Magnetoakustische Resonanz und Zerfall eines Plasmas

Autor(en): **Cantieni, Edgar / Schneider, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **36 (1963)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113413

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

© 1963 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Société Suisse de Physique – Società Fisica Svizzera
Nachdruck verboten – Tous droits réservés – Printed in Switzerland

Magnetoakustische Resonanz und Zerfall eines Plasmas*)

von **Edgar Cantieni** und **Helmut Schneider**
(Physikalisches Institut der Universität, Freiburg i. Ü.)

(3. VII. 63)

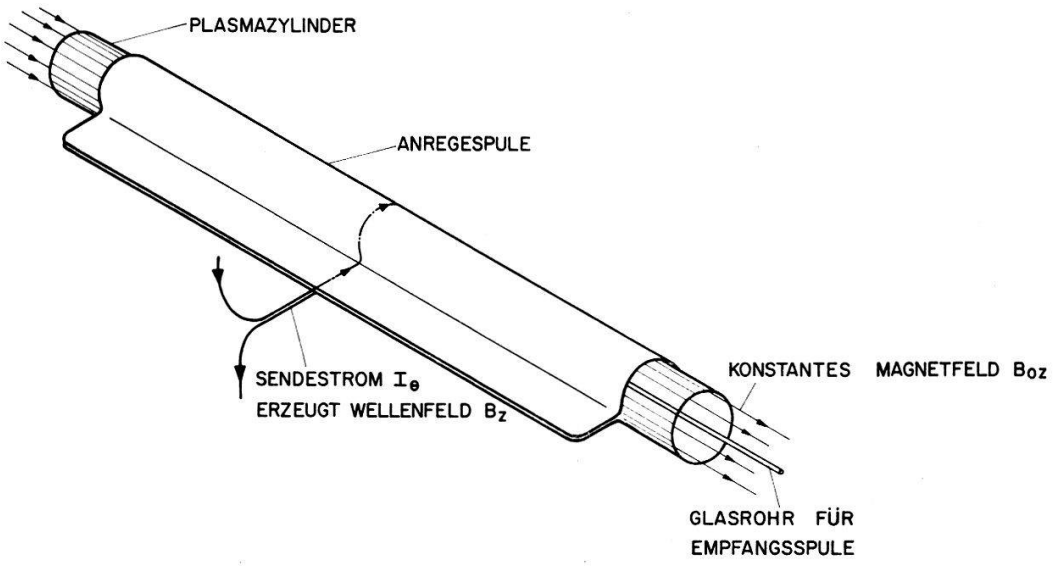
Abstract: An experimental and theoretical investigation of the magnetoacoustic resonance in a cylindrical argon plasma is presented. The plasma, which is immersed in an axial magnetic field, is generated by a discharge current and is highly ionized. The wave is excited at the plasma boundary by an auxiliary B_z-coil and travels radially to the center of the cylinder. Linearized theory is used to obtain the solution for the general case of partial ionization. The solutions for the resonance curves and the radial distribution of the wave magnetic field are presented with the degree of ionization as a parameter. Measurements are shown to be in good agreement with theory. It is shown, that magnetoacoustic resonance can be used as a new diagnostic method for the determination of the ion density of a partially ionized plasma. Densities measured spectroscopically from Stark broadening of the H_β line are in agreement with densities measured with magnetoacoustic resonance within the errors. The decay of the ion density, which follows the cooling of the plasma, is discussed.

I. Einleitung

Die Ausbreitung von Wellen in leitenden Medien ist schon oft Gegenstand eingehender Untersuchungen verschiedener Autoren gewesen. Das Interesse an diesem Fachgebiet steht in engem Zusammenhang mit einer Anzahl von Problemen der Astro- und Ionosphärenphysik wie auch der Fusionsforschung, insbesondere erscheint es wünschenswert, durch experimentelle Untersuchungen im Laboratorium die Verbindung mit den Resultaten der Theorie herzustellen. Während nun die Theorie der Plasmawellen heute bereits ziemlich weitgehend ausgearbeitet ist, sind experimentelle Ergebnisse, die über rein qualitative Beobachtungen hinausgehen, noch äusserst spärlich. Die experimentellen Schwierigkeiten liegen hauptsächlich darin, dass die im Labor erzeugten Plasmen eine beschränkte räumliche Ausdehnung aufweisen, sodass meistens die Berandungen einen grossen Einfluss haben. Diese sind aber in den meisten Fällen theoretisch schwierig zu erfassen. Die ersten Wellenexperimente im magneto-

*) Diese Arbeit wurde durch die finanzielle Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

hydrodynamischen Bereich sind von einer Gruppe in Berkeley (Al59) (Wi60) (Wi61) und einer Gruppe in Harwell (Je59) (Ha59) (Je61) (Je62) durchgeführt worden. Diese Untersuchungen erstrecken sich auf die transversalen magnetohydrodynamischen Wellen, Alfvén Wellen, die sich längs des Magnetfeldes ausbreiten. Die zylindrische Geometrie ist für diesen Modus besonders geeignet, da man in diesem Fall bei geeigneter Anregung eine Torsionswelle erhält, deren Geschwindigkeit derjenigen im freien Raum entspricht und die keine Dispersion zeigt. Bei der longitudinalen magnetohydrodynamischen Kompressionswelle (magnetoakustischer Modus) existiert keine dem Wellentypus angepasste Geometrie und man muss entweder versuchen, die Bedingungen des freien Raumes zu approximieren (Sc62) (Ho63) oder man untersucht diesen Modus in Form einer stehenden Welle. In einer früheren kurzen Arbeit (Ca62) ist dieses Phänomen der magnetoakustischen Resonanz kurz beschrieben worden und die Resultate einiger Vorexperimente wurden angegeben. Hier soll nun die Theorie abgeleitet werden und ein Experiment, bei dem die magnetoakustische Resonanz gefunden und systematisch ausgemessen wurde, beschrieben werden. Ein zylindrisches Plasma, in welchem ein axiales Magnetfeld «eingefroren» ist, wird mit Hilfe einer axialen gepulsten Gasentladung erzeugt. Dabei werden Ionisationsgrade bis gegen hundert Prozent erreicht und die Ionendichte zerfällt mit einer Zeitkonstanten von einigen hundert Mikrosekunden. Nach Beendigung der Entladung finden wir ein ruhiges Plasma vor, das als Experimentiermedium dient. Mit Hilfe einer Erregerspule, in welcher ein azimutaler Strom fliesst, wird die magnetoakustische Welle, die hier radial nach innen läuft, erzeugt (Figur 1). Das innerhalb dieser Spule durch eine



