Résonances pour l'opérateur de Dirac

Helvetica Physica Acta
Vol. 64 (1991)

0018-0238/91/050557-35$1.50+0.20/0

Résonances pour l'opérateur de Dirac

par Bernard PARISSE

(25. I. 1991)

Laboratoire de Mathématiques, U.A. 762 du C.N.R.S.
Département de Mathématiques et d'Informatique
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS cédex 05
&
Département de Mathématiques, U.A. 760 du CNRS
Bâtiment 425
Université de Paris XI
F-91405 ORSAY

ABSTRACT

In this paper, one studies the resonances for the Dirac operator in the semi-classical limit using the same definition of resonances as B.Helffer and J.Sjöstrand did in [5] for the Schrödinger operator. The first section is an adaptation of their results to the Dirac operator. In the second section, one proves that the multiplicity of Dirac's resonances is even : this fact was known for eigenvalues as Kramer's theorem.

Sommaire

Résumé

On définit les résonances dans le cadre semi-classique pour l'opérateur de Dirac sans champ magnétique en adaptant la technique utilisée pour l'opérateur de Schrödinger par B.Helffer et J.Sjöstrand. On montre que la multiplicité des résonances est paire; c'est aussi un prolongement du résultat de Kramers pour les valeurs propres.

0. Introduction.

Cet article est une version développée de ma note ([7]).

La théorie des résonances pour des particules non relativistes soumises à l'équation de Schrödinger a été développée suivant deux types de technique, la dilatation analytique (voir par exemple [1]) et dans le cadre semi-classique celle plus microlocale de B.Helffer et J.Sjöstrand (voir [5]). B.Helffer et A.Martinez ont d'ailleurs montré que ces définitions donnent les mêmes résonances lorsqu'on peut les appliquer simultanément à un potentiel (cf [4]).

Pour des particules relativistes de spin $\frac{1}{2}$ régies par l'équation de Dirac, c'est une définition analogue à celle de [5] qui sera utilisée dans cet article. On pourra se référer à [7], [4] par exemple pour une définition de type "dilatation analytique" dans le cas de l'opérateur de Dirac. On considèrera toujours que le champ magnétique est nul, l'opérateur de Dirac prenant la forme $D(h)=h\Sigma_{i=1}^{3}\alpha_i D_i+\alpha_4+VI_4$, où les α_i sont des matrices 4x4 dont la valeur est donnée en 1.2.

Dans la première section, on rappelle les notions et des résultats de [5] sur des espaces de Sobolev adaptés à l'opérateur de Dirac D(h) considéré. Les résonances sont alors les nombres complexes $z\in\mathbb{C}$ tels que D(h)-z n'est pas bijectif comme opérateur d'un de ces espaces de Sobolev dans un autre.

Dans la deuxième section, on montre qu'en l'absence de champ magnétique les résonances sont de multiplicité paire. C'est en quelque sorte une dégénérescence due à l'absence d'interaction spin-orbite puisque le champ magnétique est nul. Ce résultat est bien connu pour les valeurs propres : c'est le théorème de Kramers.

REMERCIEMENTS :

Je remercie B.Helffer et J.Sjöstrand de m'avoir suggéré de prolonger leurs travaux à l'opérateur de Dirac ainsi que pour les nombreuses discussions qui m'ont permis d'aboutir.

1 Définition des résonances

On rappelle tout d'abord dans les sous-sections 1.1 à 1.7 les notations introduites par B.Helffer et J.Sjöstrand dans [5] en les explicitant et en les adaptant à la situation de l'équation de Dirac. Pour faciliter les références, chaque sous-section est suivie des sections correspondantes de [5]. C'est dans la section 1.8 que l'on donne le théorème permettant de définir les résonances.

1.1 Fonctions "d'échelles" ([5] section 1):

Pour contrôler uniformément les fonctions, symboles et leurs dérivées, on utilise des fonctions d'échelles.

Soient r et R deux fonctions de $C^{\infty}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^+)$ telles que :

$r \geqslant 1$, $rR \geqslant 1$, et

$\forall\alpha\in\mathbb{N}$, $\exists$ C_α tel que $|\partial_x^\alpha r(x)|\leqslant C_\alpha r(x)R(x)^{-|\alpha|}$ et $|\partial_x^\alpha R(x)|\leqslant C_\alpha R(x)^{1-|\alpha|}$.

Pour x, $\xi\in\mathbb{C}^3$, on pose :

$r(x)=r(\mathrm{Re}\ x)$, $R(x)=R(\mathrm{Re}\ x)$ et $\tilde{r}(x,\xi)=(r^2(x)+(\mathrm{Re}\xi)^2)^{1/2}$.

R(x) représente le gain en dérivant par rapport à x, $\tilde{r}(x,\xi)$ le gain en dérivant par rapport à ξ pour les symboles qu'on utilisera.

Soit $B\big((x,\xi),\varepsilon\big)=\big\{(x',\xi')$ tels que $|x'-x|\leqslant\varepsilon R(x)$ et $|\xi'-\xi|\leqslant\varepsilon\tilde{r}(x,\xi)$ $\big\}$,

la boule de centre (x,ξ) pour la "métrique associée au couple" $(R,\tilde{r})$.

Exemple :

Notons $\langle x\rangle=(1+(\mathrm{Re}x)^2)^{1/2}$. On peut prendre $R(x)=\langle x\rangle$, $r(x)=1$, $\tilde{r}(x,\xi)=\langle\xi\rangle$. Ces fonctions d'échelles conviennent lorsque le potentiel de l'opérateur de Dirac est borné (voir ci-dessous).

-/-

1.2 Opérateur de Dirac :

Soit $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que pour une constante C :

- V admet une extension holomorphe pour $|Re(x)| \geqslant C$ dans $|Im(x)| \leqslant R(Re(x))/C$
- (1.1) $|V(x)| \leqslant C\ r(Re(x))$ sur tout ce domaine complexe.

V est le potentiel de l'opérateur D(h) défini sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ par :

$$D(h) = h\Sigma_{i=1}^{3} \alpha_i D_i + \alpha_4 + V I_4$$

$$= \begin{pmatrix} V+1 & 0 & h\partial_3/i & h(-i\partial_1 - \partial_2) \\ 0 & V+1 & h(-i\partial_1 + \partial_2) & -h\partial_3/i \\ h\partial_3/i & h(-i\partial_1 - \partial_2) & V-1 & 0 \\ h(-i\partial_1 + \partial_2) & -h\partial_3/i & 0 & V-1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ pour $i=1,2,3$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$,

I_n est l'identité de $\mathbb{C}^n$ et les σ_i sont les matrices de Pauli définies par :

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que :

i) les σ_i et les α_i sont des matrices hermitiennes.

ii) $\sigma_m\sigma_n + \sigma_n\sigma_m = 2\delta_{n,m}$ et $\alpha_n\alpha_m + \alpha_m\alpha_n = 2\delta_{m,n}$ pour $1 \leqslant m,n \leqslant 3$ ou 4.

Etudions le symbole de D(h) (valeurs propres et inversibilité).

On note $D_V(x,\xi)$ la matrice D(h) où on a remplacé hD par $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$:

$D_V(x,\xi) = \Sigma_{i=1}^{3} \alpha_i \xi_i + \alpha_4 + V I_4$.

On a alors :

$$(D_V(x,\xi)-z)\,(D_{-V}(x,\xi)+z) = (\Sigma_{i=1}^{3}\alpha_i\xi_i+\alpha_4+VI_4-z)\,(\Sigma_{i=1}^{3}\alpha_i\xi_i+\alpha_4-VI_4+z)$$

$$= \Big(\Sigma_{i,j\in[1,3]}\alpha_i\alpha_j\,\xi_i\xi_j +$$

$$+\Sigma_{i=1}^{3}\alpha_i\xi_i(\alpha_4+VI_4-z)+(\alpha_4-VI_4+z)\,\alpha_i\xi_i + (\alpha_4+(VI_4-z))\,(\alpha_4-(VI_4-z))\Big)$$

$$=(\xi^2+\alpha_4^2-(V-z)^2) \qquad \text{, car } \alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{i,j}.$$

$$(D_V(x,\xi)-z)\,(D_{-V}(x,\xi)+z) = 1+\xi^2-(V-z)^2 \qquad \text{où } \xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2.$$

Pour $z=V=0$, on trouve $D_0^2=1+\xi^2$. Il en résulte que D_0 est diagonalisable de valeurs propres $(1+\xi^2)^{1/2}$ et $-(1+\xi^2)^{1/2}$, et comme sa trace est nulle, on en déduit que ces valeurs propres sont doubles.

Soient p^+ et p^- définis pour $(x,\xi)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ (ou dans un voisinage complexe de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$) par :

(1.2) $$p^+=V+(1+\xi^2)^{1/2},\quad p^-=V-(1+\xi^2)^{1/2}.$$

Comme $D_V(x,\xi)-z=D_0(x,\xi)+(V-z)I_4$, <u>les valeurs propres de D_V-z sont (p^+-z) et (p^--z)</u> où p^+ et p^- sont donnés par (1.2).

Finalement, on observe que si $(V-z)^2\neq(1+\xi^2)$, alors :

(1.3) $$(D_V(x,\xi)-z)^{-1}=(-D_{-V}(x,\xi)-z)\,/\,\big((V-z)^2-1-\xi^2\big).$$

Soit $\Sigma^\pm=\{(x,\xi)$ tels que $p^\pm(x,\xi)=0\}$.

L'ensemble $\Sigma^+\cup\Sigma^-$ est l'ensemble des (x,ξ) tels que $D_V(x,\xi)$ n'est pas inversible.

On a $\Sigma^+\cap\Sigma^-=\emptyset$.

Donnons encore une estimation qui servira pour la remarque 1.8.

Par rapport aux fonctions d'échelle, on a, pour $(x,\xi)\in\Sigma^\pm$,

$|V(x)| = (1+\xi^2)^{1/2}$

d'où l'inégalité $|\xi| \leqslant Cr(x)$ est satisfaite sur $\Sigma^{\pm}$.

1.3 Symboles ([5] section 1).

Pour étudier $D(h)-z$, on va le considérer comme un opérateur pseudo-différentiel (o.p.d.) sur certains espaces de Sobolev, ce qui permettra de l'inverser lorsque son symbole principal est inversible. Dans les sections qui suivent (1.3 à 1.7), on va donc définir la classe des o.p.d. adaptée au problème.

Soit $m \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 ; \mathbb{R}^+)$.

On dit que $a(x,\xi) \in S(m)$ si $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 ; \mathbb{C})$ et si

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\exists C = C(\alpha,\beta)$ tel que :

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x,\xi)| \leqslant C\ m(x,\xi)\, R(x)^{-|\alpha|}\ \tilde{r}(x,\xi)^{-|\beta|} . \tag{1.4}$$

On dit que m est une fonction d'ordre si $m \in S(m)$.

