Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit ohne und mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall

Autor(en): **Kihm, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **7 (1912)**

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967473

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit ohne und mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall.

Von **K. Kihm**, Chefmathematiker der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt in Zürich.

Im Laufe der letzten Jahre haben einzelne Versicherungsgesellschaften angefangen, neben den Altersrenten auf bestimmte Verfallzeit auch solche auf unbestimmte Verfallzeit abzuschliessen. Die letzteren Versicherungsarten bieten den Vorteil, dass der Versicherte nicht zu regelmässigen Einlagen gezwungen wird, sondern Einzahlungen zu ganz beliebigen Zeitpunkten leisten kann, wenn er für sein Alter sorgen will. Kommt der Versicherte zu dem Entschlusse, aus seinen Einlagen die entsprechenden Renten zu beziehen, so genügt eine Erklärung an die Gesellschaft, dass er von einem bestimmten Tage an in den Genuss seiner Rente treten wolle.

Die Berechnung der Renten auf unbestimmte Verfallzeit wird bei der Altersrente ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall in der Weise durchgeführt, dass die beim Eintritt geleistete Einlage in eine sofort beginnende Rente umgewandelt wird. Wird diese Rente nach einem Jahre nicht bezogen, so wird sie wieder in eine jährliche Rente umgewandelt. Wird nach zwei Jahren die zugeteilte Rente ebenfalls nicht bezogen, so wird sie neuerdings in eine jährliche Rente umgewandelt. Diese Operation ist so lange durchzuführen,

bis sich der Versicherte entschliesst, seine Rente zu beziehen.

Bei der Versicherung mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall kommen nur die Zinsen der Einlage für die Ermittlung der Rente in Betracht. Es wird daher nach einem Jahre der fällig gewordene Zins der Einlage in eine Rente umgewandelt. Wird diese Rente nach zwei Jahren nicht bezogen, so wird sie mit den Zinsen des zweiten Jahres zusammen in eine Rente umgewandelt. Wenn nach drei Jahren die dann fällige Rente nicht bezogen wird, so wandelt sie sich nebst den Zinsen des Kapitals wieder in eine Rente um usw. Entschliesst sich der Versicherte zum Bezug seiner Rente, so erhält er ausser der aus den nicht bezogenen Zinsen resultierenden Rente noch die jährlichen Zinsen des Kapitals als Rente.

Werden Selektionstafeln bei der Berechnung zugrunde gelegt, so wird der Rentner, solange er den Rentengenuss aufschiebt, jedes Jahr wie ein ausgewähltes Risiko behandelt, also wie ein Neueintretender angesehen.

Die sämtlichen Einlagen, auch die aus den umzuwandelnden Renten herrührenden Einlagen, werden als Bruttoeinlagen angerechnet.

Den Ableitungen ist eine Tabelle beigelegt, enthaltend die Grundzahlen zur Berechnung der Renten für alle Alter von 0 bis zu 80 Jahren. Als Grundlage zu diesen Berechnungen dienten die Bruttoeinlagen der französischen Gesellschaften für lebenslängliche jährlich zahlbare Leibrenten, welche nach der Tafel R. F. bei einem Zinsfuss von $3^1/_2$ %, bei gegebenen Aufschlägen für Abschlussprovisionen und innere Verwaltungskosten, sowie bei bestimmten Selektionszuschlägen für die Alter über 65 Jahre, ermittelt wurden. Das Alter 80 wurde

dabei als Grenze gewählt, weil Altersrenten, die nach dem 80. Altersjahr fällig werden sollen, selten abgeschlossen werden.

I. Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall.

1. Berechnung der Renten.

Der Einlage 1 entspricht eine jährliche sofort beginnende Rente im Betrage von

$$\frac{1}{a''_x}, \tag{1}$$

welche nach einem Jahre, im Alter $x+1$, zum erstenmal fällig und lebenslänglich ausbezahlt wird. Dabei bedeutet x das Eintrittsalter und a''_x die Bruttoeinlage für die sofort beginnende Rente 1.

Wird die Rente nach einem Jahre nicht bezogen, sondern in eine Rente umgewandelt, so resultiert daraus eine jährliche Rente von

$$\frac{1}{a''_x} \frac{1}{a''_{x+1}}. \tag{2}$$

Diese Rente ist zum erstenmal im Alter $x+2$ fällig und wird von dort an lebenslänglich ausbezahlt. Die gesamte Rente, welche nach Ablauf eines Jahres versichert ist und im Alter $x+2$ ausbezahlt wird, ergibt sich als Summe von 1 und 2 zu

$$\frac{1}{a''_x} + \frac{1}{a''_x} \frac{1}{a''_{x+1}} = \frac{1}{a''_x}\left(1 + \frac{1}{a''_{x+1}}\right). \tag{3}$$

Wenn diese Rente nach 2 Jahren nicht bezogen, sondern in eine Rente umgewandelt wird, so ist die daraus sich ergebende Rente

$$(4) \qquad \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}.$$

Die gesamte nach 2 Jahren versicherte Rente ist deshalb

$$(5) \qquad \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)+\frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}$$

$$= \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right).$$

Diese Rente wird nach 3 Jahren zum erstenmal fällig. Wird sie nicht bezogen, so ist die nach 3 Jahren versicherte Rente

$$(6) \qquad \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)$$

$$+\frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\frac{1}{a''_{x+3}}$$

$$= \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+3}}\right)$$

usw. Der Einlage 1 entspricht nach n Jahren der Betrag ${}_{n/}r_x$ der nunmehr jedes Jahr, zum erstenmal im Alter $x+n+1$, fälligen Rente, und es ist

$$(7) \qquad {}_{n/}r_x = \frac{1}{a''_x}\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+3}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{a''_{x+n}}\right)$$

Führen wir hier die Bezeichnung ein

$$(8)\quad \gamma_x = \left(1+\frac{1}{a''_0}\right)\left(1+\frac{1}{a''_1}\right)\left(1+\frac{1}{a''_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{a''_x}\right),$$

so wird

$$(9)\qquad {}_{n/}r_x = \frac{\gamma_{x+n}}{a''_x\,\gamma_x}.$$

Indem wir ferner setzen

$$(10)\qquad \beta_x = \frac{1}{a''_x\,\gamma_x},$$

so ergibt sich die nach n Jahren versicherte Rente zu

$$(11)\qquad {}_{n/}r_x = \beta_x\,\gamma_{x+n}.$$

Die Werte $1000\,\beta_x$ und γ_x sind in der beiliegenden Tabelle als die Grundzahlen B und C aufgeführt. Die nach der Erklärung zum Rentenbezug sich ergebende Rente wird somit für die Einlage 1000 erhalten, indem die dem Alter des Rentners zur Zeit der Einlage entsprechende Grundzahl B multipliziert wird mit der Grundzahl C, welche dem Alter des Rentners an dem dem ersten Verfalltag der Rente nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage entspricht. Für jede beliebige andere Einlage erhalten wir die entsprechende Rente durch Multiplikation der so erhaltenen Zahl mit dem tausendsten Teil der geleisteten Einlage.

Allgemein ist die Rente vom Alter $x+n+1$ an, wenn die Einlage 1 im Alter $x+t$ geleistet wird, gleich

$$(12)\qquad {}_{n-t/}r_{x+t} = \beta_{x+t}\,\gamma_{x+n},$$

wobei

$$(13)\qquad \beta_{x+t} = \frac{1}{a''_{x+t}\,\gamma_{x+t}}.$$

Wird der Bezug der Rente sofort nach der Einlage erklärt, ist also $n = o$, so ist die Rente gleich

$$(14) \qquad {}_{0/}r_x = \beta_x \, \gamma_x = \frac{\gamma_x}{a''_x \, \gamma_x} = \frac{1}{a''_x}$$

wie nach dem Ausdruck 1.

Die hier abgeleiteten Formeln gelten auch, wenn die Bruttoeinlagen auf Grundlage von Selektionstafeln berechnet werden; es sind alsdann nur die Bezeichnungen entsprechend abzuändern.

Findet der Bezug der Rente nicht am Jahrestag der Einlage statt, so ist die erste Rente nur eine Ratarente entsprechend der Anzahl der Tage vom Jahrestag der Einlage bis zum Bezugstag der Rente. Für die folgenden Jahre wird je eine volle Rente ausbezahlt.

Die Renten können statt jährlich auch in halbjährlichen, vierteljährlichen oder monatlichen Raten bezogen werden, gegen entsprechende Herabsetzung des Rentenbetrages. Die reduzierte Rente ergibt sich zu

$$(15) \qquad {}^{(m)}_{n/}r_x = {}_{n/}r_x \, \frac{a''_{x+n}}{{}^{(m)}a''_{x+n}},$$

wobei m die Anzahl der Raten angibt, in denen die Rente im Laufe des Jahres bezogen wird. Während der Aufschubszeit werden nur die jährlichen Renten berechnet, eine Umwandlung in ratenweise Zahlung findet erst nach der Erklärung zum Rentenbezug statt.

Ein Versicherter kann beliebig viele Einlagen an verschiedenen Terminen leisten und dieselben entweder alle gleichzeitig oder zu verschiedenen Zeitpunkten in Renten umwandeln; auch kann er eine einzelne Einlage in mehrere Teile zerlegen und für

dieselben verschiedene Verfalltermine festsetzen. Jede dieser Einlagen oder Teileinlagen wird nach der oben gegebenen Regel für sich in Renten umgewandelt.

Verpflichtet sich ein Versicherter zur Zahlung der Einlage 1, jeweilen an den nämlichen Jahresdaten einer Anzahl von aufeinander folgenden Jahren, so berechnet sich die Rente, welche er nach Ablauf von n Jahren, von der ersten Einlage an gerechnet, also vom Alter $x + n + 1$ an, beziehen kann, wobei die Anzahl der Aufschubsjahre der freien Wahl des Versicherten zu überlassen ist, zu

$$(16) \quad {}_{n/}r_x + {}_{n-1/}r_{x+1} + {}_{n-2/}r_{x+2} + {}_{n-3/}r_{x+3} + \cdots\cdots + {}_{1/}r_{x+n-1} + {}_{0/}r_{x+n}$$

$$= \gamma_{x+n}(\beta_x + \beta_{x+1} + \beta_{x+2} + \beta_{x+3} + \cdots\cdots + \beta_{x+n-1} + \beta_{x+n})$$

$$= \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x-1}} - 1,$$

siehe die Ableitungen zum Abschnitt II, 1.

Beispiel. Am 15. April 1911 hat ein 30 Jahre alter Versicherter eine Einlage von Fr. 6000 für Altersrente auf unbestimmte Verfallzeit ohne Rückgewähr der Einlagen geleistet. Später bezeichnet er den 1. September 1936 als ersten Verfalltag der nun alljährlich zu beziehenden Rente. Der dem Bezugstag der Rente zunächst vorausgehende Jahrestag der Einlage ist der 15. April 1936, an welchem Tage der Rentner 55 Jahre alt ist. Die Grundzahl B, welche dem Eintrittsalter 30 entspricht, ist laut der beigegebenen Tabelle gleich 12,7925, die dem Alter 55 entsprechende Grundzahl C ist 15,7022, so dass die Jahresrente gleich ist

$$6 \times 12{,}7925 \times 15{,}7022 = \text{Fr. } 1205{,}22.$$

Die erste Ratarente am 1. September 1936 ist für 136 Tage auszurichten, das Jahr zu 360 Tagen gerechnet, und beträgt somit

$$\frac{136}{360}\,1205{,}22 = \text{Fr. } 455{,}30.$$

2. Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages.