Figur 1
Prinzip der Anregung der magnetoakustischen Resonanz

schnelle, schwach gedämpfte Kondensatorentladung erzeugte Wellenfeld B_z wird dabei sehr klein gegenüber dem konstanten Magnetfeld B_{oz} gewählt, sodass wir das Problem theoretisch in linearer Näherung behandeln können. Auf der Zylinderaxe befindet sich eine magnetische Miniatursonde, welche das Wellenfeld B_z ($r = 0$) misst. In dieser Geometrie ist das Problem theoretisch explizit lösbar, und wie man leicht

einsieht, können geometriebedingte Resonanzen auftreten. Da Ionisationsgrad und Temperatur als Parameter in die Lösung eingehen, können durch Vergleich mit der Theorie die Zustandsgrössen des Plasmas bestimmt werden. Man kann also die magnetoakustische Resonanz als neue Diagnostikmethode verwenden und in diesem Falle ist es wünschenswert, die erhaltenen Resultate für die Ionendichte mit denjenigen einer bereits bekannten und völlig unabhängigen Diagnostikmethode zu vergleichen. Zu diesem Vergleich wurden spektroskopische Methoden herangezogen, die es gestatten, Ionendichte und Temperatur zu bestimmen.

II. Theorie

Die Theorie der magnetohydrodynamischen Wellen ist von verschiedenen Autoren entwickelt worden, siehe zum Beispiel (Al43) (He50) (Ba55) (Ne57) (Le59) (Ga59/60/61). Unter den zusammenfassenden Artikeln verdienen diejenigen von LÜST (Lü59) und BERNSTEIN (Be60) besondere Erwähnung. Die neuesten Arbeiten über hydromagnetische Wellen in zylindrischen Plasmen stammen von WOODS (Wo61a/61b/62). Die Schwingungen eines vollionisierten Plasmazylinders im Magnetfeld sind von KÖRPER (Kö57/60) und auch von FRANK-KAMENETSKII (Fr61a) durchgerechnet worden, wogegen für ein nicht vollionisiertes Plasma nur die Dispersionsrelation vorliegt (Fr61b). In dieser Arbeit soll nun eine explizite Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen für die radialen Schwingungen eines teilweise ionisierten, zylindrischen Plasmas entwickelt werden, wobei man sowohl die Resonanzkurve als auch die radiale Verteilung des Wellenfeldes erhält. Dieser allgemeinere Fall ist auch experimentell realisierbar.

1. Grundgleichungen

Wir beschreiben das teilweise ionisierte Plasma mit Hilfe einer Zweiflüssigkeitstheorie («Plasma» und Neutralteilchen) in linearer Näherung, wobei wir Druckterme vernachlässigen (kaltes Plasma), als dissipative Effekte aber den Ohm'schen Widerstand (Stösse zwischen Elektronen und Ionen) in tensorieller Form und die Stösse zwischen Ionen und Neutralteilchen berücksichtigen. Eine Abschätzung zeigt, dass für Temperaturen unterhalb etwa 10 eV, also im speziellen für ein teilweise ionisiertes Plasma, die Viskosität vernachlässigt werden kann. Wir beschränken uns im weiteren auf den magnetohydrodynamischen Bereich, das heisst auf niedere Frequenzen $\omega \ll k\,c, \omega_{ei}, \omega_0$ (k Wellenzahl, c Lichtgeschwindigkeit, ω_{ei} Stossfrequenz Elektronen-Ionen, ω_0 hybride Frequenz). Die Elektronenmasse wird gegenüber der Ionenmasse vernachlässigt und Quasineutralität vorausgesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir ein Gleichungssystem, das die mit der Welle verbundenen hydrodynamischen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_p$ und $\boldsymbol{v}_n$ von Plasma bzw. Neutralteilchen, die Dichteschwankungen ϱ_p und ϱ_n, das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und die makroskopische Stromdichte $\boldsymbol{j}$ miteinander verbindet. Die Kontinuitätsgleichungen für Plasma und Neutralteilchen

$$\frac{\partial \varrho_p}{\partial t} = -\varrho_{op} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v}_p\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varrho_n}{\partial t} = -\varrho_{on} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v}_n \tag{2}$$

sind nicht mit den übrigen Gleichungen gekoppelt und dienen nur zur Bestimmung der Dichteschwankungen ϱ_p und ϱ_n. Dabei ist ϱ_{op} bzw. ϱ_{on} die konstante Dichte ($\varrho_{tot} = \varrho_o + \varrho$, $\varrho \ll \varrho_o$) von Plasma bzw. neutraler Komponente und $\varrho_o = \varrho_{op} + \varrho_{on}$. In der Bewegungsgleichung für das Plasma

$$\varrho_{op} \frac{\partial \boldsymbol{v}_p}{\partial t} = \frac{1}{c} (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_0) - \varrho_{op}\, \omega_{in}\, (\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_n) \tag{3}$$

und in derjenigen für die neutrale Komponente

$$\varrho_{on} \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial t} = \varrho_{op}\, \omega_{in}\, (\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_n) \tag{4}$$

bedeutet ω_{in} die Stossfrequenz zwischen Ionen und Neutralteilchen (die Stösse zwischen Elektronen und Neutralteilchen können vernachlässigt werden) und $\boldsymbol{B}_0$ das konstante äussere Magnetfeld, das im hier untersuchten zylindrischen Fall in axialer Richtung weist (Linearität bedeutet auch hier $| B | \ll | B_0 |$).