Comme $D(h)$ est un opérateur matriciel 4x4, on définit l'espace des vecteurs-symboles $S_4(m)$ et des matrices symboles $S_{4,4}(m)$ par :

- $a(x,\xi) \in S_4(m)$ si $a(x,\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ et chaque composante a_i de $a(x,\xi)$ est dans $S(m)$. On écrira parfois $S(m)$ au lieu de $S_4(m)$ losqu'aucune confusion n'est possible.
- $a(x,\xi) \in S_{4,4}(m)$ si $a(x,\xi)$ est une fonction C^{∞} de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans les matrices 4x4 à coefficients complexes et si chaque coefficient $a_{i,j}(x,\xi)$ est dans $S(m)$.

Exemple et définition :

On vérifie que $\tilde{r}$ et R sont des fonctions d'ordre de même que des produits de R et $\tilde{r}$. On définit alors, pour $(k,l) \in \mathbb{N}^2$,

$S^{k,\ell}=S(\tilde{r}^{k}R^{\ell})$ et $\dot{S}^{k,\ell}=\{u\in C^{\infty}(\mathbb{R}^3\mathrm{x}\mathbb{R}^3)$ tel que $\partial_{x_i}u\in S^{k-1,\ell}$ et $\partial_{\xi_i}u\in S^{k,\ell-1}\}$.
Ce dernier ensemble contient mais n'est pas $S^{k,\ell}$ en général.

Par exemple, grâce aux inégalités de Cauchy, on peut montrer que $D_V(x,\xi)\in S_{4,4}(\tilde{r})$. C'est en effet l'analogue en dimension 3 de l'idée suivante en dimension 1 :

-pour x borné, la vérification est triviale.

-sinon, pour $|\mathrm{Re}(x)|\geqslant C$, on écrit : $\partial_x^{\alpha} V(x)=\frac{1}{2i\pi\alpha!}\int_{\gamma} V(z)/(z-x)^{1+\alpha}\,dz$, en prenant pour contour $\gamma=\{z/d(x,z)=R(x)/C\}$ et on applique la majoration de V, valable sur $B(x,R(x)/C)$.

Pour les mêmes raisons, les dérivées de $p^{\pm}$ en x gagnent une puissance de R comme si $p^{\pm}$ appartenait à $S(\tilde{r})$. Il n'en est plus de même pour les dérivées en ξ à partir de la dérivée seconde (sauf si on peut prendre $r(x)=1$). En effet, en dérivant en ξ, on gagne une puissance de ξ et non une puissance de $\tilde{r}(x,\xi)$. Au rang 1, cela n'a pas d'importance car $\partial_{\xi}p^{+}=\partial_{\xi}\langle\xi\rangle$ est borné. Par contre si $r(x)=1$, alors $\tilde{r}(x,\xi)=\langle\xi\rangle$ donc $p^{\pm}\in S(\tilde{r})$.

1.4 Fonction fuite et modifications de cette fonction ([5] section 8):

En fonction du potentiel V, on introduit, lorsque cela est possible, une fonction G dite "fonction fuite" dont le crochet de Poisson avec p^{+} et p^{-} est elliptique en dehors d'un compact sur $\Sigma^{\pm}$ par rapport aux fonctions d'échelles. C'est-à-dire que G croît (ou décroît) le long du flot hamiltonien de p^{+} et p^{-}, ce qui assure l'absence de trajectoires captées.

A partir de G, on définit des sous-variétés I-lagrangiennes Λ_{tG} de $\mathbb{C}^6$ sur lesquelles vit le symbole $D_V(x,\xi)$ de telle sorte que, lorsque la partie réelle de $p^{\pm}$ n'est pas elliptique (si $(\mathrm{Re}x, \mathrm{Re}\xi)\in\Sigma^{\pm}$), sa partie imaginaire $H_{p_{\pm}}(G)$

soit alors elliptique en dehors d'un compact. On définira enfin les espaces de Sobolev et les o.p.d. de telle sorte que D(h) aura pour symbole $D_V(x,\xi)$ avec $(x,\xi)\in\Lambda_{tG}$ et aura ainsi un spectre discret près de 0.

<u>i) Définition d'une fonction fuite.</u>

On note pour $p,G\in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 x\mathbb{R}^3)$:

(1.5) $$H_p(G)=\Sigma_{i=1}^{3}\partial_{\xi_i}p\ \partial_{x_i}G - \partial_{x_i}p\ \partial_{\xi_i}G\ ,$$

le crochet de Poisson de p et de G.

La fonction G est dite fonction fuite pour Dirac si $G\in S^{1,1}(\mathbb{R}^3 x\mathbb{R}^3)$, et s'il existe $C>0$ et K compact de $\mathbb{R}^3 x\mathbb{R}^3$ tels que, pour $(x,\xi)\in\Sigma^+ - K$ [respectivement $\Sigma^- - K$], on ait :

(1.6) $$H_{p^+}(G)\,(x,\xi)\ \geqslant r(x)/C\ \ [\text{ resp. } H_{p^-}(G)(x,\xi)\ \geqslant r(x)/C].$$

C'est une hypothèse d'ellipticité. En effet, comme $G\in S^{1,1}$, on a :

pour $(x,\xi)\in\mathbb{R}^3 x\mathbb{R}^3$, $|\partial_{x_i}G|\leqslant C\,\tilde{r}$, $|\partial_{\xi_i}G|\leqslant C\,R$,

et de plus $|\partial_{x_i}p^{\pm}|\leqslant C\,\frac{r}{R}$, $|\partial_{\xi_i}p^{\pm}|\leqslant C$.

Or sur $\Sigma^{\pm}$, $\tilde{r}(x,\xi)$ est équivalent à $r(x)$ puisque $|\xi|\leqslant Cr(x)$, donc :

$|H_{p^+}(G)|\leqslant C\,r(x)$ sur $\Sigma^{\pm}$.

On suppose de plus que G vérifie :

(1.7) $$|\partial_{Re(x)}G(Re(x),Re(\xi))|\leqslant C(1+|Re(\xi)|)\ .$$

Cette hypothèse est plus forte que celle résultant de l'appartenance de G à $S^{1,1}$ i.e. :

(1.7a) $$|\partial_{Re(x)}G(Re(x),Re(\xi))|\leqslant C\,\tilde{r}(x,\xi)\ .$$

On fait l'hypothèse (1.7) pour que $\langle\xi\rangle$ et donc $p^{\pm}$ soient définis sur Λ_{tG} pour t assez petit. (1.7) en effet assure que Λ_{tG} ne s'approche pas de $\xi^2=-1$ lorsque t est petit.

<u>Exemple :</u>

Soit $V(x)= x^2 - x^4$, où $x^2 = \Sigma_{i=1}^3 x_i^2$.

On peut alors prendre $G(x,\xi)=x.\xi$, $R(x)=(1+x^2)^{1/2}$, $r(x)=1+x^4$.

Dans ce cas $V(x)<1$, donc Σ^- est vide.

Regardons la condition (1.6) sur Σ^+.

Avec la définition (1.5), on a :

$$H_{p+}(G) = \Sigma_{i=1}^3 \partial_{\xi_i} p^+ \ \xi_i - \Sigma_{i=1}^3 \partial_{x_i} p^+ \ x_i \quad ,$$

où $\quad p^+(x,\xi) = V(x)+(1+\xi^2)^{1/2} = \xi^2/(1+\xi^2)^{1/2} - \Sigma_{i=1}^3 x_i \partial_i V$.

Comme $-\Sigma_{i=1}^3 x_i \partial_i V = -2x^2+4x^4 \geqslant 2r(x)$ pour x assez grand et comme $\xi^2/(1+\xi^2)^{1/2} \geqslant 0$, on a en dehors d'un compact :

$H_{p+}(G) \geqslant 2\ r(x)$

donc (1.6) est valide.

<u>ii)Modifications de la fonction fuite.</u>

Remarquons que p^+, p^- sont pairs en ξ.

On en déduit que pour tout choix d'une fonction fuite $G(x,\xi)$, $-G(x,-\xi)$ est encore une fonction fuite et $G(x,\xi)-G(x,-\xi)$ aussi. Cette dernière fonction fuite est impaire en ξ.

Dans la suite on supposera qu'on a choisi une fonction fuite G impaire.

Pour des raisons techniques dans la définition d'espaces de Sobolev et d'opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés dépendant de G, on a besoin que G soit "proche" d'une fonction g ne dépendant que de x. On modifie G loin de Σ^+ et de Σ^- comme pour l'opérateur de Schrödinger en la remplaçant par :

(1.8) $$\tilde{G}(x,\xi) = G(x,\xi)\,\chi(|\xi|/Cr(x)) + G(x,0)\big(1-\chi(|\xi|/Cr(x))\big)$$

$$= G(x,0) + \big(G(x,\xi) - G(x,0)\big)\,\chi(|\xi|/Cr(x)),$$

où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de 0.

On note $g(x)=G(x,0)$. Remarquons que si G est impaire, $g(x)=0$.

On vérifie que la condition de fonction fuite (1.6) est toujours vérifiée pour $\tilde{G}$, et que :

$G \in S^{1,1}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4) + S(rR;\mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$,

c'est-à-dire que $\tilde{G}$ est une fonction ne dépendant que de x à un symbole de la classe rR près.

Enfin on suppose que :

(1.9) $\forall\, \varepsilon_0 > 0, \exists\, C > 0$ tels que, pour $x,\xi \in \mathbb{R}^3$, on ait :

- si $B((x,\xi),\varepsilon_0) \cap \Sigma^+ = \emptyset$ alors $|p^+(x,\xi)| \geqslant \tilde{r}(x,\xi) / C$
- si $B((x,\xi),\varepsilon_0) \cap \Sigma^- = \emptyset$ alors $|p^-(x,\xi)| \geqslant \tilde{r}(x,\xi) / C$.

On rappelle que $B((x,\xi),\varepsilon) = \{(x',\xi')$ tels que $|x'-x| \leqslant \varepsilon R(x)$ et $|\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon \tilde{r}(x,\xi)\}$.

L'hypothèse (1.9) signifie que, par rapport aux fonctions d'échelles R et $\tilde{r}$, soit $p^\pm(x,\xi)$ est elliptique, soit (x,ξ) est proche de $\Sigma^\pm$ (où, en dehors d'un compact, c'est $H_{p_\pm}$ qui est elliptique).

1.5 Variétés I-lagrangiennes ([5] section 2).

A la fonction fuite G, on associe les variétés $\Lambda_t = \Lambda_{tG}$ sur lesquelles vivront les symboles des o.p.d., définies par $(x,\xi) \in \Lambda_t$ si :

(1.10) $$\operatorname{Im}\xi = -t\,\partial_{Re(x)} G(Re(x),Re(\xi)) \;;\; \operatorname{Im} x = t\,\partial_{Re(\xi)} G(Re(x),Re(\xi)).$$

On observe que $\Lambda_0 = \mathbb{R}^3$.

