Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik**

Band (Jahr): **2 (1912)**

PDF erstellt am: **13.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# CHAPITRE III

**11.** Soit maintenant une nouvelle *face* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 faces *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur, qui n'est pas en général un vecteur-unité, et que nous écrirons donc $u_4\mathfrak{l}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ des faces fondamentales, $n_1, n_2, n_3$, étant les tenseurs des 3 composantes ;

$$u_4\mathfrak{l} = n_1\mathfrak{l}_1 + n_2\mathfrak{l}_2 + n_3\mathfrak{l}_3$$

En introduisant les *constantes* $\nu_i$, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 faces fondamentales, du vecteur d'une 5me face du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes $\nu_i$, M. Daniëls appelle les valeurs $u_i$, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

Soit maintenant une nouvelle *arête* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 arêtes *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur qui n'est pas en général un vecteur-unité et que nous écrirons donc $x_4\mathfrak{r}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ des arêtes fondamentales, $m_1$, $m_2$ et $m_3$ étant les tenseurs des 3 composantes :

$$x_4\mathfrak{r} = m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 + m_3\mathfrak{r}_3$$

En introduisant les *constantes* $\mu_i$, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 arêtes fondamentales, du vecteur d'une 5me arête du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$x_4\mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3.$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes $\mu_i$, M. Daniëls appelle les valeurs $x_i$, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

*jectives* de la *droite* sphérique correspondante, par rapport au triangle de référence des droites sphériques données $\mathfrak{l}_i$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de la *face-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$

**12.** D'autre part si les longueurs $OH_i$ sont les *segments* qu'intercepte la nouvelle face donnée, déplacée parallèlement à elle-même, sur les axes $\mathfrak{r}_i$ intersections des 3 faces fondamentales (fig. 4), les longueurs $OE_i$ étant les segments correspondants interceptés par une 5me face du cristal prise comme face-unité, les rapports :

$$\frac{OE_1}{OH_1}, \frac{OE_2}{OH_2}, \frac{OE_3}{OH_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 faces fondamentales et à la face-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette face quelconque du cristal.

**13.** Or le vecteur de cette face qui est en coordonnées projectives

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

*jectives* du *point* correspondant sur la sphère, par rapport au triangle de référence des sommets donnés $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de l'*arête-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$

D'autre part, si les longueurs $OK_i$ sont les *coordonnées* cartésiennes obliques de la nouvelle arête donnée par rapport au système d'axes $\mathfrak{r}_i$ coïncidant avec les 3 arêtes fondamentales (fig. 4), les longueurs $OD_i$ étant les coordonnées obliques correspondantes d'une 5me arête du cristal prise comme arête-unité, les rapports :

$$\frac{OK_1}{OD_1}, \frac{OK_2}{OD_2}, \frac{OK_3}{OD_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 arêtes fondamentales et à l'arête-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette arête quelconque du cristal.

Or les coordonnées obliques $OK_i$ de cette arête sont les composantes mêmes de son vecteur

et donne en le multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, d'après les § 2 et 9 : (fig. 4).

$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 = u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1$$
$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 = u_4 \text{ cas } \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2$$
$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 = u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3$$

donne également avec les 3 segments interceptés sur les axes $\mathfrak{r}_i$ :

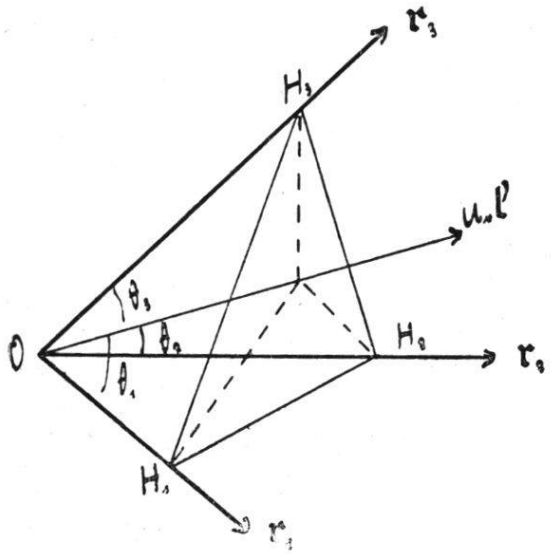


Fig. 4.