Im weiteren haben wir noch die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{6}$$

und das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$\boldsymbol{j} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v}_p \times \boldsymbol{B}_0 \right), \tag{7}$$

mit dem Leitfähigkeitstensor $\boldsymbol{\sigma}$, der, falls wir die Richtung des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}_0$ mit der z-Richtung identifizieren, die Form annimmt (Ma 60):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_3 & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Im Falle $\omega_e \tau \gg 1$ sind die Komponenten dieses Tensors durch die Ausdrücke gegeben:

$$\sigma_1 = 1{,}93\, \sigma_\perp, \quad \sigma_2 = \sigma_\perp / (\omega_e \tau)^2, \quad \sigma_3 = -\sigma_\perp / \omega_e\, \tau. \tag{9}$$

$\sigma_\perp$ ist die Leitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld:

$$\sigma_\perp = \omega_p^2 / 4\pi\, \omega_{ei}^{\perp}, \tag{10}$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = n_0\, I\, \frac{4\pi e^2}{m}. \tag{11}$$

(n_0 Teilchendichte vor der Ionisation, $I = \varrho_{op}/\varrho_0$ Ionisationsgrad, m Elektronenmasse, e Elektronenladung.)

Die Zyklotronfrequenzen für Ionen und Elektronen und die hybride Frequenz lauten:

$$\omega_e = \frac{e\,B_0}{m\,c}, \qquad \omega_i = \frac{e\,B_0}{M\,c}, \qquad \omega_0^2 = \omega_e\,\omega_i \tag{12}$$

wobei M die Ionenmasse ist. $\omega_{ei}^{\perp}$ ist die Stossfrequenz zwischen Elektronen und Ionen senkrecht zum Magnetfeld:

$$\omega_{ei}^{\perp} = \frac{1}{\tau} = n_0\,I\,Q_{ei}^{\perp}\left(\frac{8\,k\,T}{m\,\pi}\right)^{1/2} \tag{13}$$

wobei k hier die Boltzmannkonstante und T die Temperatur bedeutet, während der Stossquerschnitt durch den Ausdruck gegeben ist:

$$Q_{ie}^{\perp} = 3{,}13 \cdot \ln \Lambda \cdot (e^2/k\,T)^2, \tag{14}$$

$$\Lambda = 1{,}1 \cdot k\,T/e^2\,(I\,n_0)^{1/3}. \tag{15}$$

Für die Stossfrequenz zwischen Ionen und Neutralteilchen erhalten wir eine Gleichung (13) entsprechende Formel:

$$\omega_{in} = n_0\,(1 - I)\,Q_{in}\left(\frac{16\,k\,T}{M\,\pi}\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Der Stossquerschnitt Q_{in} muss Experimenten entnommen werden. Bei hohen Temperaturen ist das angegebene Gleichungssystem nicht mehr vollständig, da einerseits die Viskosität der Ionen (bei den hier untersuchten Dichten etwa oberhalb 10 eV) und anderseits bei kleinen Magnetfeldern der kinetische Druck berücksichtigt werden muss. Das Plasma ist dann aber vollionisiert, sodass die Gleichung für die Neutralteilchen wegfällt. Die Temperatur der hier untersuchten Plasmen beträgt maximal 3 eV, sodass die erwähnte Verallgemeinerung in diesem Zusammenhang nicht von Interesse ist.

Bei kleinen Temperaturen und somit auch kleinen Ionisationsgraden (kleiner als etwa ein Prozent) müssen die Stösse zwischen Elektronen und Neutralteilchen berücksichtigt werden; das angegebene Gleichungssystem kann aber mit Leichtigkeit auf diesen Fall verallgemeinert werden. Dieser Bereich soll hier aber nicht untersucht werden, da die Resonanzen in einem Argonplasma bei den in dieser Arbeit gewählten Parametern dort nicht mehr feststellbar sind. Er kann aber wohl für ein anderes Gas und eine andere Parameterwahl von Bedeutung sein.

2. Lösung der Gleichungen für stehende Wellen

Wir suchen periodische Lösungen von der Form $\exp(-i\,\omega\,t)$, wobei ω die Kreisfrequenz der Welle ist. Im weiteren sei noch ein Einheitsvektor in z-Richtung definiert durch:

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0 \cdot \boldsymbol{n}. \tag{18}$$

Das Gleichungssystem lässt sich nun durch Elimination von $\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{E}$ auf eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung für die makroskopische Stromdichte $\boldsymbol{j}$ reduzieren:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{g}\,(\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{j}))\right\} + \frac{i\,\omega}{4\,\pi} \cdot \frac{c^2}{a_0^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\eta\,\boldsymbol{j} + \frac{\omega^2}{a_0^2}\,\boldsymbol{j} = 0. \tag{19}$$

g ist eine Funktion des Ionisationsgrades und des unten definierten Parameters x und ist im allgemeinen über den Ionisationsgrad und die Temperatur ortsabhängig:

$$g = I\,(1 + i\,x)/(1 + i\,I\,x). \tag{20}$$

Der Widerstandstensor $\boldsymbol{\eta}$, der durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{\sigma} = 1 \tag{21}$$

mit dem Leitfähigkeitstensor verbunden ist, hat dieselbe Form wie (8) und seine Komponenten lauten ($\omega_e\,\tau \gg 1$):

$$\eta_1 = 1/\sigma_1\,, \quad \eta_2 = 1/\sigma_\perp\,, \quad \eta_3 = \omega_e\,\tau/\sigma_\perp\,. \tag{22}$$

Für die weitere Behandlung setzen wir räumliche Homogenität von Temperatur und Ionisationsgrad voraus. Wir werden im Abschnitt II.5 einen allgemeineren Fall diskutieren. Wir suchen nun eine rotationssymetrische Lösung von Gleichung (19) für einen unendlich langen Zylinder ($\partial \boldsymbol{j}/\partial\varphi = \partial \boldsymbol{j}/\partial z = 0$). Unter diesen Voraussetzungen muss nur noch eine Differentialgleichung für die azimutale Komponente des Stromes erfüllt werden und diese lautet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\,r + K^2\right) j_\phi = 0\,. \tag{23}$$

K ist gegeben durch

$$K = \frac{\omega}{a}\,(1 - i\,z)^{-1/2} \tag{24}$$

und a ist die Alfvéngeschwindigkeit

$$a^2 = a_0^2/F_1\,, \quad a_0^2 = B_0^2/4\,\pi\,\varrho_0\,, \tag{25}$$

$$F_1 = I\,(1 + x^2)/(1 + I\,x^2)\,, \tag{26}$$

$$x = \omega_{in}/(1 - I)\,\omega\,. \tag{27}$$

Im Falle $x^2 \ll 1$ nehmen nur die geladenen Teilchen an der Wellenbewegung teil und man erhält $F_1 = I$. In die Alfvéngeschwindigkeit geht in diesem Falle die Ionendichte ein. Falls aber $x^2 \gg 1$ ist, gibt es während jeder Periode viele Stösse und daher werden auch die Neutralteilchen bei der Wellenbewegung mitgerissen; hier gilt dann $F_1 = 1$ und $a = a_0$.