1.6 Espaces de Sobolev ([5] sections 3-5).

En s'inspirant de [4], on va donner la définition d'espaces de Sobolev attachés à Λ_{tG} dans deux cas plus simples que le cas général pour lequel on pourra se référer à [5] . Ces deux cas sont :

i) celui où la fonction fuite ne dépend que de x

ii) le cas où V est borné et on peut prendre $r(x)=1$, $\tilde{r}(x,\xi)=\langle\xi\rangle$, $R(x)=\langle x\rangle$.

i) 1er cas : $G(x,\xi)=f(x)$.

On suppose que $\tilde{m}(x,\xi)=m(x)(\frac{\tilde{r}(x,\xi)}{r(x)})^N$ où $N\in\mathbb{Z}$ et on va définir $H_4(\Lambda_f,\tilde{m})$.

Si $N\in\mathbb{N}$, on pose :

$$H_4(\Lambda_f,\tilde{m})=\{u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)\ /\ \Sigma_{|\alpha|\leqslant N}\ |(\tfrac{1}{r}hD_x)^\alpha\ (m\ e^{-f(x)/h}\ u(x))|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)}<\infty\}.$$

$f(x)$ effectue un changement d'échelle exponentielle, $(\tilde{r}/r)^N$ correspond au nombre de dérivées que l'on contrôle, m est un poids.

On peut alors montrer qu'on a défini un espace de Banach dans lequel C_0^∞ est dense. On ne change pas la définition et on obtient une norme équivalente en permutant $e^{-f(x)/h}$, $m(x)$ et $r(x)$.

Soit $p=p(x)$ une fonction d'ordre ne dépendant que de x. On peut montrer qu'un opérateur différentiel P de la forme :

$$P=\Sigma_{|\alpha|\leqslant M}\ a_\alpha(x)\ (\tfrac{1}{r}hD_x)^\alpha\ ,\ \text{avec}\ a_\alpha\in S_{4,4}(p(x))$$

est un opérateur de $H_4(\Lambda_f,\tilde{m})$ dans $H_4(\Lambda_f,\frac{\tilde{m}}{p}.(\frac{\tilde{r}}{r})^{-M})$ borné uniformément en h.

Si $-N\in\mathbb{N}$, on définit $H_4(\Lambda_f,\tilde{m})$ par dualité :

$H_4(\Lambda_f,\tilde{m})$ est le dual de $H_4(\Lambda_{-f},1/\tilde{m})$ (c'est un espace de distributions).

On peut montrer qu'on a un résultat analogue à celui des espaces de Sobolev habituels :

Soient $N,\tilde{N} \in \mathbb{Z}$ avec $N > \tilde{N}$, $f,\tilde{f} \in S^{1,1}$ avec $f \leqslant \tilde{f}$ et $m(x)$, $\tilde{m}(x)$ des fonctions d'ordre avec $\tilde{m}/m$ tendant vers 0 pour $|x|$ tendant vers $+\infty$.

Alors l'inclusion j: $H_4(\Lambda_f ,m(\tilde{r}/r)^N) \to H_4(\Lambda_{\tilde{f}} ,\tilde{m}(\tilde{r}/r)^{\tilde{N}})$ est compacte.

ii) 2ème cas : $r(x)=1$, $\tilde{r}(x,\xi)=\langle\xi\rangle$, $R(x)=\langle x\rangle$.

Considérons d'abord une variéte Λ_G générale et construisons un équivalent de la transformée de Fourier adapté à Λ_G.

Soit $G \in S^{1,1}$ et $g(x)=G(x,0)$.

On part d'une résolution de l'identité adaptée à Λ_G, $\tilde{r}$ et R.

On a :

$$\delta(x-y)=C_n h^{-3n/2}\int_{\beta \in \mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}((x-y)\beta_\xi + i(x-\beta_x)^2 + i(y-\beta_x)^2)}\, d\beta \qquad ,$$

où n est la dimension, c'est-à-dire 3.

On effectue un changement de variable complexes pour transformer la phase en :

$$\phi_0(x,y,\alpha)=(x-y)\alpha_\xi + i\lambda(\alpha)\left((x-\alpha_x)^2+(y-\alpha_x)^2\right) ,$$

où λ est un symbole de classe $S^{1,-1}$ elliptique et positif (par exemple $\lambda(\alpha)= \frac{\langle\alpha_\xi\rangle}{\langle\alpha_x\rangle}$ si $r=1$, $R=\langle x\rangle$ et $\tilde{r}=\langle\xi\rangle$).

On obtient alors formellement :

$$\int_{\alpha \in \Lambda_{tG}} e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, j(x,y,\alpha)\, d\alpha = \delta(x-y) \qquad ,$$

où j, qui provient du changement de variable dans $d\beta$, est un symbole dans $S^{3/2,-3/2,9/2}$ (le dernier indice signifie $h^{-9/2} S^{3/2,-3/2}$), elliptique sur $x=y=\alpha_x$.

Plus précisément, on a :

$$h^{9/2}\, j\, d\alpha\Big|_{\Lambda_G} = \lambda^{3/2}\, d\alpha + \Sigma_{j=1}^{3} \lambda^{3/2} \frac{i}{2}(x_j-y_j)\, d\alpha_{x_1}\wedge d\alpha_{\xi_1}\wedge\ldots\wedge d\lambda\wedge\ldots\wedge d\alpha_{\xi_n} +$$

$$+ \Sigma_{j=1}^{3} \lambda^{3/2-1} \frac{i}{2}\Big(\alpha_{x_j} - \frac{1}{2}(x_j+y_j)\Big)\, d\alpha_{x_1} \wedge \ldots \wedge d\lambda \wedge \ldots \wedge\ d\alpha_{x_n} \wedge d\alpha_{\xi_n}.$$

Rigoureusement, on peut montrer que pour G-g petit dans $S^{1,1}$, on a (cf [5] proposition 4.1) :

(1.11) $$\int_{\alpha \in \Lambda_G} e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, j(x,y,\alpha)\, \chi_\alpha(x)\, \chi_\alpha(y)\, d\alpha =$$
$$= \delta(x-y) + k(x,y,h)\, e^{\frac{g(x)-g(y)}{h}},$$

où les χ_α sont des troncatures du type $\chi_\alpha(x) = \chi\big((x-\mathrm{Re}\alpha_x)/R(\mathrm{Re}\alpha_x)\big)$, où χ est une fonction de C_0^∞ valant 1 près de 0 et où $g = g(x) \in S(rR)$ est la fonction $G(x,0)$ (voir (1.8)). Ici, on suppose que λ est suffisament grand pour que si $|x-\mathrm{Re}\alpha_x|, |y-\mathrm{Re}\alpha_x| \leqslant \frac{1}{C} R(\alpha_x)$, on ait alors :

$$g(y)-g(x) + (x-y)\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{Re}\alpha_x) - \lambda(\alpha)\big((x-\mathrm{Re}\alpha_x)^2 + (y-\mathrm{Re}\alpha_x)^2\big) \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{C}\cdot\frac{\tilde{r}(\alpha)}{R(\alpha_x)}\big((x-\mathrm{Re}\alpha_x)^2 + (y-\mathrm{Re}\alpha_x)^2\big).$$

Le noyau k est alors à support dans la réunion des $\mathrm{supp}\chi_\alpha(x)\, \chi_\alpha(y)$ et on a:
$|\partial_x^\gamma\, \partial_y^\delta\, k| \leqslant C_{\gamma,\delta}\, e^{-\varepsilon_0 Rr/h}\, R^{n-|\gamma|-|\delta|}(\alpha_x)$.

Pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, on définit la transformée de F.B.I. de u par :

(1.12) $\forall \alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{C}^6$, $(Tu)(\alpha) = \int_{x \in \mathbb{R}^3} e^{i\frac{\phi(x,\alpha)}{h}}\, t(x,\alpha,h)\, \chi_\alpha(x)\, u(x)dx.$

où : la phase ϕ vaut $\phi(x,\alpha) = (\alpha_x - x)\alpha_\xi + i\,\lambda(\alpha)\,(x-\alpha_x)^2$,

$\chi_\alpha(x) = \chi\big((x-\mathrm{Re}\alpha_x)/R(\mathrm{Re}\alpha_x)\big)$ avec $\chi \in C_0^\infty(|x| \leqslant \frac{1}{C})$ est une troncature valant 1 pour $|x| \leqslant \frac{1}{2C}$,

$t(x,\alpha,h) = (t_0, t_1, t_2, t_3)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^4$, dépendant de $\mathrm{Re}\alpha$, de symbole dans $S_4(h^{-9/4}\, \tilde{r}(\alpha)^{3/4}\, R(\alpha_x)^{-3/4})$ dans le domaine où $\chi_\alpha \neq 0$, affine en x et tel que $\det(t, \partial_{x_1} t, \partial_{x_2} t, \partial_{x_3} t)$ soit elliptique à valeurs réelles.

Par exemple si $r(x)=1$, $\tilde{r}(x,\xi) = \langle\xi\rangle$, $R(x) = \langle x\rangle$, on peut prendre
$t(x,\alpha,h) = h^{-9/4}\langle\alpha_\xi\rangle^{3/4}\langle\alpha_x\rangle^{-3/4}\left(1, \frac{x_1}{\langle\alpha_x\rangle}, \frac{x_2}{\langle\alpha_x\rangle}, \frac{x_3}{\langle\alpha_x\rangle}\right)$ et $\lambda(\alpha) = \langle\alpha_\xi\rangle/\langle\alpha_x\rangle$.

Ce choix de t est fait pour qu'il existe un vecteur s tel que $s \cdot t = j$. (i.e.

$\Sigma_{i=0}^{3} s_i t_i = j)$

Ainsi, on peut construire un opérateur S du type :

$$(Sv)(x) = \int_{\alpha\in\Lambda_G} e^{i\frac{\psi(x,\alpha)}{h}} s(x,\alpha,h)\, \chi\left(\frac{x - Re(\alpha_x)}{R(\alpha_x)}\right) v(\alpha)\, d\alpha \qquad ,$$

où $\psi(x,\alpha) = (x-\alpha_x)\alpha_\xi + i\,\lambda(\alpha)((x-\alpha_x)^2)$, tel que pour G-g petit dans $S^{1,1}$,

$$S.T = I + K \qquad ,$$

où K est un opérateur à noyau du type $k(x,y,h)e^{\frac{g(x)-g(y)}{h}}$ vérifiant les mêmes estimations qu'en (1.11).

L'opérateur T joue le rôle de la transformation de Fourier et S celui de la transformée inverse.

Dans le cas des variétés Λ_{tG}, on peut prendre g=0 si G est impaire et "G petit dans $S^{1,1}$ " signifie que t est petit.

Supposons maintenant que $r(x)=1$, $R(x)=\langle x\rangle$ et $\tilde{r}(x,\xi)=\langle\xi\rangle$.