$$OH_1 \cos \vartheta_1 = OH_2 \cos \vartheta_2 = OH_3 \cos \vartheta_3$$

ou :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\cos \vartheta_1} : \frac{1}{\cos \vartheta_2} : \frac{1}{\cos \vartheta_3}$$

D'où en comparant les 2 résultats :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\nu_1 u_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 u_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu_3 u_3 \sin h_3}$$

Nous aurions donc aussi pour la face-unité :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \frac{1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu \sin h_3}$$

et enfin pour les indices de notre face quelconque du cristal :

$$\frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = u_1 : u_2 : u_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OE_i}{OH_i} \therefore u_i$

en coordonnées projectives :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

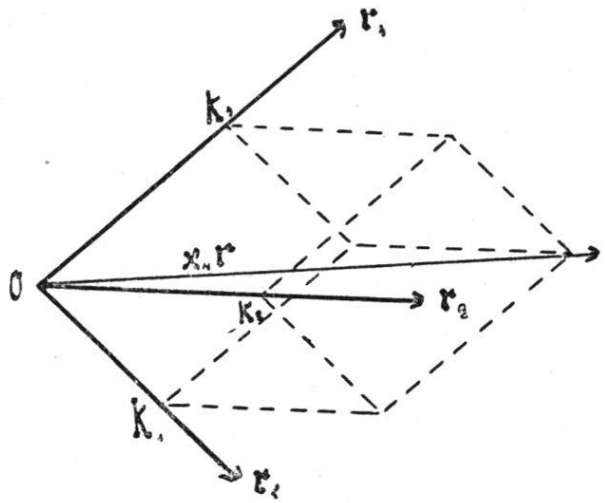


Fig. 4.

et par le fait :

$$OK_1 : OK_2 : OK_3 = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

Nous avons donc aussi pour l'arête-unité :

$$OD_1 : OD_2 : OD_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \qquad (7)$$

et enfin pour les indices de notre arête quelconque du cristal :

$$\frac{OK_1}{OD_1} : \frac{OK_2}{OD_2} : \frac{OK_3}{OD_3} = x_1 : x_2 : x_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OK_i}{OD_i} \therefore x_i$

Donc les constantes $\mu_i$ étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une arête du complexe, les *coordonnées* projectives du point sur

Donc les constantes $\nu_i$ étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une face du complexe, les *coordonnées projectives* de la droite sphérique sont les *indices* de la face correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts, nous appelons les *valeurs* $u_i$ les indices de la face du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

la sphère, sont les *indices* de l'arête correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts nous appelons les *valeurs* $x_i$ les indices de l'arête du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

**14.** Nous avons donc en multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ le vecteur d'une face dont les indices sont $u_i$, (les $\vartheta_i$ étant les angles d'incidence de la face par rapport aux arêtes fondamentales) :

$$\begin{aligned} u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 &= u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1 \\ u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 &= u_4 \cos \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 &= u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\cos \vartheta_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta_3}{\nu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde face dont les indices sont $u'_i$ : =

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \frac{\cos \vartheta'_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta'_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta'_3}{\nu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{u_1}{u'_1} : \frac{u_2}{u'_2} : \frac{u_3}{u'_3} = \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta'_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_2} : \frac{\cos \vartheta_3}{\cos \vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{u_i}{u'_i} \cdot\cdot \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta'_i}$$

Nous avons également en multipliant scalairement par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ le vecteur de l'arête dont les indices sont $x_i$ (les $\vartheta_i$ étant les angles d'incidence de l'arête par rapport aux faces fondamentales) :

$$\begin{aligned} x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_1 &= x_4 \cos \vartheta_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1 \\ x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 &= x_4 \cos \vartheta_2 = \mu_2 x_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_3 &= x_4 \cos \vartheta_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\cos \vartheta_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos h_3}{\mu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde arête dont les indications sont $x'_i$ :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{\cos \vartheta'_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta'_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta'_3}{\mu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{x_1}{x'_1} : \frac{x_2}{x'_2} : \frac{x_3}{x'_3} = \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta'_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_2} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{x_i}{x'_i} \cdot\cdot \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta'_i}$$

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 faces sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence des arêtes $\mathfrak{r}_i$ par rapport à ces faces.