Der Dämpfungsparameter

$$z = y\,F_1 + x\,F_2 \tag{28}$$

setzt sich aus zwei Summanden zusammen, dessen erster $y\,F_1$ mit

$$y = \omega\,\frac{\perp}{ei}\,\omega/I\,\omega_0^2 \tag{29}*)$$

von den Stössen zwischen Elektronen und Ionen herrührt, während $x\,F_2$ mit

$$F_2 = (1 - I)/(1 + I\,x^2) \tag{30}$$

den Stössen zwischen Ionen und Neutralteilchen zuzuschreiben ist.

*) In der früheren Notiz (Ca62) sollte für y auch der Ausdruck (29) stehen.

Gleichung (23) wird bei Berücksichtigung der Regularitätsforderung auf der Zylinderaxe durch eine Besselfunktion integriert:

$$j_\phi(r) = A \cdot J_1(K r) \qquad (r < \mathrm{R}) \tag{31}$$

Aus Gleichung (5) erhält man leicht das Magnetfeld, das nur eine axiale Komponente hat:

$$B_z(r) = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{A}{K} J_0(K r)\,. \tag{32}$$

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die stromführende Spule unmittelbar an den Plasmazylinder mit dem Radius R grenzt und die Stromdichteverteilung in der Spule sei durch eine Diracsche Deltafunktion gegeben:

$$j_\phi(r) = I_\phi \cdot \delta(r - R)\,. \tag{33}$$

I_ϕ ist der anregende Oberflächenstrom pro Längeneinheit.

Da der Brechungsindex des Plasmas $n = K/k$ viel grösser als 1 ist, kann man das Wellenfeld ausserhalb der Spule, das durch die Maxwellschen Vakuumgleichungen gegeben ist, vernachlässigen. Mit Hilfe der Grenzbedingungen, die bei LÜST (Lü53) (Kö57) angegeben sind, lässt sich die Integrationskonstante A bestimmen und man erhält für das Wellenfeld den Ausdruck:

$$B_z(r) = -\frac{4\pi}{c} I_\phi \frac{J_0(K r)}{J_0(K R)}\,. \tag{34}$$

Zum Vergleich mit dem Experiment interessiert uns nur der absolute Betrag des Magnetfeldes und wir wollen diesen in Einheiten der ohne Plasma induzierten Feldstärke

$$B_z^{ind} = \frac{4\pi}{c} I_\phi \tag{35}$$

angeben, wobei wir wieder die Bezeichnung B_z verwenden wollen:

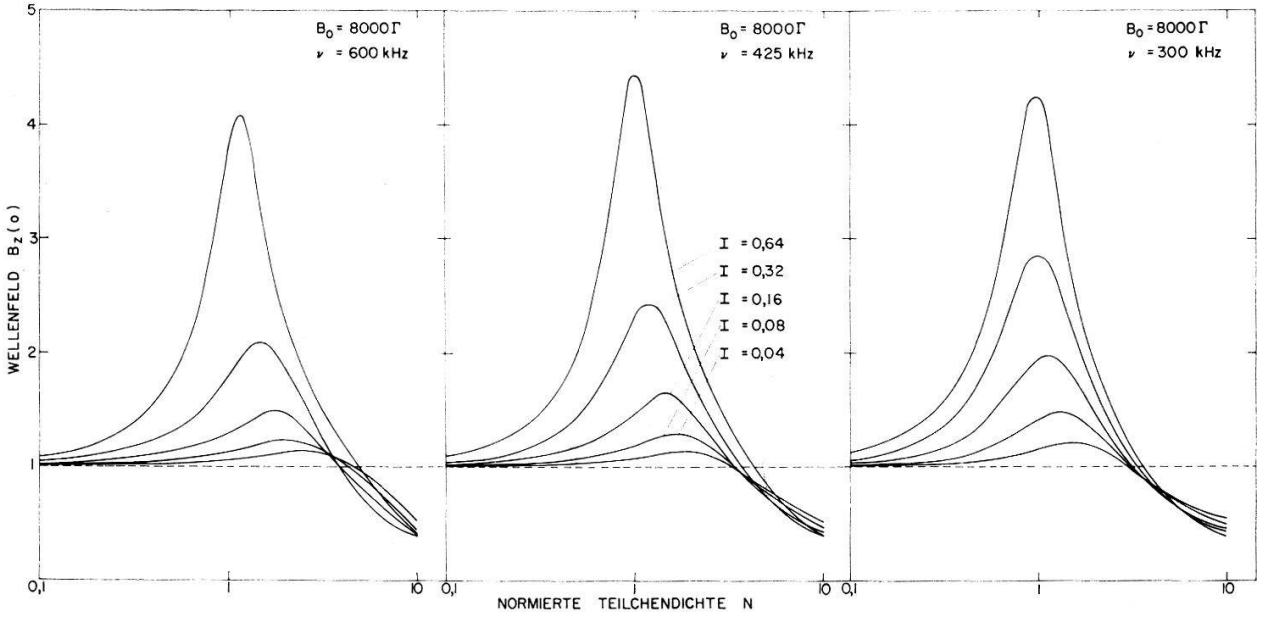
$$B_z(r) = |J_0(K r)|/|J_0(K R)|\,. \tag{36}$$