Das Deckungskapital und der Rentenübertrag sind für jede der geleisteten Einlagen desselben Versicherten vor und nach Beginn des Rentenbezuges besonders zu berechnen. Es lassen sich mehrere Einlagen nur dann zusammenfassen, wenn sie während verschiedenen Jahren an demselben Jahrestage geleistet wurden, und für im Rentenbezug befindliche Versicherungen zudem die Bezugsart der Renten dieselbe ist.

a) Vor dem Rentenbezug.

Solange der Versicherte sich noch nicht im Rentengenuss befindet, wird das Deckungskapital für eine einzelne Einlage gefunden, indem wir nach der angegebenen Regel die Rente ermitteln, mit welcher der Rentner während dem Laufe des betreffenden Versicherungsjahres versichert ist. Das Deckungskapital wird entsprechend dieser Rente wie für einen am Anfang des Jahres neu eingetretenen Rentner eingesetzt. Da während den Aufschubsjahren nur mit jährlich zahlbaren Renten gerechnet wird, so ist das Deckungskapital am Ende des $(t+1)$. Jahres gleich

$$(17) \qquad {}_{t/}r_x\, a'_{x+t+1},$$

wenn a'_{x+t+1} das Deckungskapital für die Rente 1 des $x+t+1$ jährigen angibt. Hierzu kommt noch die auf-

gelaufene Rente mit ${}_{t/}r_x$. Am Anfang des $(t+1)$. Jahres ist das Deckungskapital

$$ {}_{t/}r_x \, a'_{x+t} \, . $$

Auf Ende des Kalenderjahres wird die versicherte Rente für eine noch nicht im Rentengenuss befindliche einzelne Versicherung mittelst der Grundzahlen B und C und der geleisteten Einlage für das Versicherungsjahr berechnet, in dessen Lauf der 31. Dezember fällt. Dabei wird die Grundzahl C durch das Alter bestimmt, welches der Rentner an dem dem 31. Dezember nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage hat. Das Deckungskapital wird auf Grundlage des Alters und der festgesetzten Rente wie für einen im Laufe des Jahres neu eingetretenen Rentner bestellt. Für die der Einlage 1 entsprechende Rente wird dasselbe näherungsweise durch geradlinige Interpolation zwischen den Werten am Anfang und Ende des $(t+1)$. Jahres gefunden und ist somit gleich

$$ (18) \qquad \left(\frac{360 - u}{360} \, a'_{x+t} + \frac{u}{360} \, a'_{x+t+1} \right) {}_{t/}r_x , $$

wobei u die Anzahl der Tage vom Jahrestag der Einlage bis zum 31. Dezember angibt. Zu dem Deckungskapital kommt noch der Rentenübertrag hinzu, welcher entsprechend der versicherten Rente pro Rata der Anzahl der Tage vom Jahrestag der Einlage bis zum 31. Dezember berechnet wird, also gleich ist

$$ (19) \qquad \frac{u}{360} \, {}_{t/}r_x \, . $$

b) Während dem Rentenbezug.

Für eine im Rentenbezug befindliche Versicherung wird das Deckungskapital und der Rentenübertrag wie für eine einfache Leibrente im Betrag der auszuzahlenden Rente eingesetzt. Als Eintrittsalter kommt dabei, wenn nach Selektionstafeln gerechnet wird, das Alter an dem dem Verfalltag der ersten Rente nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage in Betracht. Am 31. Dezember berechnet sich das Deckungskapital zu

$$(20)\quad \left(\frac{360-u}{360}\,{}^{(m)}a'_{x+t} + \frac{u}{360}\,{}^{(m)}a'_{x+t+1}\right) {}^{(m)}_{n/}r_x\,.$$

Dabei ist angenommen, dass der Rentenbezug nach n Jahren begonnen habe, die Rente in m Raten während eines Jahres zahlbar sei und der 31. Dezember im Laufe des $(t+1)$. Jahres liege $(t \geqq n)$. Der Rentenübertrag ist pro Rata der Anzahl von Tagen seit Verfall der letzten Rentenrate bis zum 31. Dezember zu berechnen.

II. Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit mit Rückgewähr der vollen geleisteten Einlagen im Todesfall.

---

1. Berechnung der Renten.

Die beim Eintritt geleistete Einlage muss im Todesfall des Versicherten wieder zurückerstattet werden. Deshalb können nur die Zinsen der Einlage für die Ermittlung der Renten in Betracht fallen, wobei wir voraussetzen, dass die Zinsen am Ende der Versicherungsjahre als Renteneinlagen zur Verwendung gelangen. Der jährliche Zins der Einlage 1 beträgt

$i = 0{,}035$, wenn mit einem Zinsfuss von $3^1/_2$ % gerechnet wird. Die Zinsen sind als Einlagen für Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall anzusehen.

Aus den Zinsen i der Einlage 1, welche am Ende eines jeden Jahres als Einlagen für Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit verwendet werden, ergibt sich eine bestimmte Rente. Wird der Bezug der Rente um n Jahre vom Eintritt an gerechnet aufgeschoben, also die erste Rente im Alter $x + n + 1$ bezogen, so resultiert aus dem Betrage i eingelegt

im Alter	$x + 1$	die Rente	$i\ {}_{n-1/}r_{x+1}$
„ „	$x + 2$	„ „	$i\ {}_{n-2/}r_{x+2}$
„ „	$x + 3$	„ „	$i\ {}_{n-3/}r_{x+3}$
		$\vdots$	
„ „	$x + n$	„ „	$i\ {}_{0/}r_{x+n}$,

siehe die Ableitungen für Altersrente ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Die Zinsen der Einlage 1 laufen auch nachdem der Bezug der Rente erklärt ist, unverändert weiter, solange der Rentner lebt. Die Summe der oben aufgeführten Renten erhöht sich somit jedes Jahr noch um den Betrag i der Zinsen des angelegten Kapitals 1. Die gesamte Rente, welche nach n Jahren, zum erstenmal im Alter $x + n + 1$, bezogen werden kann und mit ${}_{n/}(r)_x$ bezeichnet sei, ist deshalb

$$(21)\quad {}_{n/}(r)_x = i\,({}_{n-1/}r_{x+1} + {}_{n-2/}r_{x+2} + {}_{n-3/}r_{x+3} + \cdots$$
$$+ {}_{3/}r_{x+n-3} + {}_{2/}r_{x+n-2} + {}_{1/}r_{x+n-1} + {}_{0/}r_{x+n} + 1).$$

Setzen wir für die Ausdrücke in der Klammer ihre Werte nach Gleichung (9) ein, so wird

(22)

$$
{}_{n|}(r)_x = i\left(\frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+1}\,\gamma_{x+1}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+2}\,\gamma_{x+2}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+3}\,\gamma_{x+3}} + \cdots\right.
$$

$$
+ \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+n-3}\,\gamma_{x+n-3}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+n-2}\,\gamma_{x+n-2}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+n-1}\,\gamma_{x+n-1}}
$$

$$
\left. + \frac{1}{a''_{x+n}} + 1\right).
$$

Da zufolge Gleichung (8)

(23)

$$
\gamma_{x+t} = \left(1+\frac{1}{a''_0}\right)\left(1+\frac{1}{a''_1}\right)\left(1+\frac{1}{a''_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a''_x}\right)\cdots
$$

$$
\cdots\left(1+\frac{1}{a''_{x+t-1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+t}}\right) = \gamma_{x+t-1}\left(1+\frac{1}{a''_{x+t}}\right),
$$

so wird

(24)

$$
1+\frac{1}{a''_{x+t}} = \frac{\gamma_{x+t}}{\gamma_{x+t-1}}.
$$

Wenden wir diese Gleichung sukzessive auf den Ausdruck für die Rente ${}_{n|}(r)_x$ an, so wird

(25)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{a''_{x+n}} = \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+n-1}},\\
&\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+n-1}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+n-1}\,\gamma_{x+n-1}} = \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+n-2}},\\
&\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+n-2}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+n-2}\,\gamma_{x+n-2}} = \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+n-3}},\\
&\qquad\qquad \text{usw.}\\
&\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+1}} + \frac{\gamma_{x+n}}{a''_{x+1}\,\gamma_{x+1}} = \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_x}.
\end{aligned}
\right.
$$

Demnach ist die nach Ablauf von n Jahren zahlbare Rente gleich

(26) $$_{n/}(r)_x = i \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_x}.$$

Indem wir hier den Hülfswert einführen

(27) $$a_x = \frac{i}{\gamma_x},$$

geht der Ausdruck für die Rente über in

(28) $$_{n/}(r)_x = a_x \gamma_{x+n}.$$

Allgemein ist die Rente vom Alter $x + n$ an, sofern die Einlage 1 im Alter $x + t$ geleistet wird, gleich

(29) $$_{n-t/}(r)_{x+t} = a_{x+t} \gamma_{x+n},$$

wobei

(30) $$a_{x+t} = \frac{i}{\gamma_{x+t}}.$$

Die Werte 1000 a_x sind in der beiliegenden Tabelle als die Grundzahlen A aufgeführt. Für die Kapitaleinlage 1000 erhalten wir somit die nach n Jahren zahlbare Rente, indem wir die dem Eintrittsalter des Rentners entsprechende Grundzahl A multiplizieren mit der Grundzahl C, welche dem Alter an dem Jahrestag der Einlage entspricht, der dem ersten Verfalltag der Rente zunächst vorangeht. Die Rente findet sich für jede beliebige andere Einlage, indem wir den so erhaltenen Wert mit dem tausendsten Teil der Einlage multiplizieren.

Wird die Einlage 1 beim Eintritt in eine Rente umgewandelt, ist also $n = 0$, so ergibt sich der Betrag der sofort beginnenden Rente zu

$$(31) \qquad {}_{0/}(r)_x = a_x \gamma_x = \frac{i}{\gamma_x} \gamma_x = i.$$

In diesem Falle wird nur der rechnungsmässig erzielte Zins als Rente ausbezahlt.

Der Ausdruck für die Rente ${}_{n/}(r)_x$ nach Gleichung (26) lässt sich auch direkt auf die folgende Weise ableiten: Am Anfang eines jeden Jahres, mit Ausnahme des ersten, macht der Rentner, solange er den Rentengenuss aufschiebt, eine Einlage gleich den Zinsen des Kapitals und ausserdem, die 2 ersten Jahre ausgenommen, je eine weitere Einlage gleich der Rente, welche aus den nicht bezogenen Zinsen resultiert. Wird der Rentengenuss um n Jahre aufgeschoben, so leistet also der Versicherte nach 1, 2, 3 bis n Jahren je die Einlage i, nach 2, 3, 4 bis nach n Jahren je die Rente aus den nicht bezogenen Zinsen als weitere Einlage. Die gesamte Einlage nach je 1, 2, 3 bis nach n Jahren ist deshalb gleich der Rente des Versicherten beim Aufschub des Rentengenusses um je 0, 1, 2 bis $n - 1$ Jahre.