**15.** La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices $u_i$ d'une face quelconque: est *positif* l'indice $u_i$ correspondant à l'*arête* fondamentale située par rapport à la face du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

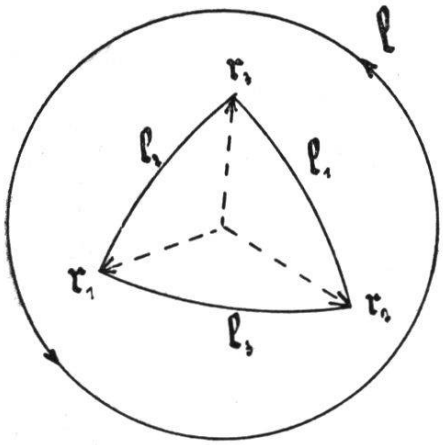

Fig. 5.

(Toute face $\mathfrak{l}$ n'entrant pas dans le trièdre des faces fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

et comme cas particulier: toute face *parallèle* à l'une des arêtes fondamentales a son indice $u_i$ correspondant *nul*.

Toute face tautozonale à l'arête $\mathfrak{r}_1$ par ex. est donc de la forme; $\nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$; son vecteur est en effet coplanaire à $\mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{l}_3$, et d'a-

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 arêtes sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence de ces arêtes par rapport aux faces fondamentales.

La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices $x_i$ d'une arête quelconque: est *positif* l'indice $x_i$ correspondant à la *face* fondamentale par rapport à laquelle l'arête est située du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

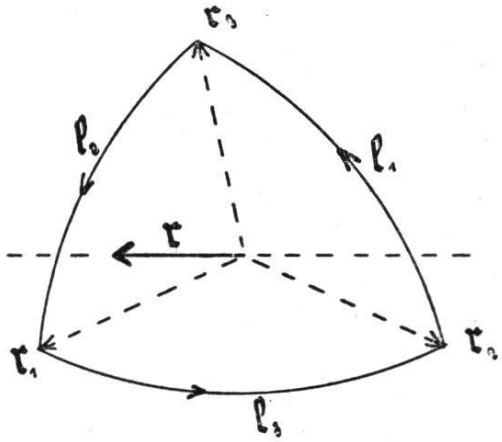

Fig. 5.

(Toute arête $\mathfrak{r}$ passant à l'intérieur du trièdre des arêtes fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

et comme cas particulier: toute arête *parallèle* à l'une des faces fondamentales a son indice $x_i$ correspondant *nul*.

Toute arête coplanaire à la face $\mathfrak{l}_1$ par ex. est donc de la forme: $\mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$; son vecteur est en effet coplanaire aux vecteurs $\mathfrak{r}_2$ et $\mathfrak{r}_3$,

près le § 4, $-\frac{\nu_3 u_3}{\nu_2 u_2}$ est son rapport de position par rapport à ces 2 faces.

et d'après § 4, $-\frac{\mu_3 x_3}{\mu_2 x_2}$ et son rapport de position par rapport à ces 2 arêtes.

**16.** Toute face parallèle à une arête donnée :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

son vecteur devant être normal à cette arête, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . x_1 u_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$

Toute arête parallèle à une face donnée :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

son vecteur devant être normal à celui de la face, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3)(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_2 \mathfrak{r}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . u_1 x_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$

**16**$^{bis.}$ Si l'arête donnée est coplanaire à la face fondamentale $\mathfrak{l}_1$ par ex., son indice $x_1$ étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices $u_i$ qu'elle contient encore, et toute face parallèle à l'arête donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses deux derniers indices $u_2$ et $u_3$. D'une manière générale, pour toutes les faces tautozonales à une arête parallèle à l'une des faces fondamentales, les 2 indices $u_i$ correspondants aux 2 autres faces fondamentales sont *constants*, c'est-à-dires sont les mêmes pour toutes les faces dans le cas d'une *même* arête.

Si la face donnée est tautozonale à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$ par ex., son indice $u_1$ étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices $x_i$ qu'elle contient encore, et toute arête parallèle à la face donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses 2 derniers indices $x_2$ et $x_3$. D'une manière générale, pour toutes les arêtes coplanaires à une face parallèle à l'une des arrêtes fondamentales, les 2 indices $x_i$ correspondants aux 2 autres arêtes fondamentales sont *constants*, c'est-à-dire sont les mêmes pour toutes les arêtes dans le cas d'une *même* face.