3. Diskussion der Resonanzkurven eines Argon-Plasmas

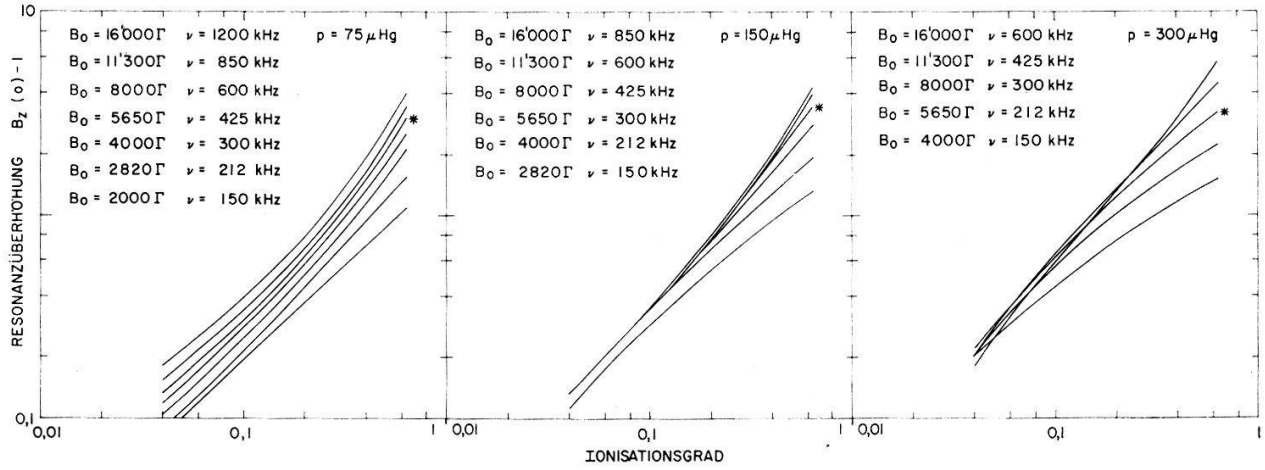
Die Resonanzkurve für $r = 0$ ist durch Gleichung (36) mit $J_0(0) = 1$ gegeben. Das Argument KR ist nun für ein bestimmtes Gas und für einen gegebenen Plasmaradius abhängig vom statischen Magnetfeld $\boldsymbol{B}_0$, von der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ und von der Anfangsdichte n_0. Im weiteren hängt es ab von der Temperatur und vom Ionisationsgrad, die für die Dämpfung massgebend sind. Diese beiden Grössen sind nun aber voneinander abhängig, und wir müssen die Funktion $I(T)$ kennen. Diesen Zusammenhang werden wir in Abschnitt II.6 behandeln und wir benützen im folgenden die dort abgeleitete Gleichung.

Zur Berechnung der Stossfrequenz zwischen Ionen und Neutralteilchen, Gleichung (16), müssen wir die Stossquerschnitte kennen, welche wir Experimenten entnehmen. Der totale Wirkungsquerschnitt (elastischer plus Umladungsquerschnitt) und der Umladungsquerschnitt für Argon wurden von ZIEGLER (Zi53) mit Hilfe einer Lauf-

zeitmethode für die Energie 1 eV bestimmt zu $Q_{tot} = 0{,}9\ 10^{-14}$ cm² und $Q_u = 0{,}55\ 10^{-14}$ cm² auf etwa $10^0/_0$ genau. Aus Beweglichkeitsmessungen berechnete Werte liegen etwas höher ($Q_{tot} = 1{,}34\ 10^{-14}$ cm²). Dies ist verständlich, da der Wirkungsquerschnitt bei tieferen Energien etwas zunimmt und der aus Beweglichkeitsmessungen berechnete Wert bereits über die Geschwindigkeitsverteilung gemittelt ist. Da unsere Temperaturen etwas höher liegen, haben wir den Berechnungen den Wert $Q_{in} = 1{,}0\ 10^{-14}$ cm² zugrunde gelegt.



Figur 2
Berechnete Resonanzkurven für ein Argon Plasma



Figur 3
Resonanzüberhöhung in Funktion des Ionisationsgrades für Argon.
Die mit * bezeichneten Kurven entsprechen den Resonanzkurven von Figur 2

Damit haben wir die Resonanzkurven für Argon für verschiedene Kombinationen der Parameter B_0 und ν (insgesamt 36) und für die Ionisationsgrade 4, 8, 16, 32 und $64^0/_0$ in Funktion der Teilchendichte n_0 (die proportional zum Arbeitsdruck ist) mit Hilfe einer IBM 7070 berechnet. Für drei Parameterpaare sind die berechneten

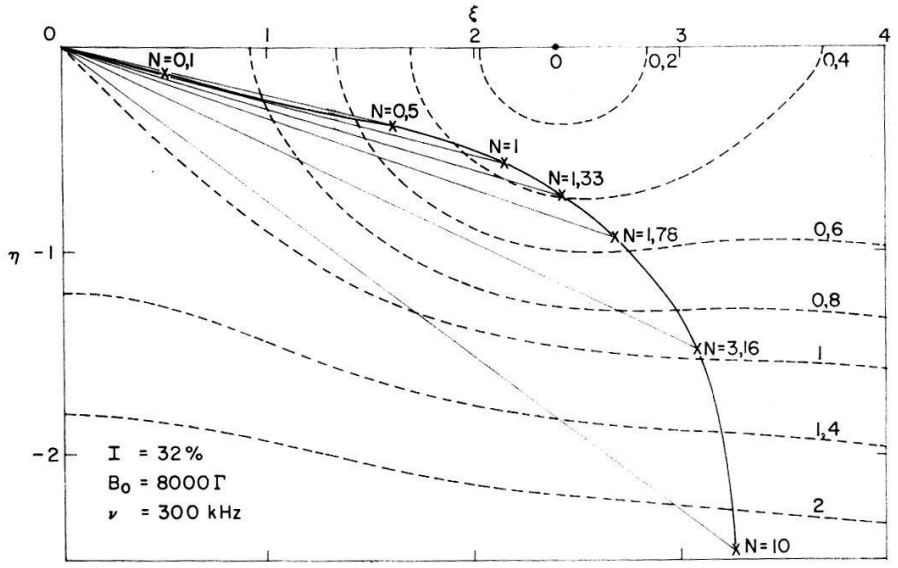
Resonanzkurvenscharen in Figur 2 aufgetragen. In Figur 3 ist die Resonanzüberhöhung in Funktion des Ionisationsgrades für 18 Parameterkombinationen aufgetragen. N ist die normierte Teilchendichte, welche durch den Ausdruck gegeben ist:

$$N = (\omega\, R/2{,}4 \cdot a_0)^2. \tag{37}$$

Ohne Dissipationseffekte würde die erste Resonanz in einem vollionisierten Plasma bei $N = 1$ liegen.