Die erste Einlage ein Jahr nach dem Eintritt ist i, die hieraus resultierende lebenslängliche Rente

$$(32) \qquad \frac{i}{a''_{x+1}}.$$

Diese Rente ist vom Alter $x + 2$ an auszuzahlen. Hierzu kommt noch der Zins i des Kapitals 1, so dass die gesamte vom Alter $x + 2$ an auszuzahlende Rente gleich ist

$$(33) \qquad \frac{i}{a''_{x+1}} + i = i\left(1 + \frac{1}{a''_{x+1}}\right).$$

Wird diese Rente nicht bezogen, vielmehr als Einlage für eine neue Rente verwendet, so ist die hieraus nach 2 Jahren resultierende Rente gleich

$$(34) \qquad i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}.$$

Die Rente aus den nach 1 und 2 Jahren nicht bezogenen Zinsen ist demnach zusammen

$$(35) \qquad \frac{i}{a''_{x+1}}+i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}.$$

Diese Rente kann vom Alter $x+3$ an ausbezahlt werden mehr den Zinsen i des eingelegten Kapitals. Demnach ist die gesamte nach 2 Jahren vom Alter $x+3$ an zahlbare Rente gleich

$$(36) \qquad \frac{i}{a''_{x+1}}+i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}+i$$
$$= i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right).$$

Schiebt der Rentner den Bezug dieser Rente um ein weiteres Jahr hinaus und verwendet dieselbe nach 3 Jahren als Einlage für eine neue Rente, so ist die hieraus vom Alter $x+4$ an fällig werdende lebenslängliche Rente gleich

$$(37) \qquad i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\frac{1}{a''_{x+3}}.$$

Aus den nicht bezogenen Zinsen wird somit vom Alter $x+4$ an eine Rente fällig von

$$(38)\qquad \frac{i}{a''_{x+1}} + i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}$$
$$+\, i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\frac{1}{a''_{x+3}}.$$

Zu dem hier aufgeführten Betrag kommt jedes Jahr noch der Zins i hinzu, so dass die ganze Rente nach 3 Jahren gleich ist

$$(39)\qquad \frac{i}{a''_{x+1}} + i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\frac{1}{a''_{x+2}}$$
$$+\, i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\frac{1}{a''_{x+3}} + i$$
$$= i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+3}}\right).$$

Schiebt der Rentner den Bezug um 4 Jahre hinaus, so ist die Rente aus den bisher nicht bezogenen Zinsen mit Einschluss der künftigen Zinsen i gleich

$$(40)\qquad i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+3}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+4}}\right)$$

usw. Wenn der Rentenbezug um n Jahre aufgeschoben wird, so ergibt sich die Rente vom Alter $x+n+1$ an zu

$$(41)\qquad {}_{n/}(r)_x = i\left(1+\frac{1}{a''_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+3}}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{a''_{x+4}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{a''_{x+n}}\right) = i\,\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_x} = a_x\,\gamma_{x+n},$$

siehe die Gleichungen (26) und (28).

Gegen entsprechende Reduktion der Rente kann statt der jährlichen Zahlung auch die Zahlung in m Raten im Laufe eines Jahres festgesetzt werden. Alsdann reduziert sich der Betrag des aus den nicht bezogenen Zinsen herrührenden Teiles ${}_{n/}(r)_x - i$ der Rente im Verhältnis der Bruttoeinlage des $x+n$jährigen für die Rente 1 bei jährlicher Zahlung zu der Bruttoeinlage für die Rente 1 bei m-maliger Zahlung im Laufe eines Jahres, siehe Gleichung (15). Zu jeder Rate kommt noch der Zins des Kapitals im näherungsweisen Betrage von $\frac{i}{m}$ hinzu, so dass

$$(42) \qquad {}^{(m)}_{n/}(r)_x = \left({}_{n/}(r)_x - i\right) \frac{a''_{x+n}}{{}^{(m)}a''_{x+n}} + i.$$

Bei jährlicher Zahlung der Renten kann bestimmt werden, dass die Renten nicht am Jahrestag der Einlage, sondern an einem beliebigen andern Tage bezogen werden können. In diesem Falle ist die erste Rente eine Ratarente, welche sich pro Rata der Anzahl der Tage vom letzten Jahrestag der Einlage bis zum Bezugstag der Rente berechnet; denn es sind beide Teile der Ratarente aus den nicht bezogenen und den künftigen Zinsen des Kapitals herrührend, proportional zu der Anzahl der Tage. Die folgenden Renten sind volle Renten.

Ein Versicherter kann auch verschiedene Einlagen zu beliebigen Zeitpunkten leisten und dieselben samthaft oder in mehreren Teilen in Renten umwandeln.

Bei der Ableitung der obigen Formeln ist vorausgesetzt worden, dass der Jahreszins jeweilen am Ende des Jahres resp. am Anfang des folgenden Jahres als Einlage verwendet oder ausbezahlt werde. Im Todes-

fall kann das eingelegte Kapital unmittelbar nach dem Tode, einschliesslich dem Zins vom Anfang des Versicherungsjahres bis zum Todestag ausgerichtet werden.

Beispiel. Wir benutzen dieselben Zahlen wie im Abschnitt I. Die Grundzahl *A*, welche dem Eintrittsalter 30 entspricht, ist 9,293.39, die Grundzahl *C* entsprechend dem Alter 55 ist 15,7022, somit die Jahresrente

$$6 \times 9{,}293.39 \times 15{,}7022 = \text{Fr. } 875{,}56,$$

wovon Fr. 665,56 aus den nicht bezogenen Zinsen und Fr. 210 aus den künftigen Zinsen des Kapitals herrühren. Diese Rente kann zum erstenmal am 15. April 1937 und von dort an alljährlich ausbezahlt werden. Soll die Rente am 1. September, zum ersten Mal am 1. September 1936 ausgerichtet werden, so ist die erste Rente nur eine Ratarente für 136 Tage, also gleich

$$\frac{136}{360}\, 875{,}56 = \text{Fr. } 326{,}24.$$

2. Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages für die versicherte Rente.

Das Deckungskapital und der Rentenübertrag sind auch hier für jede Einlage einzeln, sowohl vor als während dem Rentengenuss, zu berechnen. Dabei kommen nur die eigentlichen Renten in Betracht, welche aus den nicht bezogenen Zinsen herrühren, während für die beim Eintritt geleistete Kapitaleinlage und den Zins derselben eine besondere Reserve zu bestellen ist.

a) Vor dem Rentenbezug.

Im Laufe des $(t+1)$ Versicherungsjahres ist das Deckungskapital und der Rentenübertrag für die während desselben versicherte Rente zu berechnen. Diese ist

$$(43) \qquad {}_{t/}(r)_x - i,$$

denn die Rente ${}_{t/}(r)_x$, welche nach der Erklärung zum Rentenbezug vom Alter $x+t+1$ an ausbezahlt werden könnte, wird gebildet aus den bisher nicht bezogenen Zinsen und den am Anfang eines jeden der folgenden Jahre hinzukommenden Zinsen des Kapitals.

Mittelst der Grundzahlen A und C und der geleisteten Kapitaleinlage wird die Rente berechnet, welche der Versicherte nach t Jahren, von dem auf den Zeitpunkt der Berechnung folgenden Jahrestag der Einlage an beziehen könnte. Als Alter zur Bestimmung der Grundzahl C gilt das Alter des Versicherten an dem Jahrestag der Kapitaleinlage, welcher dem Zeitpunkt der Berechnung des Deckungskapitals zunächst vorangeht. Die so ermittelte Rente ist um die einjährigen Zinsen des Kapitals zu kürzen. Das Deckungskapital und der Rentenübertrag werden für die versicherte Rente nach denselben Grundsätzen wie für eine einfache Leibrente, s. den Abschnitt I, 2, eingesetzt, wobei wieder angenommen wird, dass der Rentner mit dem vorangehenden Jahrestag der Kapitaleinlage neu eingetreten sei.

b) Während dem Rentenbezug.

Für eine im Rentenbezug befindliche Versicherung ist das Deckungskapital und der Rentenübertrag wie für eine Leibrente im Betrage ${}_{n/}(r)_x - i$ einzusetzen, wenn ${}_{n/}(r)_x$ die dem Versicherten auszuzahlende Rente

für die Einlage 1 angibt. Als Eintrittsalter kommt bei der Rechnung mit Selektionstafeln wieder das Alter an dem Jahrestag der Kapitaleinlage in Frage, welcher dem Verfalltag der ersten Rente zunächst vorangeht.

3. Berechnung der Reserve für die geleistete Kapitaleinlage.

Ausser dem Deckungskapital für die versicherte Rente ist noch die Reserve für die geleistete Kapitaleinlage einzusetzen. Am Anfang eines jeden Versicherungsjahres ist das Kapital 1 vorhanden. Dieses wächst mit den Zinsen bis zum Ende des Versicherungsjahres auf den Betrag $1 + i$ an. Für jeden beliebigen Zeitpunkt im Laufe des Jahres ist als Reserve das eingelegte Kapital mehr den bis dahin aufgelaufenen Zinsen einzusetzen. Nach $\frac{u}{360}$ Jahren ist somit als Reserve zurückzustellen.

$$(1 + i)^{\frac{u}{360}} \tag{44}$$

oder näherungsweise

$$1 + \frac{u}{360}\, i, \tag{45}$$

wobei u die Anzahl der Tage vom Jahrestag der Einlage bis zum Zeitpunkt der Berechnung der Reserve angibt.

III. Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit mit Rückgewähr des Kapitals im Todesfall und mit dem Recht auf teilweisen oder ganzen Rückzug des Kapitals in jedem beliebigen Zeitpunkt.

1. Berechnung der Renten.

Der Rückzug von einem Teil oder des ganzen Kapitals kann vor oder nach der Erklärung zum Rentenbezug erfolgen. Gleichzeitig mit dem zurückgezogenen Kapital werden auch dessen Zinsen vom Anfang des Versicherungsjahres bis zum Rückzahlungstag verabfolgt. Dem Rückzug von einem Teil des Kapitals entspricht eine Reduktion der Rente, deren Betrag wir zu berechnen haben.

a) Vor dem Rentenbezug.