Notons $\tilde{H}^{-N}_{\varepsilon,4} = H_4(\Lambda_{\varepsilon\infty}, \langle x\rangle^{-N}\langle\xi\rangle^{-N})$ défini comme dans le cas i).

Soit $H(\alpha) = -\mathrm{Re}\ \alpha_\xi.\ \mathrm{Im}\ \alpha_x + tG(\mathrm{Re}\ \alpha_x, \mathrm{Re}\ \alpha_\xi)$ une primitive sur Λ_{tG} de la 1-forme fermée $-\mathrm{Im}(\alpha_\xi\, d\alpha_x)$. On définit alors $H_4(\Lambda_{tG}, m)$ par :

<u>Définition 1.1 :</u>

Soit m *une fonction d'ordre sur* $\mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3$ *et* $N \geqslant 0$ *tel que :*

$\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^6$, $\langle x\rangle^{-N}\langle\xi\rangle^{-N} \leqslant C\, m(x,\xi)$.

Soit $\varepsilon>0$ *assez petit et* t_0 *assez petit, alors pour* $|t|\leqslant|t_0|$, *on définit :*

$$H_4(\Lambda_{tG}, m) = \{u\in \tilde{H}^{-N}_{\varepsilon,4}(\mathbb{R}^3)\ /\ \int_{\Lambda_{tG}} |Tu(\alpha,h)|^2\, (m(\mathrm{Re}\alpha))^2\, e^{-2H(\alpha)/h}\, d\alpha \ < +\infty\ \}.$$

$d\alpha$ est la mesure canonique sur Λ_{tG} mais on peut la remplacer par $d(\mathrm{Re}\alpha)$ sans changer la définition de $H_4(\Lambda_{tG}, m)$. On peut montrer la compatiblité de cette définition avec la définiton du cas i).

1.7 Opérateurs pseudo-différentiels attachés à Λ ([5] section 6).

Définissons maintenant les opérateurs pseudo-différentiels adaptés à la transformée T.

On pose $\widetilde{d\alpha} = R(\alpha_x)^{-n}\,\tilde{r}(\alpha)^{-n}\,d\alpha$, où $n=3$ est la dimension.

Soit $\tilde{\phi}$ une phase de classe $S^{1,1}$, polynômiale de degré 2 en x,y et telle que pour $x=y=\alpha_x$, on ait :

$\tilde{\phi}=0,\ \partial_x\tilde{\phi}=-\partial_y\tilde{\phi}'=\alpha_\xi$; $(\mathrm{Im}\tilde{\phi})''$ positif et équivalent à $\tilde{r}/R$.

Par exemple, si $\tilde{r}=\langle\xi\rangle$ et $R=\langle x\rangle$, on peut prendre :

$\tilde{\phi}(x,y,\alpha)=(x-y)\alpha_\xi+ i\frac{\langle\alpha_\xi\rangle}{\langle\alpha_x\rangle}\big((x-\alpha_x)^2+(y-\alpha_x)^2\big)=\phi_0.$

Soit $a\in S^{x,y,\alpha}_{4,4,\mathrm{mod}}(mh^{-\ell})$ i.e. a est une matrice 4x4, dont les dérivées par rapport à x,y,α_x gagnent R et par rapport à α_ξ gagnent $\tilde{r}$, le signe "mod" signifie que l'on modifie les échelles par $S_{\mathrm{mod}}(mh^{-\ell})=S(m\tilde{r}^{9/2}R^{3/2}h^{-\ell-9/2})$ pour tenir compte du symbole j apparaissant dans (1.11) et de $\widetilde{d\alpha}$.

On définit $A=\mathrm{Op}(\tilde{\phi},a)$ sur $H_4(\Lambda_{tG},\tilde{m})$ par

$Au(x,h)=\int_{\alpha\in\Lambda_{tG}}\int e^{i\tilde{\phi}(x,y,h)/h}\,a(x,y,\alpha,h)\,\chi_\alpha(x,y)\,u(y)\,dy\,\widetilde{d\alpha}$,

où $\chi_\alpha\in S^{0,0}$ est une troncature à support dans :

$|x-\mathrm{Re}\alpha_x|^2+|y-\mathrm{Re}\alpha_x|^2\leqslant(\frac{1}{C_0}R(\mathrm{Re}\alpha_x))^2$ et valant 1 près de $(x,y)=(\mathrm{Re}\alpha_x,\mathrm{Re}\alpha_x)$.

a est le symbole de l'o.p.d. .

On a alors :

Proposition 1.2 ([5] 6.1) :

Soit $A=\mathrm{Op}(\tilde{\phi},a)$ *un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* m. *Il existe* $t_0>0$ *tel que pour* $|t|\leqslant t_0$ *et* $\tilde{m}$ *fonction d'ordre, on ait :*

il existe h_0 *tel que pour* $0<h<h_0$, A *est uniformément borné de* $H_4(\Lambda_{tG},\tilde{m})$ *dans* $H_4(\Lambda_{tG},\tilde{m}/m)$.

On appelle opérateur négligeable d'ordre $mh^{-\ell}$ un opérateur K de norme $O(h^{-\ell})$ de $H_4(\Lambda,\tilde{m})$ dans $H_4(\Lambda,\frac{\tilde{m}}{m}.(\frac{\tilde{r}R}{h})^N)$ pour tout $N\in\mathbb{N}$.

On peut montrer que changer les troncatures ou la phase revient à modifier l'o.p.d. par un opérateur négligeable d'ordre $O(h^{-\ell})$. De même l'opérateur de noyau $k(x,y,h)\ e^{\frac{g(x)-g(y)}{h}}$ est négligeable (d'ordre 1), ainsi que ses dérivées en x.

On définit le <u>symbole principal</u> $\sigma_A\in S_{4,4}(mh^{-\ell})$ de A à partir du symbole $a\in S^{x,y,\alpha}_{4,4,mod}(mh^{-\ell})$ par :

$$\sigma_A(x,\alpha_\xi) = a(x,y,\alpha_x,\alpha_\xi)\,(R\tilde{r})^{-3} / j(x,y,\alpha_x,\alpha_\xi)\Big|_{y=\alpha_x=x} \quad \text{modulo } S(mh^{-\ell}\ \tfrac{h}{\tilde{r}R}).$$

On montre que le symbole principal ne dépend pas du choix de la phase $\tilde{\phi}$.

<u>Exemple : Sous l'hypothèse (1.1), montrons que, modulo un opérateur négligeable, D(h) est un o.p.d. de symbole principal $D_V(x,\xi)$</u>.

Il suffit de montrer que la multiplication par V(x) et la dérivation par rapport à x_i, $i\in[1,3]$, sont des o.p.d. .

Pour V, il suffit d'appliquer (1.11), pour obtenir que modulo un opérateur négligeable, V est un o.p.d. de symbole par exemple $V(\frac{x+y}{2})\,(R\tilde{r})^3\, j(x,y,\alpha)$ et donc de symbole principal V(x).

Pour la dérivation, on écrit formellement :

$$\frac{h}{i}\,\partial_{x_i}\iint e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, j(x,y,\alpha)\, u(y)\, dy d\alpha = \iint e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, a(x,y,\alpha,h)\, u(y)\, dy\, d\tilde{\alpha} \quad ,$$

où
$$\begin{aligned} a(x,y,\alpha,h) &= (R\tilde{r})^3\ \frac{1}{i}\,(i\, j\,\partial_{x_i}\phi_0 + h\,\partial_{x_i} j) \\ &= (R\tilde{r})^3\Big(\, j(\alpha_\xi + 2i\lambda(\alpha)(x-\alpha_x)) + \frac{h}{i}\partial_{x_i} j\Big). \end{aligned}$$

On obtient un symbole de la classe $S^{x,y,\alpha}_{4,4,mod}(\tilde{r})$ dans le support de χ_α.

En écrivant les intégrales avec les troncatures et le noyau k pour une fonction u de $H(\Lambda_{tG},\tilde{r})$, on obtient modulo un opérateur négligeable :

$$\frac{h}{i}\partial_{x_i}u = \iint e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, a(x,y,\alpha,h)\, u(y)\, \chi_\alpha(x)\chi_\alpha(y)dy\,d\alpha \; +$$
$$+ \iint e^{\frac{i}{h}\phi_0(x,y,\alpha)}\, j(x,y,\alpha)\, u(y)\, \partial_{x_i}\chi_\alpha(x)\chi_\alpha(y)\, dyd\alpha\ .$$

La dernière intégrale est négligeable car $\partial_{x_i}\chi_\alpha(x)$ est à support loin de α_x.
Comme $a\in S^{x,y,\alpha}_{4,4,mod}(\tilde{r})$, le second membre est dans $H(\Lambda_{tG},1)$ par la proposition 1.2.

Finalement $\frac{h}{i}\partial_{x_i}$ est un o.p.d. modulo un négligeable et son symbole principal est α_ξ.

-/-

Pour la composition des opérateurs pseudo-différentiels on a le :

<u>Théorème 1.3 ([5] 6.9) :</u>

Soit A_1, A_2 *deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre* m_1 *et* m_2 *respectivement. Alors, modulo un opérateur négligeable d'ordre* $m_1 m_2$, *l'opérateur* $A_1 \bullet A_2$ *est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* $m_1 m_2$.
De plus on a la relation habituelle $\sigma_{A_1}=\sigma_{A_2}\bullet\sigma_{A_2}$ *entre les symboles principaux. (le signe "•" désigne respectivement la composition des opérateurs et le produit des matrices).*

<u>1.8 Résonances</u>

On va maintenant appliquer la théorie générale des o.p.d. à D(h). On cherche en particulier à inverser D(h)-z donc à inverser le symbole matriciel $D_V(x,\xi)-z$, ce qui revient à s'assurer que $p^{\pm}(x,\xi)-z$ est non nul.

La condition (1.7) entraîne que p^+ et p^- sont définis holomorphes dans un voisinage de Λ_t pour t assez petit et on va montrer que pour $(x,\xi)\in\Lambda_t$:

(1.13) $$p^{\pm}(x,\xi)=p^{\pm}(\mathrm{Re}x,\mathrm{Re}\xi) - itH_{p^{\pm}}(G)(\mathrm{Re}x,\mathrm{Re}\xi) + O(t^2\tilde{r}).$$

Démonstration de (1.13) :

L'idée consiste à faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de $p^{\pm}$ le long du segment $[(\mathrm{Re}\,x, \mathrm{Re}\,\xi), (x,\xi)]$ et de majorer le reste intégral. Le terme linéaire qui apparait est alors, grâce à (1.10) :

$i(\mathrm{Im}x\ \partial_x p^{\pm} + \mathrm{Im}\xi\ \partial_\xi p^{\pm}) = -itH_{p^{\pm}}(G)(\mathrm{Re}x,\mathrm{Re}\xi)$.