4. Die radiale Verteilung des Wellenfeldes

Ihr Verlauf, der durch Gleichung (36) gegeben ist, und auch derjenige einer Resonanzkurve lassen sich am besten aus Figur 4 überblicken. Die gestrichelten Linien stellen den Absolutbetrag der Funktion $J_0\,(\xi + i\,\eta)$ dar, die ausgezogene Linie ist die Resonanzkurve für die angegeben Parameter und aus den dünnen Strahlen kann man die Werte von $B_z\,(r)$ ablesen. Die aus dieser Darstellung entnommenen Werte sind in Figur 5 aufgetragen. Das Argument $\xi + i\,\eta$ der Besselfunktion wurde zusammen mit $B_z\,(0)$ mit der IBM 7070 berechnet.



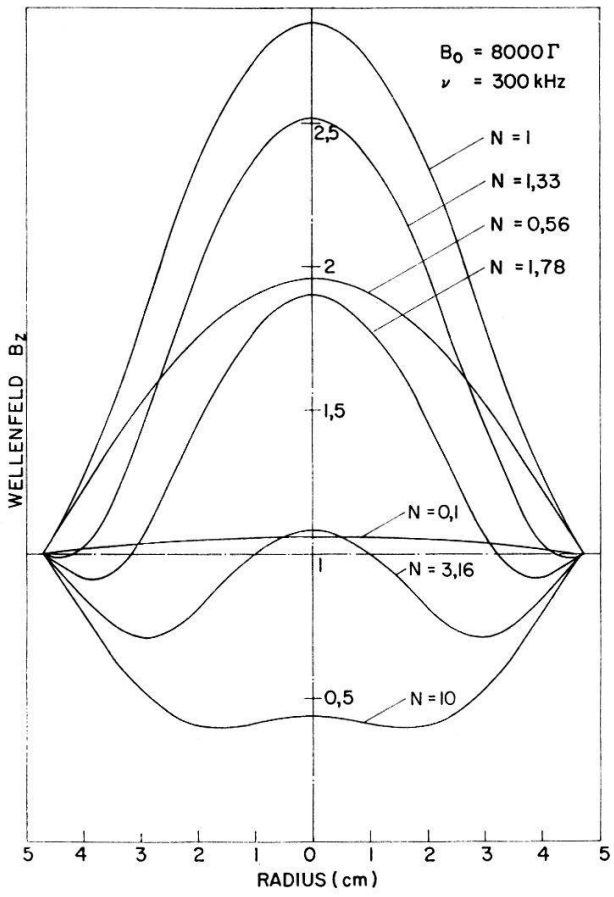
Figur 4

Resonanzkurve (ausgezogen) und dazugehörige radiale Verteilungen (dünne Strahlen) in der ξ-η-Ebene.
Die gestrichelten Kurven sind die Höhenlinien von $|\,J_0\,(\xi + i\eta)|$

Aus den beiden Figuren ist ersichtlich, dass die radiale Verteilung vor der Resonanz, das heisst solange die Phase klein bleibt, im wesentlichen eine reelle Besselfunktion ist, während im andern Extremfall, beim Phasenwinkel $\pi/4$ (konjugiert komplexes Argument), die radiale Verteilung dieselbe Form hat wie beim Eindringen eines Wellenfeldes in ein Plasma ohne Magnetfeld. Man kann aus Figur 4 auch ersehen, dass wegen des schnellen Umbiegens der Resonanzkurve in der $\xi - \eta$-Ebenen unter den vorliegenden Bedingungen keine weiteren Resonanzen auftreten können.

5. Einfluss der radialen Verteilung der Ionendichte

Zur Ableitung von Gleichung (23) haben wir angenommen, dass sowohl Ionendichte als auch Temperatur nicht vom Radius abhängen. In diesem Abschnitt wollen



Figur 5

Berechnete radiale Verteilungen für die Parameter von Figur 4

wir für die Ionendichte eine beliebige radiale Verteilung zulassen und die Modifikation von Gleichung (23) besprechen. Den Ionisationsgrad schreiben wir noch zweckmässig in der Form

$$I(r) = I_0 / (1+f(r)), \tag{38}$$

wobei $f(r)$ auf der Axe verschwindet ($I(0) = I_0$), im übrigen aber beliebig ist. Diese Form ist für kleine Abweichungen vom konstanten Wert besonders geeignet. Mit Gleichung (38) und (20) erhält man aus (19) leicht die Beziehung:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\,r + K^2\right\} j_\phi = -H^2\,\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\,r\,f(r)\,j_\phi . \tag{39}$$

Dabei muss überall I durch I_0 ersetzt werden und für H erhält man den Ausdruck:

$$H^2 = (1 - i\,x)\,(1 + i\,z)/(1 + I_0\,x^2)\,(1 + z^2) . \tag{40}$$

Solange der Term auf der rechten Seite klein ist, können wir das Problem störungsmässig behandeln. Wir wollen anhand eines Beispiels versuchen, die Verschiebung der Resonanz quantitativ abzuschätzen.

Wir betrachten den Fall, wo x und y viel kleiner als 1 sind ($H = 1$) und die radiale Verteilung der Ionendichte sei durch

$$f(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2;\; I(r) = I_0/(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2) \tag{41}$$

gegeben, wobei r_0 noch frei gewählt werden kann. Bei störungsmässiger Behandlung können wir für den Zusatzterm schreiben: $-((K\,r/r_0)^2 + 3/r_0^2)$. Wir bilden einen Mittel-

wert über den Radius und erhalten $r^2 = R^2/4$ und bei Resonanz gilt in erster Näherung $KR = 2{,}4$. Damit erhalten wir nun wieder die Differentialgleichung (23), wobei aber K durch K' ersetzt werden muss, welches durch den Ausdruck gegeben ist:

$$K'^2 = K^2 \left\{1 + 0{,}75 \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right\}. \tag{42}$$

Falls wir zum Beispiel $R = r_0$ annehmen, was eine sinnvolle Ionendichteverteilung ergibt, folgt $K' = 1{,}3\,K$. Diese Vergrösserung von K entspricht einer Verschiebung der Resonanz nach kleineren Dichten oder einer Verkleinerung des effektiven Plasmaradius auf $R' = R/1{,}3$. Diese Verschiebung tritt auch im Experiment (Kap. V.2) auf und ist von der in diesem Beispiel besprochenen Grössenanordnung. Diese rohe Abschätzung gibt aber nur die Verschiebung der Resonanz. Zur strengen Behandlung müsste man die Lösung von Gleichung (39) in einer Summe von Zylinderfunktionen suchen. Da die rechte Seite das Auftreten von Besselfunktionen höherer Ordnung bewirkt, erhält man zur Verschiebung auch noch eine Abflachung der Resonanz.