Um die Reduktion der Rente zu ermitteln, welche dem Rückzug von einem Teil des Kapitals entspricht, nehmen wir an, es werde der Betrag k, wobei $k \leqq 1$ ist, im Laufe des $(t+1)$ Jahres zum Rückzug gekündet. Dadurch werden die vom Alter $x+t+1$ an zur Rente hinzuzufügenden Zinsen um ki kleiner und betragen nur noch $(1-k)\,i$. Die aus den nicht bezogenen Zinsen resultierende Rente, zahlbar vom Alter $x+t+1$ an, ist ${}_{t/}(r)_x - i$, zu welcher noch die Zinsen $(1-k)\,i$ hinzuzufügen sind, so dass die gesamte vom Alter $x+t+1$ an zu beziehende Rente gleich ist

$$(46) \qquad {}_{t/}(r)_x - i + (1-k)\,i = {}_{t/}(r)_x - ki.$$

Wird diese Rente nicht bezogen, sondern als Einlage für eine neue Rente verwendet, so ergibt sich daraus ein Rentenzuwachs von

$$(47) \qquad \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \frac{1}{a''_{x+t+1}}.$$

Die Rente aus den nicht bezogenen Zinsen ist deshalb nach $t+1$ Jahren

$$(48) \qquad {}_{t/}(r)_x - i + \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \frac{1}{a''_{x+t+1}}.$$

Mit Einschluss der Zinsen $(1-k)\,i$ des Restkapitals kann vom Alter $x+t+2$ an eine Rente bezahlt werden von

$$(49) \qquad {}_{t/}(r)_x - i + \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \frac{1}{a''_{x+t+1}} + (1-k)\,i$$

$$= \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+1}}\right).$$

Wenn diese Rente nicht bezogen, sondern als neue Einlage verwendet wird, so resultiert hieraus ein Rentenzuwachs von

$$(50) \qquad \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+1}}\right) \frac{1}{a''_{x+t+2}}.$$

Die gesamte Rente vom Alter $x+t+3$ an aus den nicht bezogenen Zinsen und den Zinsen des Restkapitals beträgt somit

$$(51) \qquad \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+1}}\right) - (1-k)\,i$$

$$+ \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+1}}\right) \frac{1}{a''_{x+t+2}} + (1-k)\,i$$

$$= \left({}_{t/}(r)_x - ki\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{a''_{x+t+2}}\right)$$

usw. Die Rente n Jahre nach dem Eintritt, vom Alter $x+n+1$ an, ist deshalb

$$(52)\quad \left({}_{t/}(r)_x - ki\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+t+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a''_{x+t+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a''_{x+n}}\right)$$

$$= \left({}_{t/}(r)_x - ki\right)\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+t}}.$$

Nun ist hier

$$(53)\quad {}_{t/}(r)_x \frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+t}} = i\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_x} = a_x\,\gamma_{x+n} = {}_{n/}(r)_x \quad \text{und}$$

$$(54)\quad ki\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+t}} = k\,a_{x+t}\,\gamma_{x+n} = k\;{}_{n-t/}(r)_{x+t}.$$

Somit wird die Rente $t-n$ Jahre nach dem Rückzug gleich

$$(55)\quad {}_{n/}(r)_x - k\;{}_{n-t/}(r)_{x+t} = (a_x - k\,a_{x+t})\,\gamma_{x+n}.$$

Dieses Resultat können wir auch auf die folgende Weise ableiten: Mit dem Kapital k werden dessen Zinsen vom Anfang des Versicherungsjahres an bis zum Auszahlungstage vergütet. Für die Ermittlung der künftigen Renten kommt somit das Kapital k nicht mehr in Betracht. Dem Kapital k im Alter $x+t$ eingelegt entspricht nach $n-t$ Jahren, vom Alter $x+t+1$ an, nach Gleichung (29) eine Rente von

$$(56)\quad k\;{}_{n-t/}(r)_{x+t} = ki\frac{\gamma_{x+n}}{\gamma_{x+t}} = k\,a_{x+t}\,\gamma_{x+n}.$$

Um diesen Betrag ist die Rente ${}_{n/}(r)_x$, welche ohne den Rückzug des Kapitals k nach n Jahren auszuzahlen wäre, zu kürzen. Somit ist die Rente nach dem Rückzug nach Gleichung (55) zu berechnen.

Zur Ermittlung der nach dem Rückzug des Kapitals k vom Alter $x+n+1$ an auszahlbaren Rente,

wird von der dem Eintrittsalter x entsprechenden Grundzahl A die $k$fache Grundzahl A abgezogen, welche dem Alter des Versicherten an dem dem Rückzug nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage entspricht; die Differenz wird mit der Grundzahl C mutipliziert, welche dem Alter des Versicherten an dem der Erklärung zum Rentenbezug nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage zugehört. Die so erhaltene Zahl ist mit dem tausendsten Teil der Einlage zu vervielfachen.

Erfolgt die Erklärung zum Rentenbezug und zum Rückzug des Kapitals k zu gleicher Zeit, so ist die Rente für $t = n$ gleich

$$(57) \quad {}_{n/}(r)_x - k\,{}_{0/}(r)_{x+n} = (a_x - k\,a_{x+n})\,\gamma_{x+n} = {}_{n/}(r)_x - ki.$$

Ist hier $n = 0$, so wird die Rente

$$(58) \quad a_x\,\gamma_x - ki = i - ki = (1 - k)\,i,$$

weil nur die Zinsen des Kapitals $1 - k$ als Renten ausbezahlt werden.

Wird im Alter $x + t$ das ganze Kapital zurückgezogen, ist also $k = 1$, so ergibt sich die Rente nach n Jahren zu

$$(59) \quad {}_{n/}(r)_x - {}_{n-t/}(r)_{x+n} = (a_x - a_{x+t})\,\gamma_{x+n}.$$

Ist hier $t = n$, so wird die Rente gleich

$$(60) \quad {}_{n/}(r)_x - {}_{0/}(r)_{x+n} = {}_{n/}(r)_x - i.$$

Für $n = 0$ folgt als Rente 0, weil das Kapital nach der Einlage wieder zurückgezogen wird.

Mit der Erklärung zum Rentenbezug kann auch festgesetzt werden, dass die Renten in m Raten im

Laufe eines Jahres zu zahlen seien. In diesem Falle ist der während eines Jahres auszuzahlende Rentenbetrag gleich

$$(61)\quad \left({}_{n/}(r)_x - k\,{}_{n-t/}(r)_{x+t} - (1-k)\,i\right) \frac{a''_{x+n}}{{}_{(m)}a''_{x+n}} + (1-k)\,i.$$

Die Jahresrente kann auch an einem beliebigen andern Tage als dem Jahrestag der Einlage ausbezahlt werden.

Beispiel. Wir nehmen an, dass im früher aufgeführten Beispiel ein Rückzug von Fr. 3000 Kapital nach dem 15. April 1927 mit Wirkung vom 15. April 1927 an erklärt werde. An diesem Tage ist der Versicherte 46 Jahre alt. Die dem Alter 46 entsprechende Grundzahl A ist 4,016.98. Da $k = \frac{1}{2}$, so wird die Rente vom 55. Altersjahre an, zum erstenmal zahlbar am 15. April 1937 im Alter 56, gleich

$$6\,(9{,}293.39 - \tfrac{1}{2}\,4{,}016.98)\,15{,}7022 = \text{Fr. } 686{,}33.$$

Wird das ganze Kapital zurückgezogen, so ist die Rente nur noch

$$6\,(9{,}293.39 - 4{,}016.98)\,15{,}7022 = \text{Fr. } 497{,}11.$$

Soll die Rente am 1. September, zum erstenmal am 1. September 1936, ausbezahlt werden, so ist die erste Rente eine Ratarente gleich

$$\frac{136}{360}\,686{,}33 = \text{Fr. } 259{,}28$$

resp. $$\frac{136}{360}\,497{,}11 = \text{Fr. } 187{,}80.$$

b) Während dem Rentenbezug.

Erfolgt ein teilweiser Rückzug des Kapitals nach der Erklärung zum Rentenbezug, so wird die Rente ${}_{n/}(r)_x - i$, welche dem Versicherten aus den nicht bezogenen Zinsen zukommt, unverändert weiter bezahlt, dagegen wird der zur versicherten Rente hinzuzufügende Zins des Kapitals von dem der Erklärung zum Rückzug folgenden Jahrestag der Einlage an entsprechend dem Rückzug kleiner. Sei k der zurückgezogene Betrag, wobei $k \leqq 1$ ist, so reduzieren sich die Zinsen des übrigbleibenden Kapitals auf $(1 - k)\, i$. Die Rente nach dem Rückzug ist deshalb

$$(62) \qquad {}_{n/}(r)_x - i + (1 - k)\, i = {}_{n/}(r)_x - ki = a_x\, \gamma_{x+n} - ki,$$

siehe auch Gleichung (57). Dieselbe Rente wird auch ausbezahlt, wenn der Rückzug von einem Teil des Kapitals in jedem beliebigen Jahre während dem Rentenbezug erfolgt. Die bisher bezogene Rente vermindert sich somit vom nächsten Bezugstermin an um die Zinsen des zurückgezogenen Kapitals, zum rechnungsmässigen Zinsfuss berechnet.

Ist $k = 1$, so wird vom Rückzuge an eine Rente von

$$(63) \qquad {}_{n/}(r)_x - i = a_x\, \gamma_{x+n} - i,$$

siehe Gleichung (60), ausbezahlt, indem die Zinsen des Kapitals ganz wegfallen.

Beispiel. Wenn im früheren Beispiel ein Rückzug von Fr. 3000 Kapital nach dem 15. April 1945 mit Wirkung vom 15. April 1945 an erklärt wird, so ist die Rente für den 15. April 1946 und die folgenden Jahre gleich

$$\text{Fr. } 876{,}56 - 105 = \text{Fr. } 770{,}56.$$

Wird das ganze Kapital zurückgezogen, so ist die Rente gleich

$$\text{Fr. } 876{,}56 - 210 = \text{Fr. } 665{,}56.$$

2. Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages.

Vor dem Rückzug von einem Teil des Kapitals berechnen sich das Deckungskapital und der Rentenübertrag nach den im Abschnitt II, 2 gegebenen Regeln.

a) Der Rückzug findet vor der Erklärung zum Rentenbezug statt.

Wenn der Rückzug von einem Teil des Kapitals vor der Erklärung zum Rentenbezug erfolgt, so ist bei der Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages zu berücksichtigen, ob zu diesem Zeitpunkt die Erklärung zum Rentenbezug schon stattgefunden hat oder nicht.

Ist die Erklärung zum Rentenbezug noch nicht abgegeben worden, so ist s Jahre nach dem Rückzug die versicherte Rente, d. h. die aus den nicht bezogenen Zinsen herrührende Rente gleich

$$(64) \qquad (a_x - k\, a_{x+t})\, \gamma_{x+t+s} - (1-k)\, i$$
$$= {}_{t+s/}(r)_x - k\, {}_{s/}(r)_{x+t} - (1-k)\, i.$$

Diese Rente ergibt sich aus Gleichung (55), indem wir dort für $n = t + s$ einsetzen und den so erhaltenen Ausdruck um die Zinsen des nicht zurückgezogenen Kapitals kürzen.