Soit $(x,\xi)\in\Lambda_t$. On a :

$p^{+}(x,\xi)-[p^{+}(\mathrm{Re}x,\mathrm{Re}\xi)-itH_{p^{+}}(G)(\mathrm{Re}x,\mathrm{Re}\xi)] =$

$= -\int_0^1(1-u)(\mathrm{Im}x^k\mathrm{Im}x^j\partial^2_{x_kx_j}p^{+} + \mathrm{Im}\xi^k\mathrm{Im}\xi^j\partial^2_{\xi_k\xi_j}p^{+})(\mathrm{Re}x+iu\mathrm{Im}x,\mathrm{Re}\xi+iu\mathrm{Im}\xi)du$

(il n'y a pas de terme en $\mathrm{Im}x^k\,\mathrm{Im}\,\xi^j$ car $\partial^2_{x_k\xi_j}p^{+}=0$).

On a $\partial_{x_k}p^{+} = \partial_{x_k}V\in S(\tilde{r}/R)$ donc $|\partial^2_{x_kx_j}p^{+}|=O(\tilde{r}/R^2)$.

De plus $|\mathrm{Im}\ x^k|=O(tR)$ car $G\in S^{1,1}$ et Imx est donné par (1.10).

Donc $\int_0^1(1-u)(\mathrm{Im}x^k\ \mathrm{Im}x^j\ \partial^2_{x_kx_j}p^{+})\ (\mathrm{Re}x+iu\mathrm{Im}x\ ,\ \mathrm{Re}\xi+iu\mathrm{Im}\xi)du=O(t^2\tilde{r})$.

Passons à la deuxième partie de l'intégrale.

On a $\partial^2_{\xi_k\xi_j}p^{+} = \delta_{k,j}/(1+\xi^2)^{1/2} - \frac{1}{2}\xi_k\xi_j/(1+\xi^2)^{3/2}$

et $|\,\mathrm{Im}\,\xi\,| \leqslant C\,t\,|\,\mathrm{Re}\,\xi\,|$ grâce à (1.7) et (1.10), donc :

$|\,(1+\xi^2)^{1/2}| \geqslant \frac{1}{2}(1+(\mathrm{Re}\,\xi)^2)^{1/2}$ pour t assez petit.

D'où :

$$|\mathrm{Im}\xi^k\,\mathrm{Im}\,\xi^j\,(\partial^2_{\xi_k\xi_j}p^{+})(\mathrm{Re}x+u\mathrm{Im}x,\ \mathrm{Re}\xi+u\mathrm{Im}\xi)| \leqslant C^2t^2\,|\,\mathrm{Re}\xi\,|^2\,C'/(1+\mathrm{Re}^2\xi)^{1/2}$$
$$\leqslant C''\,t^2\,|\,\mathrm{Re}\xi\,| \leqslant C''\,t^2\,\tilde{r}(x,\xi).$$

Donc la deuxième partie de l'intégrale

$\int_0^1(1-u)(\ \mathrm{Im}\xi^k\mathrm{Im}\,\xi^j\ \partial^2_{\xi_k\xi_j}p^{+})(\mathrm{Re}x+u\mathrm{Im}x,\mathrm{Re}\xi+u\mathrm{Im}\xi)\ du$ est aussi un $O(t^2\tilde{r})$. En faisant le même raisonnement pour p^-, on obtient (1.13).

-/-

On peut alors adapter à p^+, p^- les résultats obtenus dans [5] (propositions (8.1) et (8.2)), et en déduire la :

Proposition 1.4:

On a pour $(x,\xi)\in\Lambda_{tG}$ *:*

$|\operatorname{Re} p^{\pm}(x,\xi)| \leqslant C\tilde{r}(x,\xi)$; $|\operatorname{Im} p^{\pm}(x,\xi)| \leqslant Ct\tilde{r}(x,\xi)$.

Soit $\Omega_t = \{z\in\mathbb{C}$ tels que $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1/(2C)$ et $-t/(2C)\leqslant \operatorname{Im}(z)\leqslant T\}$ *où* $T>1$, $C>>1$. *Alors il existe* $C'>0$ *et* $t_0>0$ *tels que, pour* $0\leqslant t\leqslant t_0$, $(x,\xi)\in\Lambda_t$, $(\operatorname{Re}x,\operatorname{Re}\xi)\notin K$, $z\in\Omega_t$, *on ait :*

$|(V(x)-z)^2-1-\xi^2| \geqslant t^2\,\tilde{r}^2(x,\xi)\,/\,C'$.

Démonstration de la proposition 1.4 :

Grâce à (1.13) et (1.1), $|\operatorname{Re} p^{\pm}(x,\xi)|\leqslant C\tilde{r}(x,\xi)$ pour t borné et :

$|\operatorname{Im}\ p^{\pm}(x,\xi)|\leqslant t\,|H_{p^\pm}(G)\,(\operatorname{Re}x,\operatorname{Re}\xi)| + O(t^2\tilde{r})$.

Or $H_{p^+}(G)\,(\operatorname{Re}x\,,\operatorname{Re}\xi)=(\partial_{\xi_i}p^+\,\partial_{x_i}G - \partial_{x_i}p^+\,\partial_{\xi_i}G\,)\,(\operatorname{Re}x\,,\operatorname{Re}\xi)$

$$=\xi/\langle\xi\rangle\,.\,\nabla_x G - \nabla_x V\,.\,\nabla_\xi G\,,\quad \text{où } \langle\xi\rangle=(1+\xi^2)^{1/2}.$$

Donc, en utilisant (1.7), $G\in S^{1,1}$ et $\nabla_x V\in S_3(\tilde{r}/R)$, on obtient :

$|H_{p^+}(G)\,(\operatorname{Re}x\,,\operatorname{Re}\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle+C'\frac{\tilde{r}}{R}R \leqslant C''\,\tilde{r}(x,\xi)$.

D'où $|\operatorname{Im}\ p^+(x,\xi)|\leqslant Ct\tilde{r}$.

De même pour p^-. Passons à la deuxième partie de la proposition.

L'idée consiste à factoriser $(V(x)-z)^2-1-\xi^2$ en $(p^+-z)(p^--z)$ et à montrer que $|p^{\pm}(x,\xi)-z|\geqslant t\tilde{r}(x,\xi)/C$ pour $(\operatorname{Re}x\,,\operatorname{Re}\xi)\notin K$ et $z\in\Omega_t$.

On va découper les (x,ξ) de Λ_t tels que $(\operatorname{Re}x\,,\operatorname{Re}\xi)$ n'est pas dans K en deux parties : l'une loin de Σ^+ où p^+ est elliptique par sa partie réelle, et l'autre près de Σ^+ où p^+ est elliptique par sa partie imaginaire (l'ellipticité étant alors en "O(t)").

Soit $(x,\xi)\in B((x',\xi'),\varepsilon)$ avec $(x',\xi')\in\Sigma^+$.

Alors $H_{p^+}(G)(x,\xi) - H_{p^+}(G)(x',\xi') =$

$$= \int_0^1 [(x-x').\nabla_x H_{p^+}(G) + (\xi-\xi').\nabla_\xi H_{p^+}(G)](ux'+(1-u)x,\ u\xi'+(1-u)\xi)\, du$$

Or $|x-x'|\leqslant \varepsilon R(x')$ et $|\xi-\xi'|\leqslant \varepsilon\tilde{r}(x',\xi')$ (on peut d'ailleurs enlever les primes pour ε assez petit, quitte à multiplier les membres de droite par une constante), de plus :

$$|\nabla_x H_{p^+}(G)| = |\nabla_x(\xi/\langle\xi\rangle . \nabla_x G - \nabla_x V . \nabla_\xi G)| \leqslant C(\frac{\tilde{r}}{R}\frac{R}{R} + \frac{1}{R}\frac{\tilde{r}}{R}R) = 2C\frac{\tilde{r}}{R}.$$

$$|\nabla_{\xi_i} H_{p^+}(G)| = |\nabla_{\xi_i}(\Sigma_j \xi_j/\langle\xi\rangle . \nabla_{x_j} G - \nabla_x V . \nabla_\xi G)| \leqslant$$

$$\leqslant \quad |\nabla_{\xi_i}(\Sigma_j \xi_j/\langle\xi\rangle . \nabla_{x_j} G)| + C\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\tilde{r}}{R}R \quad \leqslant$$

$$\leqslant \quad |\xi_j/\langle\xi\rangle| \frac{\tilde{r}\, R}{\tilde{r}\, R} + |\delta_{i,j}/\langle\xi\rangle - \frac{1}{2}\xi_i\xi_j/\langle\xi\rangle^3|\, |\partial_{x_i} G| + C \quad \leqslant$$

$$\leqslant \quad 1 + C'/\langle\xi\rangle . C|\mathrm{Re}\,\xi| + C \quad \leqslant C'' ,$$ en utilisant (1.7) pour majorer $|\partial_{x_i} G|$.

Finalement si $(x,\xi)\in B((x',\xi'),\varepsilon)$, alors :

$|H_{p^+}(G)(x,\xi) - H_{p^+}(G)(x',\xi')| \leqslant C\,\varepsilon\,\tilde{r}(x,\xi)$.

En dehors d'un compact de Σ^+, on a , pour ε assez petit, $H_{p^+}(G)(x',\xi')\geqslant \tilde{r}(x',\xi')$.

Alors pour $(x,\xi)\in B(\Sigma^+,\varepsilon)$, on a pour ε assez petit :

$H_{p^+}(G)(x,\xi)\geqslant \tilde{r}(x',\xi')/2 \geqslant \tilde{r}(x,\xi)/4$,

donc, par (1.13), $\mathrm{Im}\,p^+(x,\xi)\leqslant -t\tilde{r}(x,\xi)/C$.

Hors de $B(\Sigma^+,\varepsilon)$, on a, grâce à (1.9), $|\mathrm{Re}\,p^+(x,\xi)|\geqslant \tilde{r}(x,\xi)/C$.

On en déduit que pour $z\in\Omega_t$, $|p^+ - z|\geqslant t\tilde{r}(x,\xi)/(2C)$.

En effet si $z\in\Omega_t$, $\mathrm{Im}\, z\geqslant -t/2C$, donc si $(x,\xi)\in B(\Sigma^+ - K,\varepsilon)$ on a :

$\mathrm{Im}(p^+ - z) \leqslant \mathrm{Im}\,p^+ + t/2C \leqslant -t\tilde{r}(x,\xi)/C + t/2C \leqslant -t\tilde{r}/2C$.

D'où le résultat sur $B(\Sigma^+ - K, \varepsilon)$.

Ailleurs en (x,ξ) on a grâce à (1.9) :

$|p^+ - z| \geqslant |Rep^+ - Rez| \geqslant \tilde{r}/C - 1/2C \geqslant \tilde{r}/2C$.

Le même raisonnement conduit à la même conclusion pour p^-.