6. Zusammenhang zwischen Temperatur und Ionisationsgrad

Im thermodynamischen Gleichgewicht (Teilchen und Strahlung) ist dieser Zusammenhang durch die Saha-Gleichung gegeben (Eg19) (Sa20). Die meisten experimentell erzeugten Plasmen sind aber optisch dünn, und es ist kein Strahlungsgleichgewicht vorhanden. Nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichtes gilt die Saha-Gleichung aber auch dann, wenn die Stossprozesse für sich schon im Gleichgewicht sind und die Strahlungsprozesse vernachlässigt werden können. Dies trifft für Elektronendichten zu, die etwa 10^{17} cm^{-3} überschreiten. Falls man zu sehr kleinen Elektronendichten übergeht, wo die angeregten Zustände des Atoms nur die Rolle einer Zwischenstation innehaben (capture-cascade theory), erhält man die Elwertsche Coronaformel (El52), wo für das Ionisationsgleichgewicht nur Photorekombination und Stossionisation massgebend ist. Für einen grossen Dichtebereich, jedenfalls für den uns interessierenden mit Elektronendichten zwischen 3.10^{14} cm^{-3} und 3.10^{16} cm^{-3} sind beide Grenzfälle unrealistisch und wir müssen die Besetzungen der angeregten Zustände im Einzelnen betrachten. Abschätzungen dieser Art zur Bestimmung des Rekombinationskoeffizienten sind kürzlich auch von anderen Autoren durchgeführt worden (Ba61) (MW61) (An61) (Hi61) (Hi62) und ausgedehnte Berechnungen für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Ionen sind von Bates und Mitarbeitern publiziert worden (Ba62).

Damit diese Berechnungen zur Bestimmung des Ionisationsgleichgewichtes eines zerfallenden Plasmas sinnvoll werden, muss sich das Plasma in einem Quasigleichgewicht befinden, das heisst die Zahl der Rekombinationen Z_r und die Zahl der Ionisationen (oder Anregungen) Z_i aus dem Grundzustand müssen die Bedingung erfüllen $Z_r, Z_i \gg Z_r - Z_i$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Zerfall des Plasmas durch das Absinken der Temperatur und nicht durch Rekombinationen erfolgen muss. Die Bestätigung dass diese Forderung erfüllt ist, erhalten wir aus dem gemessenen Plasmazerfall in Kapitel VII.

Wir betrachten nun ein wasserstoffähnliches Atom (diese Näherung genügt für praktische Zwecke, da die dadurch eingeführten Fehler nicht grösser sind als zum Beispiel diejenigen der Stossquerschnitte), das die Ionisierungsenergie des Argons

besitzt. Alle Zustände werden nun durch folgende Prozesse bevölkert und entvölkert: Dreierstossrekombinationen, Strahlungsrekombinationen, Stossionisationen, Stossübergänge erster und zweiter Art zwischen gebundenen Zuständen, spontane Strahlungsübergänge (optisch dünnes Plasma).

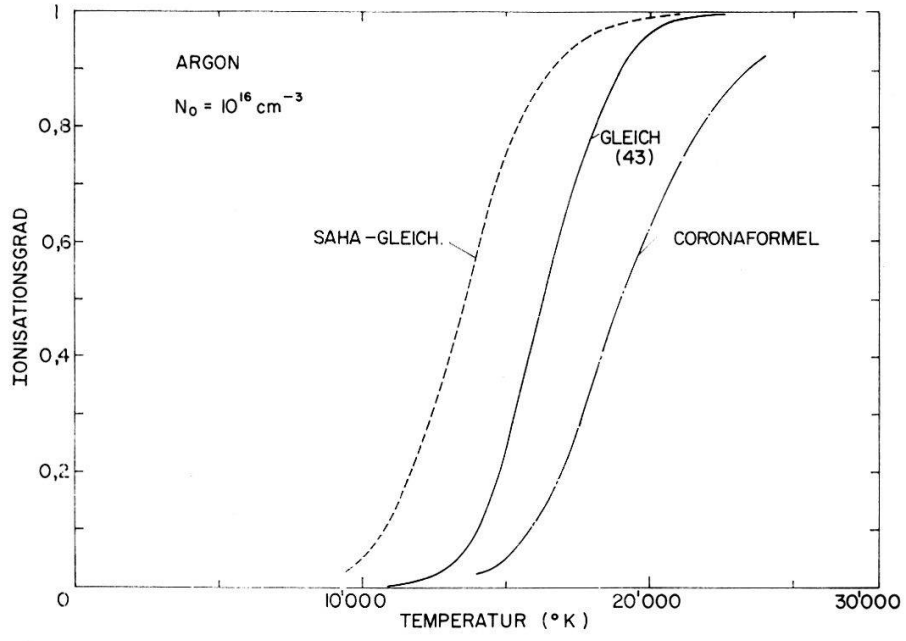
Im Gleichgewicht sind nun für jeden Zustand die Summe der bevölkernden Übergänge gleich der Summe der entvölkernden Übergänge und wir erhalten im Prinzip ein unendliches lineares Gleichungssystem für die Besetzungszahlen der Zustände, deren Koeffizienten Funktionen der Elektronendichte und der Temperatur sind. In praxi bleibt aber nur ein endliches Gleichungssystem übrig, da von einem bestimmten Zustand an, der im wesentlichen von der Elektronendichte abhängt, die Gleichungen identisch erfüllt sind und die Zustände sich im Sahagleichgewicht befinden.