Nach der Erklärung zum Rentenbezug ist die versicherte Rente

$$(65) \qquad (a_x - k\, a_{x+t})\, \gamma_{x+n} - (1-k)\, i$$
$$= {}_{n/}(r)_x - k_{n-t/}(r)_{x+t} - (1-k)\, i.$$

Wir berechnen somit die versicherte Rente, indem wir von der Grundzahl A entsprechend dem Eintrittsalter x das $k$fache der Grundzahl A für das Alter an dem Jahrestag der Einlage, welcher der Erklärung zum Rückzug von einem Teil des Kapitals vorangeht, subtrahieren. Die Differenz ist mit der Grundzahl C entsprechend dem Alter an dem der Berechnung des Deckungskapitals, resp. dem ersten Bezugstag der Rente vorangehenden Jahrestag der Einlage und nachher mit dem tausendsten Teil der Einlage zu multiplizieren. Der so erhaltene Wert ist um die Zinsen des noch restierenden Kapitals zu kürzen. Für diese versicherte Rente wird das Deckungskapital und der Rentenübertrag wie für eine einfache Leibrente eingesetzt, wobei als Eintrittsalter das Alter am letzten Jahrestag der Einlage vor Berechnung des Deckungskapitals, resp. vor Bezug der ersten Rente gilt.

Setzen wir $t = n$ und $s = 0$, erfolgen also die Erklärungen zum Rentenbezug und zum Rückzug gleichzeitig, so werden Deckungskapital und Rentenübertrag für die versicherte Rente berechnet

$$(66) \quad (a_x - k\, a_{x+n})\, \gamma_{x+n} - (1-k)\, i = {}_{n/}(r)_x - i.$$

b) Der Rückzug findet nach der Erklärung zum Rentenbezug statt.

Nach der Erklärung zum Rentenbezug und nach dem Rückzug von einem Teil des Kapitals sind Deckungskapital und Rentenübertrag entsprechend dem aus den

nicht bezogenen Zinsen herrührenden Teil der Rente einzusetzen. Die gesamte Rente nach dem Rückzug ist nach Gleichung (62) zu berechnen, in welchem Betrag noch die Zinsen $(1 - k)\, i$ des Restes der Kapitaleinlage enthalten sind. Da wir diese Zinsen abzuziehen haben, so kommt als versicherte Rente in Betracht

$$(67) \qquad {}_{n/}(r)_x - ki - (1 - k)\, i = {}_{n/}(r)_x - i.$$

Dabei ist als Eintrittsalter das Alter an dem der Erklärung zum Rentenbezug zunächst vorangehenden Jahrestag der Einlage anzunehmen. Für die folgenden Jahre sind, sofern nicht ein weiterer Rückzug an Kapital erfolgt, das Deckungskapital und der Rentenübertrag für dieselbe Rente einzusetzen.

3. Berechnung der Reserve für die geleistete Kapitaleinlage.

Die Reserve ist vor dem Rückzug entsprechend der vollen Einlage, nach dem Rückzug entsprechend dem Rest der Einlage, nach den im Abschnit II, 3 gegebenen Regeln zu berechnen.

IV. Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit mit Rückgewähr des Kapitals im Todesfall und mit späterem teilweisen oder gänzlichen Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall.

Der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall von einem Teil oder des ganzen Kapitals kann jederzeit vor oder nach der Erklärung zum Rentenbezug ausgesprochen werden, gegen entsprechende Erhöhung

der Renten. Die Wirkung des Verzichtes tritt mit Anfang des Versicherungsjahres ein, in dessen Lauf die Erklärung zum Verzicht abgegeben wird. Von dem Kapital, für welches der Verzicht auf Rückgewähr erklärt wird, fallen künftig die Zinsen als neue Einlagen weg; dagegen wird das Kapital als Einlage für eine Rente ohne Rückgewähr verwendet. Stirbt der Einleger nach der Verzichterklärung, so bezieht sich die Rückgewähr nur noch auf den Teil des Kapitals, für welches der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall nicht ausgesprochen wurde.

a) Vor dem Rentenbezug.

Wird der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall von einem Teil des Kapitals vor der Erklärung zum Rentenbezug ausgesprochen, so findet sich die entsprechende Erhöhung der Rente durch die folgende Rechnung: Wir nehmen an, der Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals k im Todesfall, wobei $k \leqq 1$ ist, werde im Laufe des $(t+1)$. Versicherungsjahres ausgesprochen und trete somit in Wirksamkeit vom Alter $x+t$ an. Da der Versicherte auf die Rückgewähr des Kapitals k im Todesfall verzichtet, so fallen dessen Zinsen mit ki als künftige Renteneinlagen weg. Deshalb vermindert sich die Rente vom Alter $x+n+1$ an um den gleichen Betrag wie beim Rückzug des Kapitals k, d. h. um

$$k\, a_{x+t}\, \gamma_{x+n} = k\, {}_{n-t/}(r)_{x+t}. \tag{68}$$

Dagegen entspricht dem Kapital k, welches nun ohne Rückgewähr im Todesfall angelegt wird, vom Alter $x+n+1$ an eine Rente von

$$k\, \beta_{x+t}\, \gamma_{x+n} = k\, {}_{n-t/}r_{x+t}. \tag{69}$$

Durch den Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall von einem Teil des Kapitals im Betrage k erhöht sich somit die Rente vom Alter $x+n+1$ an um

$$(70)\quad k\,(\beta_{x+t} - \alpha_{x+t})\,\gamma_{x+n} = k\left({}_{n-t/}\gamma_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}\right)$$

und beträgt nachher

$$(71)\quad \begin{aligned} &[\alpha_x + k\,(\beta_{x+t} - \alpha_{x+t})]\,\gamma_{x+n} \\ &= {}_{n/}(r)_x + k\left({}_{n-t/}\gamma_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit beim Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals k im Laufe des $(t+1)$. Jahres, die vom Alter $x+n+1$ an auszahlbare Rente, indem wir zu der Grundzahl A für das Eintrittsalter x die $k$fache Differenz der Grundzahlen B und A, entsprechend dem Alter des Versicherten an dem der Erklärung zum Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall zunächst vorangehenden Jahrestag der Einlage, addieren. Diese Summe ist zu multiplizieren mit der Grundzahl C für das Alter an dem Jahrestag der Einlage, der dem ersten Bezugstag der Rente zunächst vorangeht, und hernach mit dem tausendsten Teil des eingelegten Kapitals.

Für $k = 1$ beträgt die Erhöhung der Rente vom Alter $x+n+1$ an

$$(72)\quad (\beta_{x+t} - \alpha_{x+t})\,\gamma_{x+n} = {}_{n-t/}\gamma_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}$$

und die Rente nach der Verzichterklärung

$$(73)\quad \begin{aligned} &(\alpha_x + \beta_{x+t} - \alpha_{x+t})\,\gamma_{x+n} \\ &= {}_{n/}(r)_x + {}_{n-t/}\gamma_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}. \end{aligned}$$

Wenn der Verzicht auf die Rückgewähr gleichzeitig mit der Erklärung zum Rentenbezug erfolgt, so wird die Rente, da $t = n$ zu setzen ist, gleich

$$(74) \qquad [\alpha_x + k(\beta_{x+n} - \alpha_{x+n})]\,\gamma_{x+n}$$

$$= \alpha_x\,\gamma_{x+n} + \frac{k}{a''_{x+n}} - ki = {}_{n/}(r)_x + k\,({}_{0/}r_{x+n} - i).$$

Wird der Verzicht auf die Rückgewähr des ganzen Kapitals sofort beim Eintritt erklärt, ist also $t = o$ und $k = 1$, so wird die Rente nach n Jahren gleich

$$(75) \qquad (\alpha_x + \beta_x - \alpha_x)\,\gamma_x = \beta_x\,\gamma_x = {}_{n/}r_x\,.$$

Wir erhalten also die Rente des ersten Abschnittes.

Wird mit der Erklärung zum Rentenbezug festgesetzt, dass die Rente in m Raten im Laufe eines Jahres bezahlt werden soll, so ist die jährliche Rente gleich

$$(76) \qquad \Big[{}_{n/}(r)_x + k\,\big({}_{n-t/}r_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}\big)$$

$$- (1-k)\,i\Big]\,\frac{a''_{x+n}}{{}_{(m)}a''_{x+n}} + (1-k)\,i.$$

Beispiel. Wir nehmen an, in dem früheren Beispiel werde der Verzicht auf die Rückgewähr von Fr. 3000 Kapital nach dem 15. April 1927, mit Wirkung von diesem Tage, also vom Alter 46 des Versicherten an, erklärt. Dem Alter 46 entspricht die Grundzahl A gleich 4,016.98 und die Grundzahl B gleich 6,942.01. Die Rente vom Alter 56 an wird deshalb

$$6\left[9{,}293.39 + \frac{1}{2}\,(6{,}942.01 - 4{,}016.98)\right]\,15{,}7022$$

$$= 1013{,}35.$$

Beim Verzicht auf die Rückgewähr des ganzen Kapitals im Alter 46 wird die Rente vom Alter 56 an

$$6\,(9{,}293.39 + 6{,}942.01 - 4{,}016.98)\ 15{,}7022$$
$$= 1151{,}14.$$

b) Während dem Rentenbezug.

Wenn der Verzicht auf die Rückgewähr von einem Teil des Kapitals nach der Erklärung zum Rentenbezug ausgesprochen wird, so findet ebenfalls eine Erhöhung der Rente statt. Wir nehmen wieder an, dass sich der Verzicht auf Rückgewähr auf das Kapital k beziehe, wobei $k \leqq 1$ ist, und dass er im Laufe des $(t+1)$. Jahres $(t > n)$ mit Wirkung vom Alter $x+t$ an stattfinde. Durch den Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals k fallen dessen jährliche Zinsen weg, so dass die Rente um

$$ki \tag{77}$$

kleiner wird. Dagegen erhöht sich die Rente, weil das Kapital k von nun an à fonds perdu eingelegt wird, um die sofort beginnende Rente, welche dem Kapital k als Renteneinlage im Alter $x+t$ geleistet entspricht, d. h. um

$$k\ {}_{0/}r_{x+t} = k\,\beta_{x+t}\,\gamma_{x+t} = \frac{k}{a''_{x+t}}. \tag{78}$$

Durch den Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall des Kapitals k erhöht sich somit die Rente um den Betrag

$$k\,({}_{0/}r_{x+t} - i) = k\,(\beta_{x+t}\,\gamma_{x+t} - i) = k\left(\frac{1}{a''_{x+t}} - i\right) \tag{79}$$

und beläuft sich nachher auf

$$(80)\quad {}_{n/}(r)_x + k\,({}_{0/}r_{x+t} - i) = \alpha_x\,\gamma_{x+n} + k\,(\beta_{x+t}\,\gamma_{x+t} - i)$$
$$= {}_{n/}(r)_x + k\left(\frac{1}{a''_{x+t}} - i\right).$$

Die Rente, welche der Versicherte bis jetzt bezogen hat, erhöht sich für die Einlage 1 um die $k$fache Differenz zwischen dem Betrag der sofort beginnenden Leibrente ohne Rückgewähr entsprechend der Einlage 1 und den jährlichen Zinsen des Kapitals 1. Für eine beliebige Einlage erhalten wir die Rente auch, indem wir zu der bisher bezogenen Rente das $k$fache Produkt der Grundzahlen B und C entsprechend dem Alter des Versicherten an dem Jahrestag der Einlage, welcher der Verzichterklärung auf die Rückgewähr zunächst vorangeht, multipliziert mit dem tausendsten Teil der Einlage addieren und von der Summe die Zinsen des Kapitals, für welches der Verzicht erklärt wurde, subtrahieren.

