Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A1,A2,E,E3 enthält und die Fundamentallinien A1A3 und A2A3 in A1 resp. A2 berührt

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1889)**

Heft 1215-1243

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A_1, A_2, E, E_3 enthält und die Fundamentallinien A_1A_3 und A_2A_3 in A_1 resp. A_2 berührt.

Die Gleichung von p lautet:

1. p) $x_3^2 - x_1x_2 = 0$; die Curve p′ ist mit p identisch.

Wir schreiben die Gleichung:

$$1 - \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{und setzen wieder} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda; \text{ diess gibt:}$$

$$1 - \lambda \cdot \frac{x_1}{x_3} = 0, \text{ woraus folgt: } \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für einen Punkt $P\lambda$ auf p ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Da für die Ellipse p (f = 0)

$$f_1 = -x_2, \; f_2 = -x_1, \; f_3 = 2x_3,$$

so hat die Tangente der Ellipse in $P\lambda$ die Gleichung:

2. $t\lambda$) $\lambda^2x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 0$; der ihr correspondirende Kegelschnitt heisst:

3. $t\lambda'$) $\lambda^2x_2x_3 + x_1x_3 - 2\lambda x_1x_2 = 0$.

Aus (2) und (3) folgt: $\lambda = \dfrac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}$ und durch Substitution dieses Werthes in Gl. (2) erhält man:

$$\frac{x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{4x_2^2(x_1^2 - x_3^2)^2} + x_2 - \frac{x_3^2(x_1^2 - x_2^2)}{x_2(x_1^2 - x_3^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

III.) $x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$

Diess ist die Gleichung der im Falle (III) erzeugten Curve sechster Ordnung.

Aus der Erzeugungsweise der C_6 geht zunächst hervor, dass A_1 und A_2, weil auf p gelegen, Spitzen der C_6 werden und für beide ist $x_3 = 0$ Rückkehrtangente; diess bestätiget auch die Rechnung. Für die Schnittpunkte der Curve mit $x_3 = 0$ hat man nämlich

$$4x_1^3x_2^3 = 0, \text{ woraus folgt: } x_1^3 = 0 \text{ und } x_2^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$ hat in A_1 und A_2 mit der C_6 je drei zusammenfallende Punkte gemein. Ferner ergibt die Rechnung, dass das Tangentenpaar in jedem der Doppelpunkte A_1 und A_2 die Gleichung $x_3^2 = 0$ hat, dass also A_1 und A_2 Spitzen der C_6 sein müssen, deren Tangenten mit A_1A_2 zusammenfallen. — Wenn u = 0 die Gleichung (III) bedeutet, so ist

$$u_1 = 4x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - 3x_1^2)$$
$$u_2 = -4x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1(x_3^2 - x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)$$
$$u_3 = 2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2x_3 . (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)$$
$$u_{11} = 4x_3^2(3x_1^2 - x_2^2) + 24x_2x_1(x_2^2 - x_3^2)$$
$$u_{12} = -8x_1x_2x_3^2 - 4(x_3^2 - 3x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)$$
$$u_{13} = 8x_1x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_2x_3(3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)$$
$$u_{22} = -4x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2) - 24x_1x_2(x_3^2 - x_1^2)$$
$$u_{23} = -8x_2x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_1x_3(x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2)$$
$$u_{33} = 2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2).$$

Für den Doppelpunkt A_3 wird $u_{11} = 0$, $u_{12} = 4x_3^4$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 0$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = 0$, daher hat sein Tangentenpaar die Gleichung $x_1 . x_2 = 0$. Der Fundamentalpunkt A_3 ist also ein Knotenpunkt der C_6 und die Tangenten in demselben sind A_2A_3 und A_1A_3; sie sind die respectiven Inversen der Tangenten A_3Q_3 und $A_3Q_3^*$ (Q_3 fällt mit A_1, Q_3^* mit A_2 zusammen), welche von A_3 aus an die Ellipse gehen. (Siehe Fig. 1, Tafel V.) Aus dem Umstande, dass A_3Q_3, $A_3Q_3^*$ die C_6 in Q_3 resp. Q_3^* berühren, folgt, dass die Tangenten im Knoten A_3 Inflexionstangenten sind (vergl. Fall I); diess stimmt mit der Thatsache überein, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Tangenten der C_6 in den Punkten Q_1 und Q_2, welche mit A_3 zusammenfallen, vorstellen. Die folgende Rechnung liefert den einfachsten Nachweis hiefür. Substituirt man in (III) $x_1 = 0$, so kommt $x_3^2 . x_2^4 = 0$, woraus folgt: $x_3^2 = 0$, $x_2^4 = 0$, d. h. $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in A_2 zwei Mal, in A_3 vier Mal.