En effectuant le produit des inégalités obtenues on obtient finalement :

$|(V(x)-z)^2 - 1 - \xi^2| \geqslant t^2 \tilde{r}^2(x,\xi)/C'$ pour $z \in \Omega_t$ et $(x,\xi) \in \Lambda_t - K$ lorsque $0 < t \leqslant t_0$.

-/-

Ceci permet d'obtenir l'analogue du théorème 8.3 de [5] pour Schrödinger qui définit les résonances :

<u>Théorème 1.5 ([5]8.3):</u>

Soient $D(h)$, Λ_t, Ω_t *comme ci-dessus.*

Alors il existe $t_1 > 0$ *tel que, pour* $0 < t \leqslant t_1$, *il existe* $h_0(t) > 0$ *vérifiant : pour tout* $h \in]0, h_0(t)]$, m *fonction d'ordre sur* Λ_t, $D(h) - z$ *est un opérateur de Fredholm d'indice* 0 *opèrant de* $H_4(\Lambda_t, \tilde{r}.m)$ *dans* $H_4(\Lambda_t, m)$. *L'ensemble* $\Gamma(h,t,m,G)$ *des valeurs de* z *pour lesquelles il n'est pas bijectif est discret.*

Pour $z \in \Gamma(h,t,m,G)$, $D(h) - z$ *se décompose en somme directe de* $F_z \oplus (G_z \cap H_4(\Lambda_t, \tilde{r}.m))$ *dans* $F_z \oplus G_z$, *où* $F_z \neq \emptyset$ *est de dimension finie* $N_0(z)$ *et* G_z *est fermé. De plus* $(D(h)-z)\big|_{F_z}$ *est nilpotent et* $D(h)-z$ *est une bijection de* $G_z \cap H_4(\Lambda_t, \tilde{r}.m)$ *dans* G_z *d'inverse borné.*

Comme dans [5], $\Gamma(h,t,m,G)$ est pour h assez petit essentiellement indépendant de t, G et de m. Plus précisément on a la :

<u>Proposition 1.6 ([5] 8.4) :</u>

Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.5, soit $\hat{m}$ *une deuxième fonction d'ordre sur* Λ_t. *Alors pour* $h>0$ *assez petit (qui dépend de t), on a :*

$\Gamma(h,t,m,G)=\Gamma(h,t,\hat{m},G)$ *et de plus* $F_z(m)=F_z(\hat{m})$ *pour tout* $z\in\Gamma(h,t,m,G)$.

La proposition 1.6 assure l'indépendance par rapport à la fonction d'ordre pour t et h assez petit. Reste à vérifier l'indépendance en t et G. Modifier t revient à modifier G. Changeons donc de fonction fuite.

Soit $\tilde{G}$ une deuxième fonction fuite et $G_s=(1-s)G+s\tilde{G}$, pour $s\in[0,1]$. G_s est aussi une fonction fuite.

Soit $\Lambda_{t,s}=\Lambda_{tG_s}$ et $\tilde{\Lambda}_t=\Lambda_{t\tilde{G}}$.

On montre sans difficultés que la proposition 1.4 reste vraie uniformément pour $0\leqslant s\leqslant 1$ lorsque $0\leqslant t\leqslant t_0$, $(x,\xi)\in\Lambda_{t,s}$, $\mathrm{Re}(x,\xi)\notin K$, $z\in\Omega_t$ quitte à modifier les constantes.

On a alors le :

<u>Théorème 1.7 ([5] 8.5) :</u>

Pour $t_1>0$ *assez petit, soit* $0\leqslant t\leqslant t_1$ *et* $\tilde{m}$ *fonction d'ordre définie sur tout les* $\Lambda_{t,s}$. *Alors ,il existe* $h_0(t)>0$ *tel que pour* $0<h\leqslant h_0$, *on ait*

$\Gamma(h,t,m,G)=\Gamma(h,t,m,\tilde{G})$.

De plus les espaces résonants F_z *correspondants coïncident.*

<u>Démonstration du théorème 1.5 :</u>

On rappelle les grandes lignes de la démonstration du théorème 8.3 de [5] qui s'adapte bien au cas matriciel :

-on commence par inverser $D(h)-z$ pour un z de Ω_t tel que $\mathrm{Im}\, z\geqslant\varepsilon>0$, en remarquant que le symbole de $D(h)-z$ est inversible sur Λ_t tout entier.

-en dessous dans Ω_t , on ne peut inverser le symbole qu'en dehors d' un compact de Λ_t, on en déduira que $D(h)-z$ est Fredholm, d'indice 0 puisque bijectif pour $\mathrm{Im} z \geqslant \varepsilon$, d'où l'existence de l'ensemble discret $\Gamma(h)$ des résonances pour lesquels $D(h)-z$ n'est pas bijectif.

Soit $\varepsilon>0$ et $t_1>0$ petit. Soit, pour $0<t\leqslant t_1$, $z\in\Omega_t$ vérifiant $\mathrm{Im} z\geqslant\varepsilon$.

Alors $((V(x)-z)^2-1-\xi^2)^{-1}$ est défini pas seulement au voisinage de l'infini, mais partout sur Λ_t.

En effet, pour $\mathrm{Re}(x,\xi)\in K$, on utilise que $|\mathrm{Im}\, p^{\pm}(x,\xi)|\leqslant Ct\tilde{r}(x,\xi)\leqslant C' t<\varepsilon$ pour t assez petit, donc $|\mathrm{Im}(p^{\pm}(x,\xi)-z)|\geqslant \mathrm{Im}\, z-|\mathrm{Im}\, p^{\pm}|>\varepsilon-\varepsilon=0$ et $|(V(x)-z)^2-1-\xi^2|>0$.

La proposition 1.4 montre d'autre part que $((V(x)-z)^2-1-\xi^2)^{-1}\in S_{4,4}(\tilde{r}^{-2})$.

On en déduit grâce à (1.3) que $(D_V(x,\xi)-z)^{-1}\in S_{4,4}(\tilde{r}^{-1})$.

Soit $Q(z)=Op_{\Lambda_t}\left((D_V(x,\xi)-z)^{-1}\right)$ un o.p.d. correspondant (cf section 1.7).

Alors :

$(D(h)-z).Q(z) = I+R_{-1}(z)$,

où R_{-1} est un OPD d'ordre $h/\tilde{r}R$ modulo un opérateur négligeable d'ordre $h/\tilde{r}R$, et est donc de norme $O(h)$ dans $H_4(\Lambda_t,m)$.

De même pour $Q(z).(D(h)-z)$.

On en déduit que, pour h assez petit, $D(h)-z$: $H_4(\Lambda_t,\tilde{r}m)\to H_4(\Lambda_t,m)$ est bijectif d'inverse borné pour $z\in\Omega_t$ tel que $\mathrm{Im} z\geqslant\varepsilon$.

On choisit un tel z qu'on notera z_0 dans la suite.

Soit maintenant $z\in\Omega_t$ quelconque, on pose :

$\tilde{Q}(z)= Op_{\Lambda_t}\left((D_V(x,\xi)-z_0)^{-1}\chi + (D_V(x,\xi)-z)^{-1}(1-\chi) \right)$, où $\operatorname{Im} z_0 \geqslant \varepsilon$ et $z_0 \in \Omega_t$, $\chi \in C_0^\infty(\Lambda_t)$ vaut 1 sur le compact K.

Ainsi $\tilde{Q}$ dépend holomorphiquement de z et coincide avec Q en z_0. Alors :

$(D(h)-z).\tilde{Q} = I+K(z)+\tilde{R}_{-1}(z)$,

où $\tilde{R}_{-1}$ a les même propriétés que R_{-1}, $K=Op_{\Lambda_t}(k)$ avec

$k=\big((D_V(x,\xi)-z_0)^{-1}(D_V(x,\xi)-z) - I\big)\chi$

est d'ordre 1 et à support compact.

Les opérateurs K et $\tilde{R}_{-1}$ dépendent holomorphiquement de z et en z_0 $K(z_0)=0$, $\tilde{R}_{-1}(z_0)=R_{-1}(z_0)$.

Lorsque h est assez petit, $I+\tilde{R}_{-1}: H_4(\Lambda_t, \tilde{r}m) \to H_4(\Lambda_t, m)$ est uniformément inversible pour $z \in \Omega_t$. De plus K est O(1) et compact dans ces espaces. En écrivant :

$I+K+\tilde{R}_{-1}=(I+\tilde{R}_{-1}).(I+(I+\tilde{R}_{-1})^{-1}.K)$,

on obtient que D(h)-z est Fredholm.

On omet les démonstrations de la proposition 1.6 et du théorème 1.7 : il suffit de reprendre les développements correspondants de [5] et de remplacer l'opérateur P que les auteurs considèrent par D(h).

Remarque 1.8 :

On peut définir les résonances sans factoriser $p(x,\xi)=(V-z)^2-1-\xi^2$ en remplaçant les hypothèses (1.6) et (1.7) par :

(1.14) $G \in S^{1,1}$ et $H_p(G) \leqslant -r^2/C$ sur $\Sigma^+ - K$ et $H_p(G) \geqslant r^2/C$ sur $\Sigma^- - K$.

Alors $\operatorname{Im}(p(x,\xi))\big|_{\Lambda_t}$ est équivalent à $|V(x)| \operatorname{Im}(z) + t\, r(x)^2$ près de Σ^- et à $-|V(x)|\operatorname{Im}(z) - t\, r(x)^2$ près de Σ^+, ce qui permet d'appliquer la démonstration du théorème 8.3 de [5].

Mais (1.14) entraîne (1.7).

En effet, sur Σ^+, $p^+=0$. On en déduit avec (1.14) que :

$-r^2/C \geqslant H_p(G) = p^- H_{p^+}(G) = 2\,V\,H_{p^+}(G)$ (en dehors de K).

D'où $r^2/C \leqslant 2|V(x)|\,H_{p^+}(G) \leqslant C\,|V(x)|\,r(x)$,

car $G \in S^{1,1}$ et $p^+, \partial_{x_i}p^+, \partial_{\xi_i}p^+$ vérifient (1.4) comme si p^+ appartenait à $S(\tilde{r})$.

Observons finalement que r(x) est équivalent à $|V(x)|$ en dehors d'un compact et que $\tilde{r}(x,\xi)$ est équivalent à $|\xi|$ sur Σ^+ ; (1.7a) entraîne alors (1.7) sur Σ^+ et on procède de même sur Σ^-. On conclut alors avec (1.8).

2. Résonances paires

On commence par rappeler sans démonstration trois propositions de B.Helffer et J.Sjöstrand.

La première proposition identifie le dual de $H_4(\Lambda_t, 1)$ avec $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$.