Beim Verzicht auf die Rückgewähr des ganzen Kapitals wird die Rente, da $k = 1$ ist,

$$(81)\quad \alpha_x\,\gamma_{x+n} + \beta_{x+t}\,\gamma_{x+t} - i = {}_{n/}(r)_x + \frac{1}{a''_{x+t}} - i.$$

Wird der Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals gleichzeitig mit der Erklärung zum Rentenbezug ausgesprochen, so ist die Rente, da $t = n$ zu setzen ist, wenn sich der Verzicht auf das Kapital k bezieht, gleich

$$(82)\quad {}_{n/}(r)_x + k\,({}_{0/}r_{x+n} - i) = (\alpha_x + k\,\beta_{x+n})\,\gamma_{x+n} - ki$$
$$= {}_{n/}(r)_x + k\left(\frac{1}{a''_{x+n}} - i\right),$$

siehe auch Gleichung (74), und wenn sich der Verzicht auf das ganze Kapital bezieht, gleich

$$(83) \quad {}_{n/}(r)_x + {}_{0/}r_{x+n} - i = (\alpha_x + \beta_{x+n})\,\gamma_{x+n} - i$$
$$= {}_{n/}(r)_x + \frac{1}{a''_{x+n}} - i.$$

Beispiel. Verzichtet der Versicherte im früheren Beispiel nach dem 15. April 1945 auf die Rückgewähr im Todesfall von Fr. 3000 Kapital, so ist die Rente vom folgenden Jahre an, da für das Alter 64 die Grundzahl B gleich 2,998.92, die Grundzahl C gleich 33,3710,

$$6 \times 9{,}293.39 \times 15{,}7022 + 3\,(2{,}998.92 \times 33{,}3710 - 35)$$
$$= 875{,}56 + 300{,}23 - 105 = 1070{,}79.$$

Beim Verzicht auf die Rückgewähr des ganzen Kapitals wird die Rente

$$6 \times 9{,}293.39 \times 15{,}7022 + 6\,(2{,}998.92 \times 33{,}3710 - 35)$$
$$= 875{,}56 + 600{,}46 - 210 = 1266{,}02.$$

Wird der Verzicht auf die Rückgewähr gleichzeitig mit der Erklärung zum Rentenbezug nach dem 15. April 1936 ausgesprochen, so ergibt sich die Rente, wenn der Verzicht auf Rückgewähr im Todesfall des halben Kapitals erklärt wird,

$$6\left(9{,}293.39 + \frac{1}{2}\,4{,}746.30\right) 15{,}7022 - 3 \times 35$$
$$= 875{,}56 + 223{,}58 - 105 = 994{,}14,$$

wenn der Verzicht auf Rückgewähr im Todesfall des ganzen Kapitals erklärt wird,

$$6\,(9{,}293.39 + 4{,}746.30)\,15{,}7022 - 6 \times 35$$
$$= 875{,}56 + 447{,}16 - 210 = 1112{,}72.$$

Will der Versicherte während einer bestimmten Anzahl von Jahren jederzeit über sein Kapital frei verfügen, so kann er dasselbe in einer Sparkasse anlegen. Werden später die Zinsen und eventuell ein Teil des Kapitals in Renten umgewandelt, so sind diese Renten kleiner, als wenn das Kapital von Anfang an in einer Rentenanstalt angelegt worden wäre. Um dies zu zeigen, stellen wir die folgende Rechnung an: Die Summe von Fr. 6000, im Alter von 30 Jahren in eine $3^1/_2$ % Sparkasse eingelegt, ergibt nach 25 Jahren im Alter 55, inkl. Zinseszinsen, ein Kapital von Fr. 14 179,27. Wird in diesem Zeitpunkt das eingelegte Kapital von Fr. 6000 zurückgezogen und der Rest von Fr. 8179,47 als Einlage für eine sofort beginnende Leibrente des nun 55 Jahre alten Versicherten benutzt, so ergibt sich daraus eine Rente von

$$\frac{8179,47}{13,4179} = \text{Fr. } 609,60.$$

Werden nur Fr. 3000 Kapital zurückgezogen, so ist die Rente

$$\frac{11179,47}{13,4179} = \text{Fr. } 833,18,$$

und wenn das ganze angesammelte Kapital als Renteneinlage verwendet wird, so ergibt sich eine Rente von

$$\frac{14179,47}{13,4179} = \text{Fr. } 1056,76.$$

Hierzu kommen noch die jährlichen Zinsen des zurückgezogenen Kapitals, so dass der Versicherte eine gesamte Rente bezieht von

$$\text{Fr. } 609,60 + 210 = \text{Fr. } 819,60,$$

wenn er Fr. 6000 Kapital zurückgezogen hat, von

$$\text{Fr. } 833{,}18 + 105 = \text{Fr. } 938{,}18,$$

wenn Fr. 3000 Kapital zurückgezogen wurden, und von

$$\text{Fr. } 1056{,}76 + 0 = \text{Fr. } 1056{,}76,$$

wenn kein Rückzug stattgefunden hat. Diese Renten sind um Fr. 55,96 kleiner als die Renten von Fr. 875,56, resp. Fr. 994,14, resp. Fr. 1112,72, welche sich ergeben, wenn der Betrag von Fr. 6000 im Alter 30 als Einlage für eine Altersrente auf unbestimmte Zeit, mit Rückgewähr des Kapitals im Todesfall verwendet und im Alter 55 der Verzicht auf die Rückgewähr von Fr. 0, resp. Fr. 3000, resp. Fr. 6000 erklärt wird.

2. Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages.

Das Deckungskapital und der Rentenübertrag bestimmen sich vor dem Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall von einem Teil des Kapitals nach den im Abschnitt II, 2 aufgestellten Regeln.

a) Der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall findet vor der Erklärung zum Rentenbezug statt.

Nach dem Verzicht auf die Rückgewähr von einem Teil des Kapitals haben wir zur Zeit der Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages zu unterscheiden, ob die Erklärung zum Rentenbezug noch nicht abgegeben wurde, oder ob der Rentenbezug bereits begonnen habe.

Vor der Erklärung zum Rentenbezug erhalten wir die versicherte Rente s Jahre nach dem Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals k im Todesfall aus

Gleichung (71), indem wir dort für $n = t + s$ einsetzen und von dem erhaltenen Betrag die Zinsen des Kapitals abziehen, für welches der Verzicht auf die Rückgewähr nicht erklärt wurde. Die versicherte Rente ist somit

$$(84) \qquad [\alpha_x + k(\beta_{x+t} - \alpha_{x+t})]\, \gamma_{x+t+s} - (1-k)\, i$$
$$= {}_{t+s/}(r)_x + k\left({}_{s/}r_{x+t} - {}_{s/}(r)_{x+t}\right) - (1-k)\, i.$$

Während dem Rentenbezug ist die versicherte Rente

$$(85) \qquad [\alpha_x + k(\beta_{x+t} - \alpha_{x+t})]\, \gamma_{x+n} - (1-k)\, i$$
$$= {}_{n/}(r)_x + k\left({}_{n-t/}r_{x+t} - {}_{n-t/}(r)_{x+t}\right) - (1-k)\, i.$$

Die versicherte Rente wird somit erhalten, indem wir die Grundzahl A für das Eintrittsalter x um die $k$fache Differenz der Grundzahlen B und A für das Alter an dem Jahrestag der Einlage vermehren, welcher der Erklärung zum Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall vorangeht, die Summe mit der Grundzahl C für das Alter an dem der Berechnung, resp. dem ersten Bezugstag der Rente nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage und nachher mit dem tausendsten Teil der Einlage multiplizieren. Das Produkt ist zu vermindern um die Zinsen für den Teil des Kapitals, für welchen der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall nicht ausgesprochen wurde. Das Deckungskapital und der Rentenübertrag sind entsprechend diesen versicherten Renten wie für eine einfache Leibrente einzusetzen. Dabei gilt als Eintrittsalter das Alter an dem der Berechnung des Deckungskapitals, resp. dem ersten Bezugstag der Rente nächst vorangehenden Jahrestag der Einlage.

Ist $k = 1$, so ergibt sich die versicherte Rente vor dem Rentenbezug, für welche das Deckungskapital und der Rentenübertrag einzusetzen sind zu

$$(86) \qquad (\alpha_x + \beta_{x+t} - \alpha_{x+t})\, \gamma_{x+t+s}.$$

Wenn die Erklärungen zum Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals k im Todesfall und zum Rentenbezug gleichzeitig abgegeben werden, so ist, da $t = n$ und $s = 0$, die versicherte Rente

$$(87) \qquad [\alpha_x + k\,(\beta_{x+n} - \alpha_{x+n})]\, \gamma_{x+n} - (1 - k)\, i$$
$$= (\alpha_x + k\,\beta_{x+n})\, \gamma_{x+n} - i = {}_{n/}(r)_x + \frac{k}{a''_{x+n}} - i.$$

b) Der Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall findet nach der Erklärung zum Rentenbezug statt.

Findet der Verzicht auf die Rückgewähr von einem Teil des Kapitals während dem Rentenbezug statt, so erhalten wir die versicherte Rente aus Gleichung (80) durch Kürzung um die Zinsen $(1 - k)\, i$ zu

$$(88) \qquad \alpha_x\, \gamma_{x+n} + k\,(\beta_{x+t}\, \gamma_{x+t} - i) - (1 - k)\, i$$
$$= {}_{n/}(r)_x + \frac{k}{a''_{x+t}} - i.$$

Für diese Rente sind das Deckungskapital und der Rentenübertrag für alle folgenden Jahre nach der Verzichterklärung einzusetzen, sofern nicht ein neuer Verzicht auf Rückgewähr für einen weiteren Teil des Kapitals erklärt wird.

3. Berechnung der Reserve für die Kapitaleinlage.

Diese Reserve ist vor der Verzichterklärung auf die Rückgewähr von einem Teil des Kapitals für das gesamte Kapital, nach der Verzichterklärung für den dadurch nicht berührten Teil des Kapitals entsprechend den im Abschnitt II, 3 gegebenen Regeln einzustellen.

V. Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit mit Rückgewähr des Kapitals im Todesfall und mit Verzicht während dem Rentenbezug auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall, abzüglich den vom Zeitpunkt der Erklärung zum Verzicht auf die Rückgewähr an bezogenen Renten.

