugend ist, aber Rechenschaft über die Zulässigkeit der aufgestellten Differentialgleichung (1) verlangen.

Zum Schlusse dieser Studie ist es wohl überflüssig, ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, dass die unter (8) angegebene *Karupsche* Formel direkt aus der unter (5) angegebenen *Zimmermannschen* Formel abgeleitet worden ist. Eine eklatantere Widerlegung der masslosen Angriffe, die *Zimmermann* gegen mich gerichtet hat, lässt sich wohl kaum denken.

---

[1]) Siehe seine Aufsätze in Heft XX der Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft.