Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1902)**

Heft 1519-1550

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2} y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \quad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4} v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$J = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $J = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $J = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $J =$ pos. für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm\frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm\frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm m = \pm c$.

Bedingungen: 1. $s + m \geqq b\sqrt{2}$,

2. $m - s \lessgtr \pm \frac{b}{2}$.

Sie Summe $s + m$ ist ein Minimum beim rechtwinkligen Dreieck, und da ist $s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. $m - s$ erreicht den Maximalwert $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen Dreieck und nimmt mit wachsendem h_b stetig ab. So lange das Dreieck noch stumpfwinklig ist, bleibt $m - s$ noch positiv. $m - s$ wird zu 0 beim rechtwinkligen und negativ beim spitzwinkligen Dreieck und kann hier dann jeden Wert von 0 bis $-\infty$ annehmen.

§ 21. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. III, Fig. 12.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Nun tragen wir auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken QH und QH_1 jede nach beiden Seiten ab, machen also

$$OP_1 = OP_3 = QH \text{ und}$$
$$OP_2 = OP_4 = QH_1.$$

Für die Punkte P_1 und P_3 gilt die Relation:

1. $OQ + OP_{1,3} = OQ + HQ = OH = c$, während die Punkte P_2 und P_4 die Bedingung erfüllen: 2. $OP_{2,4} - OQ = QH_1 - QO = OH_1 = c$. Dreht sich der Strahl OQ um O, so beschreiben die Punkte P_1 und P_4 eine Kurve und die Punkte P_3 und P_2 das Spiegelbild derselben in Bezug auf die y-Axe. Die Schnittpunkte beider Kurven mit der Mittelsenkrechten ergeben die zunächst gesuchten Punkte B; denn für einen solchen Kurvenpunkt P ist $OP = OB = s$ und $OQ = OD = m$, und die oben stehenden Relationen werden

$m + s = c$ oder $s - m = c$. Wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten Koordinatensystem; dann gilt:

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2 = H_1Q = OQ + OH = b\cos\varphi + c$, sub. in (α)

$$b\cos\varphi + c = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die Punkte dieser Kurve genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Für die Relation: $s + m = c$ bekommt die Gleichung die etwas abweichende Form

$$(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (2)$$

Die Kurven (1) und (2) sind symmetrisch zueinander gelegen in Bezug auf die y-Axe. Die Gleichung der Kurve, die alle Schnittpunkte B liefert, ist die unächte Kurve 8. Ordnung:

$$[(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2)]\,[(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(y^2 + x^2)] = 0. \qquad (3)$$

Unser symmetrisches Kurvenpaar besteht aus 2 *Kreiskonchoiden.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Bei positivem bx liegt die Kurve mehr auf der negativen Seite, bei negativem bx mehr auf der positiven Seite der x-Axe. Ist $c \gtreqless b$, so ist für beide Konchoiden der Punkt O isolierter Punkt, Rückkehrpunkt oder Doppelpunkt. Für $c = 0$ zerfällt jede Konchoide in 2 sich deckende Kreise. Die beiden Kreispaare berühren sich in O und haben in der y-Axe eine gemeinsame Tangente.

c) Die Lösungen.

Wir suchen zunächst die Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Dabei handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Ordinaten dieser Punkte. Lösen wir das bekannte Gleichungssystem nach y auf, so finden wir

$$1.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{pos.} \qquad (4)$$

und

$$2.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{neg.} \qquad (5)$$

Wir bekommen hier 2 gesonderte Lösungsgruppen.

Erste Gruppe für Formel (4).

$$A.\quad c > \frac{3b}{2}.$$

2 reelle Wurzeln für y für das positive Zeichen der innern Wurzel; 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke.

$$B.\quad \frac{3b}{2} \geqq c \geqq b\sqrt{2}.$$

4 reelle Wurzeln für y, welche paarweise absolut gleich sind; 4 wirkliche Dreiecke, welche paarweise symmetrisch sind.

$$1.\quad c = \frac{3b}{2}.$$

$$y_{1,2} = \pm\frac{b}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad y_{3,4} = 0.$$

2 gleichseitige Dreiecke, bedingt durch das positive Zeichen der innern Wurzel und 2 unendlich kleine, bedingt durch das negative Zeichen der innern Wurzel.

$$2.\quad \frac{3b}{2} > c > b\sqrt{2};$$ Fig. 12, Taf. III, Kurve II.

Das positive Zeichen der innern Wurzel erzeugt 2 spitzwinklige, das negative Zeichen 2 stumpfwinklige Dreiecke. Mit abnehmendem c werden die spitzwinkligen immer weniger spitzwinklig und die stumpfwinkligen weniger stumpfwinklig.

$$3.\quad c = b\sqrt{2};$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \text{ je } 2\text{mal.}$$

Die Kurve berührt von der negativen Seite her die Mittelsenkrechte in den 2 Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. 4 rechtwinklige Dreiecke, welche paarweise sich decken und paarweise symmetrisch sind.

$$C.\quad c < b\sqrt{2}.$$

Alle y-Werte sind imaginär, daher keine reellen Lösungen.

Alle Dreiecke der ersten Lösungsgruppe erfüllen die Bedingung $s + m = c$.

Für den Flächeninhalt derselben bekommen wir die allgemeine Formel:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (6)$$

Zweite Gruppe für Formel (5).

A. $c > \frac{b}{2}$. Fig. 12, Kurve I.

2 reelle Wurzeln für y und 2 imaginäre, letztere für das negative Zeichen der innern Wurzel. 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, deren Basiswinkel $> 60°$.

B. $c \leqq \frac{b}{2}$.

4 reelle Wurzeln für y, daher 4 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind.

1. $c = \frac{b}{2}$, Grenzfall.

Für das positive Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$, bedingt 2 gleichseitige Dreiecke. Für das negative Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm 0$, was 2 unendlich kleine Dreiecke zur Folge hat.

2. $\frac{b}{2} > c > 0$.

2 spitzwinklige Dreiecke für das positive und 2 stumpfwinklige für das negative Vorzeichen der innern Wurzel. Mit abnehmendem c nähern sich beide Formen dem rechtwinkligen Dreieck.

3. $c = 0$.

Die Kurve ist der doppelte gelegte Kreis $x^2 - bx + y^2 = 0$, welcher die Mittelsenkrechte in den Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ schneidet; 4 rechtwinklige Dreiecke wie oben unter B_3.

Sämtliche Dreiecke dieser Gruppe genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Ihre Inhaltsformel lautet:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{2b^2 + c^2}}. \qquad (7)$$

§ 22. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Schnittpunkte D.*

Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 20.

Wir referieren über diesen Fall in gedrängter Kürze.

Analog dem ersten Verfahren erhalten wir als Hilfskurve eine unächte Kurve 8. Ordnung. Dieselbe hat die Form

$$\left[(x^2+y^2)\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]=0. \quad (8)$$

Die Kurve besteht aus 2 *Konchoiden des Nikomedes.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Die Konchoide des Klammerausdrucks links hat die Gerade $x=-\frac{b}{2}$, diejenige des Klammerausdrucks rechts die Gerade $x=\frac{b}{2}$ zur Leitlinie.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D der Konchoiden mit dem Grundkreis. Für die Abscisse x erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$bx\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2=0;\ \text{daraus folgt}$$

$$x=\frac{c^2\pm b^2\pm c\sqrt{c^2\pm 2b^2}}{2b};$$

für das positive Zeichen im Ausdruck $\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2$ wird

$$x=\frac{c^2-b^2\pm c\sqrt{c^2-2b^2}}{2b}. \quad (9)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen entsprechen der Relation:

$$s+m=c.$$

Führen wir den Wert für x aus (9) in der Gleichung des Grundkreises ein, so erhält man für die Ordinate y des Punktes D den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{6b^2c^2-3b^4-2c^4\pm 2c(2b^2\mp c^2)\sqrt{c^2-2b^2}}. \quad (10)$$

Nun besteht die Proportion:

$$y:x=h_b:\frac{b}{2}.$$

Setzen wir hierin für x und y die gefundenen Werte ein und lösen nach h_b auf, so finden wir:

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (11)$$

Für das negative Zeichen im Ausdruck $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$ erlangt die Abscisse x von D den Wert

$$x = \frac{c^2 + b^2 \pm c\sqrt{c^2 + 2b^2}}{2b} \qquad (12)$$

und die Ordinate y den Wert

$$y = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{b^4 - 2b^2c^2 - 2c^4 \mp 2c^3\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (13)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen erfüllen die Bedingung:

$$s - m = \pm c.$$

Für die Basishöhe dieser Dreiecke finden wir auf ähnliche Weise wie oben den Wert

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (14)$$

Vergleichen wir (11) mit (4) und (14) mit (5), so finden wir vollkommene Übereinstimmung in den Ergebnissen beider Auflösungsmethoden.

VIII.

§ 23. *Achte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem der Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $h_s \pm m = \pm c$ = konstant.

Bedingungen: 1. $b\sqrt{2} \gtreqless (h_s + m) \geqq b$;
2. $b \gtreqless (h_s - m) \geqq -b$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $h_s + m = b\sqrt{2}$ = Maximum; denn da ist $h_s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. In diesem Fall ist nun $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right\}$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so ist $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right\}$. Es ist aber bekanntlich $\left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right) > \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right)$.