Nachdem der Versicherte den Beginn des Rentenbezuges n Jahre nach dem Eintritt festgesetzt hat, erhält er der Einlage 1 entsprechend die jährliche Rente ${}_{n/}(r)_x$. Diese bezieht er t Jahre lang. Alsdann entschliesst er sich zum Verzicht auf die Rückgewähr des eingelegten Kapitals im Todesfall abzüglich den von diesem Zeitpunkt an zu beziehenden Renten. Durch den Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den zu beziehenden Renten wird jedesmal, wenn eine Rente erhoben worden ist, der Verzicht auf Rückgewähr von dem dieser Rente entsprechenden Teil des Kapitals ausgesprochen. Dadurch erhöht sich die Rente nach jedem Bezuge, und zwar so lange, bis der Verzicht auf Rückgewähr sich auf das ganze Kapital bezieht. Von diesem Zeitpunkt

an bleibt die Rente konstant. Die Erhöhung der Renten erhalten wir durch die folgende Berechnung:

Wir nehmen an, die Erklärung für den Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten finde nach dem Bezuge von t Renten im $(n+t+1)$. Versicherungsjahre statt, mit Wirkung vom Ende dieses Jahres an. Beim Bezug der nächsten Rente ${}_{n/}(r)_x$ im Alter $x+n+t+1$ verzichtet der Versicherte gemäss seiner Erklärung auf die Rückgewähr im Todesfall von dem der Rente ${}_{n/}(r)_x$ entsprechenden Teil des Kapitals. Infolgedessen erhöht sich die Rente des folgenden Jahres nach Gleichung (79) um

$$(89) \quad {}_{n/}(r)_x \left(\frac{1}{a''_{x+n+t+1}} - i\right) = a_x \gamma_{x+n} \left(\frac{1}{a''_{x+n+t+1}} - i\right),$$

so dass die nach $n+t+1$ Jahren, im Alter $x+n+t+2$ zu beziehende Rente gleich ist

$$(90) \quad {}_{n/}(r)_x + {}_{n/}(r)_x \left(\frac{1}{a''_{x+n+t+1}} - i\right)$$

$$= {}_{n/}(r)_x \left(1 - i + \frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right) = a_x \gamma_{x+n} \left(1 - i + \frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right).$$

Im Alter $x+n+t+2$ wird gemäss der früheren Erklärung wieder der Verzicht auf die Rückgewähr von dem der Rente nach Gleichung (90) entsprechenden Teil des Kapitals festgesetzt. Dadurch erhöht sich die Rente des folgenden Jahres um

$$(91) \quad a_x \gamma_{x+n} \left(1 - i + \frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right) \left(\frac{1}{a''_{x+n+t+2}} - i\right).$$

Die nach $n+t+2$ Jahren, im Alter $x+n+t+3$ zu beziehende Rente beträgt alsdann

$$(92) \qquad a_x\,\gamma_{x+n}\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right)$$

$$+\,a_x\,\gamma_{x+n}\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right)\left(\frac{1}{a''_{x+n+t+2}}-i\right)$$

$$=\,a_x\,\gamma_{x+n}\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right)\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+2}}\right).$$

Im Alter $x+n+t+3$ erfolgt beim Bezug dieser Rente der Verzicht auf Rückgewähr für den derselben entsprechenden Teil des Kapitals, so dass die Rente nach $n+t+3$ Jahren, im Alter $x+n+t+4$ gleich wird

$$(93) \quad a_x\,\gamma_{x+n}\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right)\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+2}}\right)$$

$$\cdot\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+3}}\right)$$

usw. Beim Bezug jeder später fällig werdenden Rente erhöht sich durch den Verzicht auf die Rückgewähr von dem dieser Rente entsprechenden Teil des Kapitals die nächst folgende Rente um einen bestimmten Betrag.

Nach $n+t+s$ Jahren, im Alter $x+n+t+s+1$ ist die Rente angewachsen auf

$$(94) \quad a_x\,\gamma_{x+n}\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+1}}\right)\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+2}}\right)$$

$$\cdot\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+3}}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-i+\frac{1}{a''_{x+n+t+s}}\right).$$

Setzen wir hier

$$(95)\quad \varepsilon_x = \left(1 - i + \frac{1}{a''_0}\right)\left(1 - i + \frac{1}{a''_1}\right)\left(1 - i + \frac{1}{a''_2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 - i + \frac{1}{a''_x}\right),$$

so wird die Rente nach $n + t + s$ Jahren, vom Alter $x + n + t + s + 1$ an, welche mit ${}_{s/t/n/}(r)_x$ bezeichnet sei, gleich

$$(96)\qquad {}_{s/t/n/}(r)_x = a_x\, \gamma_{x+n}\, \frac{\varepsilon_{x+n+t+s}}{\varepsilon_{x+n+t}}.$$

Führen wir hier die weitere Hülfszahl ein

$$(97)\qquad \frac{1}{\varepsilon_x} = \delta_x,$$

so wird die Rente auch gleich

$$(98)\qquad {}_{s/t/n/}(r)_x = a_x\, \gamma_{x+n}\, \delta_{x+n+t}\, \varepsilon_{x+n+t+s}.$$

Die Zahlen δ_x und ε_x werden im Prospekt als die Grundzahlen D und E aufgeführt. Die Rente, welche nach $n + t + s$ Jahren im Alter $x + n + t + s + 1$ ausbezahlt werden kann, wird deshalb erhalten, indem wir die dem Eintrittsalter x entsprechende Grundzahl A multiplizieren mit der Grundzahl C entsprechend dem Alter des Versicherten an dem Jahrestag der Einlage, welcher der Erklärung zum Rentenbezug zunächst vorangeht. Dieses Produkt ist zu vervielfachen mit der Grundzahl D für das Alter an dem Jahrestag der Einlage, welcher der Erklärung zum Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals abzüglich den bezogenen Renten zunächst vorausgeht; hernach ist dieses Produkt zu multiplizieren mit der Grundzahl E entsprechend dem

Alter des Versicherten an dem Jahrestag der Einlage, welcher dem Rentenbezugstag vorangeht. Die so erhaltene Zahl ist noch mit dem tausendsten Teil der Einlage zu vervielfachen.

Wenn der Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten gleichzeitig mit der Erklärung zum Rentenbezug erfolgt, so ist, für $t = 0$, die Rente nach s Jahren

$$(99) \qquad {}_{s/0/n/}(r)_x = a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n} \varepsilon_{x+n+s}.$$

Die erste Rente im Alter $x + n + 1$ wird, da $s = 0$ zu setzen ist,

$$(100) \qquad {}_{0/0/n/}(r)_x = a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n} \varepsilon_{x+n} = a_x \gamma_{x+n} = {}_{n/}(r)_x.$$

Wird die Erklärung zum Rentenbezug und der Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten gleichzeitig mit der Einlage ausgesprochen, so ist die Rente nach s Jahren

$$(101) \qquad {}_{s/0/0/}(r)_x = a_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_{x+s} = i \delta_x \varepsilon_{x+s},$$

und die erste Rente im Alter $x + 1$ ist in diesem Falle

$$(102) \qquad {}_{0/0/0/}(r)_x = i.$$

Die Zunahme der Rente hört auf, sobald die Summe der von der Erklärung zum Verzicht auf die Rückgewähr an bezogenen Renten gleich dem eingelegten Kapital ist. Um diesen Zeitpunkt festsetzen zu können, bilden wir die Summe der während s' Jahren fällig werdenden Renten; diese ist

$$(103) \qquad a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n+t} (\varepsilon_{x+n+t} + \varepsilon_{x+n+t+1} + \varepsilon_{x+n+t+2} + \cdots\cdots + \varepsilon_{x+n+t+s'-1}).$$

Hierbei ist s' so zu wählen, dass die Summe der Renten für $s'-1$ kleiner, für s' grösser als die Kapitaleinlage ist. Vom Kapital bleibt nach Abzug der im Ausdruck (103) gegebenen Rentensumme noch übrig

$$(104)\quad {}_{s'/}u = 1 - a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n+t} (\varepsilon_{x+n+t} + \varepsilon_{x+n+t+1} + \varepsilon_{x+n+t+2} + \cdots\cdots + \varepsilon_{x+n+t+s'-1}).$$

Für diesen Rest des Kapitals erfolgt der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall im Alter $x+n+t+s'$, so dass die vom Alter $x+n+t+s'+1$ an zu beziehende Rente gleich ist

$$(105)\quad a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n+t} \varepsilon_{x+n+t+s'-1} + {}_{s'/}u \left(\frac{1}{a''_{x+n+t+s'}} - i\right).$$

Für die folgenden Jahre bleibt die Rente konstant.

Wenn der Versicherte die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten nur für einen Teil des Kapitals erklärt, während er für den Rest die Rückgewähr im Todesfall beizubehalten wünscht, so muss die Versicherung in zwei Teile zerlegt werden. Der erste Teil bezieht sich auf das Kapital, für welches die Rückgewähr der Einlagen im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten erklärt wurde, während der zweite Teil das im Todesfall zurückzugewährende Kapital betrifft.

Beispiel. Wir nehmen an, ein 30 Jahre alter Versicherter lege am 15. April 1911 die Summe von Fr. 6000 ein zur Erwerbung einer Leibrente auf unbestimmte Verfallzeit, zunächst mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Nach Ablauf von 20 Jahren erklärt er den Bezug der Rente, welche

$$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 = \text{Fr. } 621{,}94$$

beträgt und im Alter 51 zum erstenmal zur Auszahlung gelangt. Die Rente bezieht er 5 Jahre lang. Nachher entschliesst er sich, um eine grössere Rente zu erhalten, zum Verzicht auf die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten. Die Rente des Alters 56 mit 621,94 ist die erste Rente, auf welche sich der Verzicht auf Rückgewähr im Todesfall bezieht; die späteren Renten ergeben sich durch die folgende Rechnung (siehe S. 75).

Die Renten nach 25 bis 32 Jahren sind direkt nach der Formel (98) berechnet. Die Summe derselben ist Fr. 5870,96, so dass von der geleisteten Einlage noch Fr. 129,04 übrig bleiben, für welche der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall im Alter 63 erfolgt. Daraus ergibt sich eine Erhöhung der Rente um Fr. 7,92, welche zu der Rente des Vorjahres hinzugefügt eine Gesamtrente von Fr. 878,95 ergibt. Da sich hiermit der Verzicht auf die Rückgewähr im Todesfall auf das gesamte Kapital bezieht, so findet eine weitere Zunahme der Rente nicht mehr statt. Es ist somit die Rente der folgenden Jahre konstant gleich Fr. 878,95.

2. Berechnung des Deckungskapitals und des Rentenübertrages.

Vor der Erklärung zur Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten berechnen sich das Deckungskapital und der Rentenübertrag nach den im Abschnitt II, 2 gegebenen Formeln.

a) Während den Rückgewährsjahren.