Proposition 2.1 ([5] 8.8) Dualité :

Le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ *sur* $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *s'étend en une forme sesquilinéaire sur* $H_4(\Lambda_t, 1) \times H_4(\Lambda_{-t}, 1)$ *vérifiant :*

$|(u|v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \leqslant |u|_{H_4(\Lambda_t,1)} |v|_{H_4(\Lambda_{-t},1)}$, *où* $u \in H_4(\Lambda_t, 1)$ *et* $v \in H_4(\Lambda_{-t}, 1)$.

De plus toute forme linéaire bornée ℓ *sur* $H_4(\Lambda_t, 1)$ *s'écrit de manière unique* $\ell(u)=(u|v)$ *où* $v \in H_4(\Lambda_{-t}, 1)$. *L'application* $\ell \rightarrow v(\ell)$ *de* $H_4(\Lambda_t, 1)^*$ *dans* $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$ *est bijective d'inverse bornée.*

Le deuxième résultat identifie l'opérateur $D(h)$ opérant sur $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$ et l'adjoint de $D(h)$ opérant sur $H_4(\Lambda_t, 1)$.

Proposition 2.2 ([5] 8.9) :

Si G *est une fonction fuite et* $t>0$ *(ou* $t<0$*), alors l'adjoint formel de l'opérateur non borné* P *sur* $H_4(\Lambda_t, 1)$ *de domaine* $H_4(\Lambda_t, m)$ *est donné par* P^* *sur* $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$ *de domaine* $H_4(\Lambda_{-t}, m)$.

Soit G une fonction fuite.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on peut montrer que $(z-P)^{-1}$ est bien défini dans $H_4(\Lambda_t, 1)$ si et seulement si $(\bar{z}-P^*)^{-1}$ est bien défini dans $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$.

Donc si P est formellement autoadjoint, on a des résonances pour P considéré comme opérateur de $H_4(\Lambda_{-t}, m)$ dans $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$ conjuguées des précédentes.

Plus précisément si $\alpha(h)$ est une résonance de P, $F_{\alpha(h)}$ l'espace spectral associé et $\pi_{\alpha(h)}$ le projecteur spectral sur $F_{\alpha(h)}$ alors $\pi^*_{\alpha(h)}$ est le projecteur sur l'espace spectral $\tilde{F}_{\overline{\alpha}(h)}$ associé à la résonance $\overline{\alpha}(h)$ de P dans $H_4(\Lambda_{-t},1)$ et on a la :

Proposition 2.3 ([5] 8.11):

F_α *et* $\tilde{F}_\beta$ *sont orthogonaux si* $\alpha \neq \overline{\beta}$. *De plus* dim F_α = dim $\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$ *et si* $\phi_1,\ldots,\phi_n$ *est une base de* F_α *, alors il existe une base* $\psi_1,\ldots,\psi_n$ *de* $\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$ *telle que* $(\phi_i|\psi_j)=\delta_{i,j}$. *Le projecteur* π_α *prend alors la forme :*

$\pi_\alpha u = \Sigma_{i=1}^n (u|\psi_j)\phi_j$.

La matrice de $P\big|_{F_\alpha}$ *est donnée par :* $\big((P\phi_j|\psi_j)\big)$.

On suppose dorénavant qu'on a choisi G impaire.

Le résultat principal de cette section est le :

Théorème 2.4 :

La dimension de l'espace spectral est paire.

Démonstration du théorème 2.4 :

Ce théorème, analogue au théorème de Kramers pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac, utilise le même opérateur antilinéaire K :

$K : u \quad \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \overline{u}$, de $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$, où $\overline{u}$ désigne le conjugué complexe de u.

On a K D(h)=D(h) K , au sens des opérateurs sur C_0^∞. Mais on veut faire opérer K dans les espaces $H_4(\Lambda_t,1)$. On démontre le :

Lemme 2.5 :

La conjugaison complexe $u \to \overline{u}$ *opère de* $H_4(\Lambda_t, 1)$ *dans* $H_4(\Lambda_{-t}, 1)$.

Démonstration du lemme 2.5 dans le cas des espaces définis à la section 1.6.

Soit m une fonction d'ordre sur Λ_{tG} paire en ξ (ou telle que $m(x,-\xi)$ est équivalent à $m(x,\xi)$). On suppose que G est impaire en ξ. On va en déduire une bijection entre Λ_{tG} et Λ_{-tG}.

Soit $(\beta_x, \beta_\xi) \in \Lambda_{tG}$ et $(\gamma_x, \gamma_\xi) = (\mathrm{Re}\, \beta_x, \mathrm{Re}\, \beta_\xi)$.

On a par définition de Λ_{tG} :

$$\beta_x = \gamma_x + it \frac{\partial G}{\partial \gamma_\xi}(\gamma_x, \gamma_\xi)$$

$$\beta_\xi = \gamma_\xi - it \frac{\partial G}{\partial \gamma_x}(\gamma_x, \gamma_\xi) .$$

On fait correspondre à (β_x, β_ξ) le point (α_x, α_ξ) de Λ_{-tG} de partie réelle $(\gamma_x, -\gamma_\xi)$, c'est-à-dire :

$$\alpha_x = \gamma_x + it \frac{-\partial G}{\partial \gamma_\xi}(\gamma_x, -\gamma_\xi) = \gamma_x - it \frac{\partial G}{\partial \gamma_\xi}(\gamma_x, \gamma_\xi) = \overline{\beta_x} \quad \text{puisque G est impaire en } \xi.$$

$$\alpha_\xi = -\gamma_\xi - it \frac{-\partial G}{\partial \gamma_x}(\gamma_x, -\gamma_\xi) = -\gamma_\xi - it \frac{\partial G}{\partial \gamma_x}(\gamma_x, \gamma_\xi) = -\overline{\beta_\xi} .$$

Reprenons la définition (1.12) de la transformée de F.B.I. et regardons la phase ϕ :

$$\phi(x,\beta) = (\beta_x - x)\beta_\xi + i \frac{\langle \beta_\xi \rangle}{\langle \beta_x \rangle}(x - \beta_x)^2 .$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -\overline{\phi}(x,\alpha) &= -\left\{ (\alpha_x - x)\alpha_\xi + i \frac{\langle \alpha_\xi \rangle}{\langle \alpha_x \rangle} (x - \alpha_x)^2 \right\}^{-} \\ &= -(\overline{\alpha}_x - x)\, \overline{\alpha}_\xi + i \frac{\langle \alpha_\xi \rangle}{\langle \alpha_x \rangle} (x - \overline{\alpha}_x)^2 \\ &= (\beta_x - x)\, \beta_\xi + i \frac{\langle \beta_\xi \rangle}{\langle \beta_x \rangle} (x - \beta_x)^2 \\ &= \phi(x,\beta). \end{aligned}$$

Regardons maintenant le poids exponentiel H :

$$H_{tG}(\beta) = -\mathrm{Re}\,\beta_\xi \,.\, \mathrm{Im}\,\beta_x + t\, G(\mathrm{Re}\,\beta_x, \mathrm{Re}\,\beta_\xi)$$
$$= -\gamma_\xi \left(t \frac{\partial G}{\partial \gamma_\xi}(\gamma_x,\gamma_\xi)\right) + tG(\gamma_x,\gamma_\xi).$$

On a $H_{-tG}(\alpha) = -\mathrm{Re}\,\alpha_\xi \,.\, \mathrm{Im}\,\alpha_x - t\, G(\mathrm{Re}\,\alpha_x, \mathrm{Re}\,\alpha_\xi)$

$$= \gamma_\xi \left(-t \frac{\partial G}{\partial \gamma_\xi}(\gamma_x,\gamma_\xi)\right) - tG(\gamma_x,-\gamma_\xi)$$
$$= H_{tG}(\beta).$$

Soit maintenant $u \in H_4(\Lambda_{tG},m)$ (cf définition 1.1).

Alors $u \in \tilde{H}^{-N}_{\varepsilon,4}(\mathbb{R}^3)$ donc clairement $\overline{u} \in H^{-N}_{\varepsilon,4}(\mathbb{R}^3)$. Il reste à vérifier la condition d'intégrablilité de la transformée de F.B.I. de $\overline{u}$.

On a, puisque $u \in H_4(\Lambda_{tG},m)$:

$$\int_{\Lambda_{tG}} |Tu(\beta,h)|^2 \,(m(\mathrm{Re}\beta))^2\, e^{-2H(\beta)/h}\, d\alpha \;<\; +\infty.$$

Calculons $T\overline{u}(\alpha,h)$ avec (1.12) :

$$T\overline{u}(\alpha,h) = \int e^{i\frac{\phi(x,\alpha)}{h}}\, t(x,\alpha,h)\, \chi\Big(\frac{x-\mathrm{Re}(\alpha_x)}{\langle\alpha_x\rangle}\Big)\, \overline{u}(x)\, dx$$
$$= \Big\{ \int e^{-i\overline{\phi}(x,\alpha)/h}\, \overline{t}(x,\alpha,h)\, \overline{\chi}\Big(\frac{x-\mathrm{Re}(\alpha_x)}{\langle\alpha_x\rangle}\Big)\, u(x)\, dx \Big\}^{-}.$$

D'où $\;(T\overline{u}(\alpha,h))^{-} = \int e^{i\frac{\phi(x,\beta)}{h}}\, t(x,\beta,h)\, \chi\Big(\frac{x-\mathrm{Re}(\beta_x)}{\langle\beta_x\rangle}\Big)\, \overline{u}(x)\, dx$,

si on suppose que t est à valeurs réelles, ne dépendant que de Re β, et pair en Re β_ξ.

Finalement $Tu(\beta,h) = (T\overline{u}(\alpha,h))^{-}$.

Lorsque β décrit Λ_{tG}, α décrit Λ_{-tG} donc comme $|d(\mathrm{Re}\,\beta)| = |d(\mathrm{Re}\,\alpha)|$ et $H_{-tG}(\alpha) = H_{tG}(\beta)$, on a :

$$\int_{\Lambda_{-tG}} |T\overline{u}(\alpha,h)|^2 \,(m(\mathrm{Re}\,\alpha))^2\, e^{-2H(\alpha)/h}\, d\alpha \;<\; +\infty$$

et $u \in H_4(\Lambda_{-tG},m)$.

Le lemme permet de montrer que K opère de $H_4(\Lambda_t,1)$ dans $H_4(\Lambda_{-t},1)$ et de $H_4(\Lambda_{-t},1)$ dans $H_4(\Lambda_t,1)$. Pour éviter les confusions, on notera :

$K_t = K\big|_{H_4(\Lambda_t,1)}$ pour $-t_0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Comme σ_2 est imaginaire pure, on a : $K_{-t}K_t = -Id_{H_4(\wedge_t,1)}$.

Soit α une résonance pour l'opérateur de Dirac et F_α l'espace résonant associé.

Il résulte de la commutation de D(h) et de K que K_t opère de F_α dans $\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$ et K_{-t} de $\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$ dans F_α.

Soit alors $\mathcal{K}$ la matrice $((K_t\phi_i|\phi_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(\phi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de F_α.