Ferner ist für $x_2 = 0$: $x_3^2 . x_1^4 = 0$, oder $x_3^2 = 0$ und $x_1^4 = 0$, was besagt, dass $x_2 = 0$ mit der C_6 in A_1 zwei, in A_3 vier Punkte gemein hat.

A_3 ist also ein doppelter Inflexionsknoten.

Die Punkte $E_1 \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ sind Doppelpunkte mit reellen und von einander verschiedenen Tangenten, also Knotenpunkte der C_6. Die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von E_1 resp. E_2 aus an die Ellipse gehenden Tangenten. Die bezüglichen Gleichungen lauten:

Für das Tangentenpaar in E_1:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

und für dasjenige in E_2:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Was die Punkte E_3 (1, 1, — 1) und E (1, 1, 1) betrifft, so sind dieselben zunächst als Doppelpunkte der C_6 anzusehen, weil für diese Punkte u_1, u_2, u_3 verschwinden.

Als Gleichung des Tangentenpaares in E_3 erhält man:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 = 0$$

und diejenige für das Tangentenpaar in E lautet:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0,$$

d. h. die beiden Tangenten der C_6 im Doppelpunkt E_3 fallen zusammen mit der Ellipsentangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ im Punkte E_3 und die Tangenten im Doppelpunkt E sind vereinigt in der zu E gehörigen Ellipsentangente $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.*)

Allein diese Punkte sind nicht etwa Spitzen, wie die nachfolgende Betrachtung zeigt.

Für die Schnittpunkte der C_6 mit der Tangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ ergibt sich, wenn man in der Curvengleichung $x_3 = -\frac{x_1 + x_2}{2}$ setzt:

$$(x_1 - x_2)^4 \,.\, (x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Im Doppelpunkt E_3 hat also die Tangente mit der Curve vier vereinigte Punkte gemein und schneidet sie noch in den zwei Punkten

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -1 + \sqrt{5},\ \frac{x_2}{x_3} = -(1 + \sqrt{5})\right)$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}),\ \frac{x_2}{x_3} = -1 + \sqrt{5}\right).$$

Der Punkt E_3 muss daher ein Berührungsknoten sein, d. h. durch E_3 gehen zwei Aeste der C_6, welche sich in ihm zweipunktig berühren. Die beiden Curvenzweige sind aber nicht reell, denn setzt man im Bereiche des Punktes E_3 $y = x_1 + x_2 + 2x_3$, $z = x_1 - x_2$, wo y und z sehr klein sind, in die Gleichung der C_6 ein, so wird annähernd $16x_3^2y^2 + 8x_3yz^2 + 5z^4 = 0$; diese Gleichung repräsentirt zwei imaginäre Curvenzweige, die einander in E_3 berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente $y = 0$ ist reell. In Uebereinstimmung damit findet man auch, dass die Schnittpunkte der C_6 mit der Geraden $x_1 - kx_2 = 0$ mit Ausnahme der zwei sich in E_3 befindenden imaginär sind, so lange k zwischen 0 und $+\infty$ liegt. Weil die Curve nicht reell durch E_3 hindurch geht, so ist E_3 ein isolirter Punkt der C_6, allein er muss als imaginärer Berührungsknoten angesehen werden. Da im Punkte E_3 zwei Durchschnittspunkte der beiden sich in ihm

*) Die beiden Tangenten in E_3 und E gehen durch den Punkt $\left(\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right)$.

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der C_6 sind A_1, A_2, E_3, E; die C_6 berührt die Ellipse in A_1 und A_2 zweipunktig, in E_3 und E vierpunktig.

Die C_6 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 6, \quad \delta = 7, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 10, \quad \iota = 14, \quad \tau = 21.$$

Wenn die Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$ den festen Kegelschnitt p vorstellt, dann ergibt sich die C_6:

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch A_1, A_2, E_1, E_2 und berührt in A_1, A_2 die respectiven Fundamentallinien A_1A_3, A_2A_3. Die C_6 hat zwei Spitzen in A_1 und A_2, für welche wieder $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten A_3 und die Knotenpunkte E und E_3. Die Punkte E_1 und E_2 sind isolirte Punkte der C_6 und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu E_1 und E_2 gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$) mit E_1 resp. E_2 verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

IV. Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

1. p) . . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0$;

ihm entsprieht alsdann die gerade Linie

2. p′) . . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_λ von p ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : -\lambda a_3.$$