Nachdem sich der Versicherte für die Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten ausgesprochen hat, findet sich die Rente während

Es ist die Rente vom Eintritt an gerechnet:

nach	25	Jahren	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}353.68 =$	Fr.	621,94	zahlbar	im	Alter	56
„	26	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}451.70 =$	„	647,84	„	„	„	57
„	27	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}559.36 =$	„	676,29	„	„	„	58
„	28	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}677.95 =$	„	707,63	„	„	„	59
„	29	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}808.99 =$	„	742,25	„	„	„	60
„	30	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 2{,}954.26 =$	„	780,64	„	„	„	61
„	31	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 3{,}115.87 =$	„	823,34	„	„	„	62
„	32	„	$6 \times 9{,}293.39 \times 11{,}1538 \times 0{,}424.867 \times 3{,}296.32 =$	„	871,03	„	„	„	63
			Summa	Fr.	5870,96				

nach 33 Jahren $871{,}03 + 129{,}04 \left(\frac{1}{a''_{63}} - i \right) = 871{,}03 + 7{,}92 =$ Fr. 878,95 zahlbar im Alter 64.

den Rückgewährsjahren nach Formel (98). In dieser Rente sind noch die Zinsen des Kapitals enthalten, auf welches sich der Verzicht auf Rückgewähr im Todesfall im Betrag der seit der Erklärung bezogenen Renten nicht bezieht. Nach $n + t$ Jahren wird die Erklärung zur Rückgewähr des Kapitals im Todesfall abzüglich den bezogenen Renten abgegeben, mit Wirkung vom $n + t + 1$. Jahre an, so dass die Rückgewähr nach $n + t$ Jahren sich auf das volle eingelegte Kapital bezieht. Nach $n + t + s$ Jahren ergibt sich das im Todesfall zurückzugewährende Kapital aus Gleichung (104), indem wir dort s' durch s ersetzen, zu

$$(106) \quad {}_{s/}u = 1 - a_x \gamma_{x+n} \delta_{x+n+t} (\varepsilon_{x+n+t} + \varepsilon_{x+n+t+1} + \varepsilon_{x+n+t+2} + \cdots\cdots + \varepsilon_{x+n+t+s-1}).$$

Die versicherte Rente, für welche das Deckungskapital und der Rentenübertrag einzusetzen ist, ergibt sich demnach nach $n + t + s$ Jahren zu

$$(107) \quad {}_{s/t/n/}(r)_x - i \cdot {}_{s/}u,$$

wobei $1 \leqq s \leqq s'$ ist.

b) Nach den Rückgewährsjahren.

Die Rückgewähr ist nach $n + t + s' + 1$ und mehr Jahren gleich 0, somit ist das Deckungskapital und der Rentenübertrag entsprechend der aus der Formel (105) sich ergebenden Rente einzusetzen.

3. Berechnung der Reserve für die geleistete Kapitaleinlage.

Die Reserve für die geleistete Kapitaleinlage ist vor der Erklärung zur Rückgewähr der Einlage abzüglich den bezogenen Renten nach den Formeln im Abschnitt II, 3 einzusetzen.

a) Während den Rückgewährsjahren.

Solange im Todesfall eine Rückgewähr zu leisten ist, berechnet sich die Reserve am 31. Dezember für den nach Gleichung (106) zu ermittelnden Restbetrag des Kapitals.

b) Nach den Rückgewährsjahren.

Nach Ablauf der Rückgewährsjahre ist im Todesfall eine Rückzahlung von einem Teil des Kapitals nicht mehr zu leisten, so dass die Reserve gleich 0 einzusetzen ist.

Zürich, im Mai 1911.

Eintritts-alter	Bruttoeinlage für 1 Fr. Rente a''_x	Grundzahl A	Grundzahl B	Grundzahl C	Grundzahl D	Grundzahl E
0	22,8333	33,531.5	41,958.1	1,043.80	0,991.281	1,008.80
1	23,4329	32,159.1	39,211.1	1,088.34	0,983.731	1,016.54
2	23,8560	30,865.3	36,966.2	1,133.96	0,976.972	1,023.57
3	24,1343	29,637.2	35,086.1	1,180.95	0,970.726	1,030.16
4	24,2961	28,465.6	33,474.7	1,229.55	0,964.784	1,036.50
5	24,3660	27,343.4	32,062.8	1,280.01	0,958.991	1,042.76
6	24,3647	26,265.4	30,800.3	1,332.55	0,953.230	1,049.06
7	24,3094	25,227.7	29,650.7	1,387.37	0,947.416	1,055.50
8	24,2144	24,227.1	28,586.4	1,444.66	0,941.487	1,062.15
9	24,0910	23,261.6	27,587.7	1,504.63	0,935.398	1,069.06
10	23,9488	22,329.2	26,639.2	1,567.46	0,929.122	1,076.29
11	23,7950	21,428.6	25,730.1	1,633.33	0,922.639	1,083.85
12	23,6358	20,558.8	24,851.9	1,702.43	0,915.945	1,091.77
13	23,4756	19,718.8	23,999.2	1,774.95	0,909.039	1,100.06
14	23,3177	18,908.0	23,168.1	1,851.07	0,901.926	1,108.74
15	23,1644	18,125.5	22,356.3	1,930.98	0,894.617	1,117.80
16	23,0169	17,370.8	21,562.8	2,014.88	0,887.125	1,127.24
17	22,8753	16,643.2	20,787.5	2,102.96	0,879.460	1,137.06
18	22,7387	15,942.1	20,031.5	2,195.44	0,871.634	1,147.27
19	22,6056	15,266.8	19,295.8	2,292.56	0,863.657	1,157.87
20	22,4734	14,616.4	18,582.5	2,394.57	0,855.532	1,168.86
21	22,3391	13,990.1	17,893.2	2,501.76	0,847.259	1,180.28
22	22,1996	13,387.1	17,229.5	2,614.46	0,838.832	1,192.13
23	22,0517	12,806.4	16,592.6	2,733.02	0,830.241	1,204.47
24	21,8931	12,247.0	15,982.8	2,857.85	0,821.470	1,217.33
25	21,7231	11,708.0	15,399.0	2,989.41	0,812.505	1,230.76

26	21,5420	11,188.6	14,839.6	3,128.18	0,803.330	1,244.82
27	21,3549	10,688.1	14,300.0	3,274.67	0,793.940	1,259.54
28	21,1617	10,205.8	13,779.4	3,429.41	0,784.328	1,274.98
29	20,9622	9,741.13	13,277.1	3,593.01	0,774.488	1,291.18
30	20,7563	9,293.39	12,792.5	3,766.12	0,764.415	1,308.19
31	20,5440	8,862.02	12,324.8	3,949.44	0,754.101	1,326.08
32	20,3250	8,446.45	11,873.4	4,143.75	0,743.543	1,344.91
33	20,0993	8,046.13	12,437.7	4,349.92	0,732.733	1,364.75
34	19,8669	7,660.54	11,016.9	4,568.87	0,721.666	1,385.68
35	19,6275	7,289.16	10,610.7	4,801.65	0,710.337	1,407.78
36	19,3813	6,931.52	10,218.3	5,049.39	0,698.741	1,431.15
37	19,1280	6,587.15	9,839.21	5,313.37	0,686.872	1,455.88
38	18,8677	6,255.60	9,472.88	5,594.99	0,674.726	1,482.08
39	18,6004	5,936.44	9,118.77	5,895.78	0,662.300	1,509.89
40	18,3260	5,629.27	8,776.40	6,217.50	0,649.589	1,539.43
41	18,0445	5,333.69	8,445.29	6,562.07	0,636.591	1,570.87
42	17,7560	5,049.31	8,124.92	6,931.64	0,623.303	1,604.36
43	17,4605	4,775.79	7,814.85	7,328.62	0,609.723	1,640.09
44	17,1581	4,512.78	7,514.62	7,755.75	0,595.851	1,678.27
45	16,8488	4,259.95	7,223.83	8,216.06	0,581.686	1,719.14
46	16,5328	4,016.98	6,942.01	8,713.02	0,567.230	1,762.95
47	16,2102	3,783.57	6,668.77	9,250.52	0,552.484	1,810.01
48	15,8812	3,559.44	6,403.69	9,833.00	0,537.453	1,860.63
49	15,5460	3,344.32	6,146.40	10,465.5	0,522.141	1,915.19
50	15,2046	3,137.94	5,896.59	11,153.8	0,506.555	1,974.12
51	14,8576	2,940.05	5,653.78	11,904.5	0,490.702	2,037.90
52	14,5052	2,750.44	5,417.64	12,725.2	0,474.594	2,107.06
53	14,1474	2,568.86	5,187.95	13,624.7	0,458.242	2,182.25
54	13,7849	2,395.11	4,964.25	14,613.1	0,441.661	2,264.18
55	13,4179	2,228.99	8,746.30	15,702.2	0,424.867	2,353.68

Eintritts-alter	Bruttoeinlage für 1 Fr. Rente a''_x	Grundzahl A	Grundzahl B	Grundzahl C	Grundzahl D	Grundzahl E
56	13,0470	2,070.31	4,533.74	16,905.7	0,407.880	2,451.70
57	12,6723	1,918.89	4,326.39	18,239.8	0,390.723	2,559.36
58	12,2946	1,774.55	4,123.88	19,723.3	0,373.420	2,677.95
59	11,9143	1,637.14	3,925.99	21,378.7	0,356.000	2,808.99
60	11,5318	1,506.50	3,732.54	23,232.6	0.338.494	2,954.26
61	11,1478	1,382.49	3,543.27	25,316.7	0,320.937	3,115.87
62	10,7628	1,264.96	3,358.01	27,668.9	0,303.368	3,296.32
63	10,3775	1,153.78	3,176.59	30,335.2	0,285.829	3,498.59
64	9,9923	1,048.81	2,998.92	33,371.0	0,268.365	3,726.27
65	9,6081	0,949.944	2,824.83	36,844.3	0,251.024	3,983.68
66	9,2408	0,857.184	2,650.31	40,831.4	0,233.899	4,275.34
67	8,9095	0,770.683	2,471.46	45,414.3	0,217.128	4,605.57
68	8,6067	0,690.459	2,292.10	50,690.9	0,200.824	4,979.49
69	8,3287	0,616.445	2,114.70	56,777.2	0,185.080	5,403.08
70	8,0786	0,548.544	1,940.02	63,805.3	0,169.988	5,882.78
71	7,8489	0,486.554	1,771.14	71,934.5	0,155.608	6,426.39
72	7,6430	0,430.259	1,608,42	81,346.3	0,141.999	7,042.29
73	7,4567	0,379.381	1,453.65	92,255.5	0,129.195	7,740.23
74	7,2866	0,333.599	1,308.07	104,916	0,117.212	8,531.58
75	7,1353	0,292.592	1,171.61	119,620	0,106.060	9,428.66
76	6,9995	0,256.016	1,045.04	136,710	0,095.733.1	10,445.7
77	6,8751	0,223.507	0,928.845	156,595	0,086.210.9	11,599.5
78	6,7656	0,194.725	0,822.332	179,741	0,077.471.6	12,908.0
79	6,6707	0,169.339	0,725.301	206,686	0,069.486.9	14,391.2
80	6,5835	0,147.009	0,637.999	238,080	0,062.214.4	16,073.5