$\mathcal{K}$ est inversible, car $K_tK_{-t} = -I$, et l'inverse de $\overline{\mathcal{K}}$ est la matrice $(-(K_{-t}\psi_i|\psi_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (car $\mathcal{K}$ est la matrice de K_t dans les bases (ϕ), (ψ) où (ψ) est "duale au sens hermitien" de (ϕ)).

Mais, si l'on note $\phi_i = (\phi_i^1, \phi_i^2, \phi_i^3, \phi_i^4)$ les 4 composantes de ϕ_i (qui sont dans $H_4(\wedge_t,1;\mathbb{C}^4)$), on a :

$(K_t\phi_n|\phi_m) = \int_{\mathbb{R}^3}(-i\,\overline{\phi}_n^2\,\overline{\phi}_m^1 + i\,\overline{\phi}_n^1\,\overline{\phi}_m^2 - i\overline{\phi}_n^4\,\overline{\phi}_m^3 + i\overline{\phi}_n^3\,\overline{\phi}_m^4)\,dx = -(K_t\phi_m|\phi_n)$.

Donc $\mathcal{K}$ est antisymétrique (${}^t\mathcal{K} = -\mathcal{K}$) , d'où :

$\text{dét}(\mathcal{K}) = \text{dét}({}^t\mathcal{K}) = (-1)^n\,\text{dét}(\mathcal{K})$

et $(-1)^n = 1$ car $\mathcal{K}$ est inversible, et n est pair.

Remarque 2.6 :

Une analyse plus fine de la matrice de D(h)-z restreinte à F_α montre même que, pour $i\in\mathbb{N}$, dim Ker($(D(h)-z)^i$) est paire.

Démonstration de la remarque 2.6 :

Ce résultat est une conséquence du théorème plus général suivant :

Théorème 2.7 :

Soit E *et* E' *deux espaces vectoriels de même dimension finie* k *munis d'une forme sesquilinéaire non dégénérée notée* (|). *Soit* K *une bijection* *antilinéaire de* E *dans* E' *vérifiant :*

$\forall \phi,\psi \in E\times E$, $(\phi|K\psi) = -(\psi|K\phi)$.

Soit D *un opérateur linéaire de* E *dans* E, *nilpotent et vérifiant :* $KD=D'K$,

où D' *est l'adjoint de* D *pour la forme sesquilinéaire* (|) *(i.e.*

$(\phi|KD\psi) = (D\phi|K\psi)$*)*.

Alors Ker D^i *est de dimension paire.*

Dans notre cas $E=F_\alpha$, $E'=\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$, (|) est le produit scalaire L^2, K l'opérateur antilinéaire de Kramers, D l'opérateur D(h)-z restreint à F_α, D' l'opérateur $D(h)-\overline{z}$ restreint à $\tilde{F}_{\overline{\alpha}}$ et on prend $z=\alpha$.

Passons à la démonstration du théorème dans ce cadre plus abstrait.

On utilise le lemme suivant :

<u>Lemme 2.8 :</u>

Supposons que $D^n=0$ *et* $D^{n-1}\neq 0$. *Alors* $\mathrm{Im}D^{n-1}$ *est de dimension paire.*

Admettons ce lemme pour l'instant. On fait alors un raisonnement par récurrence sur l'indice de nilpotence n.

Soit $(\phi_i)_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ tels que $(D^{n-1}\phi_i)$ soit une base de Im D^{n-1} (ℓ est alors pair d'après le lemme).

Si n=1, alors c'est terminé car $\mathrm{Ker}D=E=\mathrm{Im}D^{1-1}$ donc a pour dimension ℓ qui est pair.

Sinon montrons que :

$$E = \mathrm{Vect}_{0\leqslant i\leqslant n-1, 1\leqslant j\leqslant \ell}\, D^i(\phi_j) \oplus [\mathrm{Vect}_{0\leqslant i\leqslant n-1, 1\leqslant j\leqslant \ell}\, KD^i(\phi_j)]^\perp = F\oplus G$$

(le signe " $\perp$ " désigne l'orthogonal pour (|)).

On prouvera ensuite que F et G sont stables par D, que K opère de G dans

$G'=F^{\perp}$, puis que D^{n-1} est nul sur G pour appliquer l'hypothèse de récurrence à G.

Pour les dimensions, on a bien $\dim E=\dim F+\dim G$ (car on montre sans difficultés que $(D^i\phi_j)$ est une famille libre).

Reste à montrer que $F\cap G=\{0\}$. En effet si :

$\Sigma_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{ij}\, D^i\phi_j \in [\mathrm{Vect}_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\, KD^i(\phi_j)]^{\perp}$

alors $\forall k,m,\quad (\Sigma_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{ij}\, D^i\phi_j|KD^m\phi_k)=0$.

Pour $m=n-1$, on obtient :

$\forall k,\qquad (\Sigma_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{ij}\, D^i\phi_j|KD^{n-1}\phi_k)=0$.

D'où, comme $\mathrm{Im}\, D^{n-1}=\mathrm{Vect}_{1\leqslant j\leqslant \ell}\, D^{n-1}(\phi_j)$, on a :

$\forall \phi\in E,\qquad (\Sigma_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{ij}\, D^i\phi_j|KD^{n-1}\phi)=0$.

Donc $\qquad KD^{n-1}(\Sigma_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{ij}\, D^i\phi_j)=0$

et $\qquad \Sigma_{1\leqslant j\leqslant \ell}\ \alpha_{0j}\, D^{n-1}\phi_j=0$.

Finalement $\forall j$, $\alpha_{0j}=0$.

En faisant $m=n-2,\dots,0$, on obtient $\alpha_{ij}=0$ pour $i\in[0,n-1]$ et $j\in[1,\ell]$.

On a de même (ou par dualité) $E'=G^{\perp}\oplus F^{\perp}$.

Montrons que K opère de G dans $F^{\perp}=G'$.

En effet si $\qquad x\in[\mathrm{Vect}_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\, KD^i(\phi_j)]^{\perp}$

alors $\forall i,j,\qquad (x|\, KD^i\phi_j)=0$

donc $\qquad (D^i\phi_j|Kx)=0$

et $\qquad Kx\in [\mathrm{Vect}_{0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant \ell}\, D^i(\phi_j)]^{\perp}=F^{\perp}$.

D opère clairement de F dans F ; voyons pour G.

Si $x\in G$, alors $\forall i,j$ x est orthogonal à $KD^i\phi_j$,

donc $\forall i,j,\qquad (Dx|KD^i(\phi_j))=(x|KD^{i+1}\phi_j)=0$

donc $\forall i,j,\qquad$ Dx est orthogonal à $KD^i\phi_j$ $\qquad$ et $Dx\in G$.

On en déduit immédiatement que $D^{n-1}\big|_G=0$ car D^{n-1} opère de G dans $G\cap \mathrm{Im}D^{n-1}=\{0\}$ puisque $\mathrm{Im}D^{n-1}$ est inclus dans F.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G et on a :

$\forall i,\quad \mathrm{Ker}D^i\big|_G$ est pair.

Or $E=F\oplus G$ et D laisse F et G stables donc $\mathrm{Ker}D^i=\mathrm{Ker}D^i\big|_G\oplus \mathrm{Ker}D^i\big|_F$.

Pour conclure, il reste à voir que $\mathrm{Ker}D^i\big|_F$ est de dimension paire. Or $\dim \mathrm{Ker}D^i\big|_F=\inf(i,n-1)\times \ell$ et ℓ est pair.

Il nous reste à démontrer le lemme.

On utilise la même astuce que dans la démonstration du théorème 1.12; en construisant une matrice $\ell x\ell$ antisymétrique et inversible (cette astuce m'a été suggérée par Yves Eichenlaub).

Soit (ϕ_i) tel que $(D^{n-1}\phi_i)_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ soit une base de Im D^{n-1}.

Soit $\mathcal{K}$ la matrice $((D^{n-1}\phi_j|K\phi_i))_{1\leqslant i,j\leqslant \ell}$. Montrons que $\mathcal{K}$ est antisymétrique et que son noyau est {0}, on en déduira que ℓ est pair.

En effet $\quad (D^{n-1}\phi_j|K\phi_i)=-(\phi_i|KD^{n-1}\phi_j)=-(D^{n-1}\phi_i|K\phi_j)$,

c'est l'antisymétrie.

De plus si $(\beta_i)\in \mathrm{Ker}\mathcal{K}$, alors :

$\forall i\in[1,\ell],\qquad \Sigma_{1\leqslant j\leqslant \ell}\,(D^{n-1}\phi_j|K\phi_i)\,\beta_j=0$.

D'où $\qquad (\Sigma_{1\leqslant j\leqslant \ell}\,\beta_j\phi_j|KD^{n-1}\phi_i)=0$.

Soit $\quad \phi=\Sigma_{1\leqslant j\leqslant \ell}\,\beta_j\phi_j$.

Alors $\qquad \forall \phi'\in E,\ (\phi|KD^{n-1}\phi')=0\quad$ puisque Im $D^{n-1}=\mathrm{Vect}(D^{n-1}\phi_i)$.

D'où $\qquad KD^{n-1}\phi=0_E$, et $D^{n-1}\phi=0_E$

donc $\forall i\in[1,\ell]$, $\alpha_i=0$ et le noyau de $\mathcal{K}$ est {0}.

ℓ est alors pair car il existe une matrice $\ell x\ell$ $\mathcal{K}$, antisymétrique et inversible (det$\mathcal{K}$ est non nul et ${}^t\mathcal{K} = -\mathcal{K}$).

■■■■■■■■■■■■■■■

BIBLIOGRAPHIE

[1] : J. Aguilar & J.M. Combes :
A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians
Comm. Math. Phys. 22 (1971), 280-294

[2] : E.Balslev & B.Helffer :
Limiting absorption principle and resonances for the Dirac operator
Preprint Université Aarhus 1990

[3] : D.R.Grigore, G.Nenciu et R.Purice
On the nonrelativistic limit of the Dirac hamiltonian
Annales de l'I. H. P., sect. Physique théorique, vol. 51, n°3, 1989, p.231-263

[4] : B. Helffer & A.Martinez :
Comparaison entre les diverses notions de résonances.
Acta Physica Helvetica, vol. 60(1987), p.992-1003

[5] : B. Helffer & J. Sjöstrand :
Résonances en limite semi-classique
Mémoires n° 24/25 de la SMF (1986), Tome 114, Fasc.3

[6] : B.Parisse :
Résonances paires pour l'opérateur de Dirac
note aux C.R.A.S., t.310, série I, p. 265-268 (1990).

[7] : P. Seba :
The complex scaling method for Dirac resonances
Preprint BIBOS 1987 et Lett. Math. Phys. 16(1988),n°1, p.51-59

[8] : X.P.Wang :
Puits multiples pour l'opérateur de Dirac
Annales de l'IHP volume 43, n°3, 1985, p. 269-319