Eine Abschätzung ergibt nun, dass für den Dichtebereich von 2.10^{14} cm^{-3} bis 6.10^{16} cm^{-3} (für Argon) alle Zustände ausser dem Grundzustand im Sahagleichgewicht sind (oberhalb dieser Grenze ist auch der Grundzustand im Sahagleichgewicht). Zur Besetzung des Grundzustandes tragen die spontanen Strahlungsübergänge aus dem ersten angeregten Zustand (der nach Saha bevölkert ist) den Hauptteil bei, während die Entvölkerung des Grundzustandes durch Stossanregung in den ersten angeregten Zustand vor sich geht. Für die Absorptionsoszillatorenstärke nehmen wir diejenige von Wasserstoff und den Wirkungsquerschnitt für Stossanregung berechnen wir mit Hilfe einer Formel des Drawinschen Typus (Dr61).

Damit erhalten wir für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Ionisationsgrad die Gleichung:

$$I/(1-I) = 0{,}9 \cdot 10^7 \cdot exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)\Big/\left(\frac{E_i}{kT}\right)^2. \tag{43}$$

Sie ist im angegebenen Elektronendichtebereich gültig und hängt nicht von der Dichte ab. $E_i = 15{,}68$ eV ist die Ionisierungsenergie des Argons. Die Coronaformel ergibt für



Figur 6

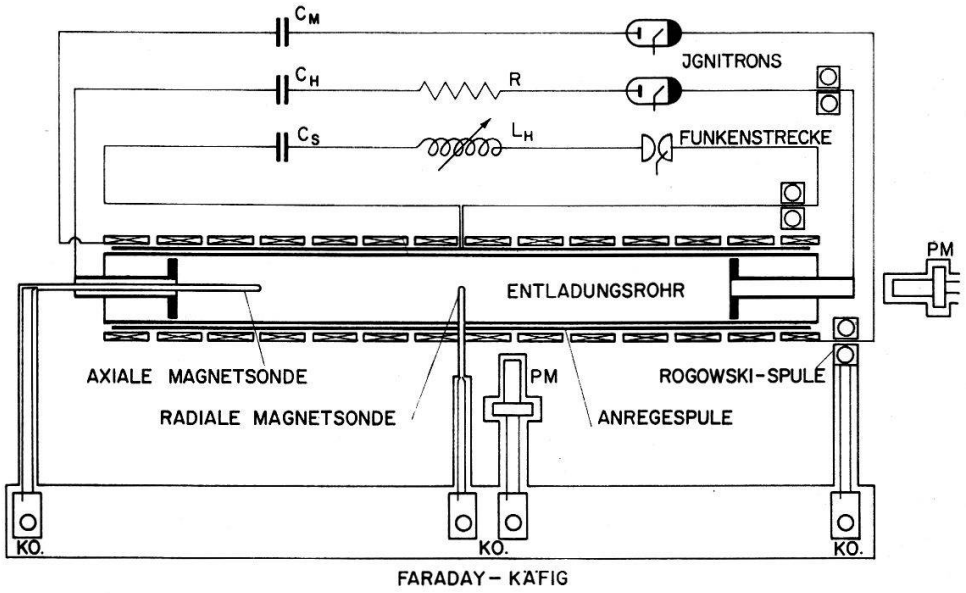
Zusammenhang zwischen Temperatur und Ionisationsgrad nach der Saha-Gleichung, nach Gleichung (43) und nach der Coronaformel

eine feste Ionendichte Temperaturen, welche etwa 20% grösser sind als die aus Gleichung (43) berechneten, während die Sahagleichung für zum Beispiel $n_0 = 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ ungefähr 20% tiefere Temperaturen liefert (Figur 6).

III. Entladungs- und Messapparaturen

1. Das Entladungsrohr

Das Entladungsgefäss besteht aus einem Pyrexrohr von 100 cm Länge und 9,4 cm Innendurchmesser. Zwei flache, dünne Elektroden aus rostfreiem Stahl, die sich im Abstand von 80 cm befinden, begrenzen den Entladungsraum. Die beiden Elektroden sind in der Mitte durchbohrt um Sonden- und optische Messungen in axialer Richtung zu ermöglichen. Ein Pyrexröhrchen, in dem sich eine axiale Magnetsonde befindet, kann unter Vakuum in axialer Richtung verschoben werden. Für Sondenmessungen in radialer Richtung wurde in der Mitte des grossen Pyrexrohres in einem Durchmesser ein dünnes Röhrchen eingeschmolzen (Figur 7).



Figur 7

Blockschema der Entladungsanordnung. C_M Magnetfeldbank. C_H Bank für Hauptentladung, R Dämpfungswiderstand für Hauptentladung, C_S Kondensator für Sender, L_H variable Hilfsinduktivität für Sender

Die Entladung wurde mit Hilfe der Kondensatorbank C_H, welche aus 10 parallelgeschalteten Kondensatoren zu je 7,7 μF besteht, erzeugt. Diese wird über einen Dämpfungswiderstand R mit Hilfe eines Ignitrons gezündet. Als Zuleitung zum Entladungsgefäss dient ein koaxiales Doppelmantelkabel. Bei allen hier beschriebenen Experimenten wurde die Bank auf 10 kV aufgeladen.

2. Das Magnetfeld

Dem Plasma wurde in den meisten Fällen ein quasistatitisches, gepulstes axiales Magnetfeld, hier mit B_0 bezeichnet, überlagert, welches in einem langen Solenoid erzeugt wurde. Die verwendeten Spulen sind immer einlagig gewickelt, abgesehen von den Enden, wo sie zweilagig sind. Damit konnte mit einer 100 cm langen Spule im Raum zwischen den Elektroden eine axiale Homogenität von $\pm$ 1% erreicht werden. Es sind zwei verschiedene Spulentypen verwendet worden. Für Magnetfelder bis zu 10 kGauss wurde ein Solenoid mit etwa 500 Windungen mit der Kondensatorbank C_M, wieder bestehend aus 10 Kondensatoren von total 77 μF, parallelgeschaltet. Der resultierende Schwingkreis hatte eine Periode von $T = 3{,}6$ ms und die Ladespannung betrug auch hier maximal 10 kV. Um grössere Magnetfelder bis zu 20 kGauss zu erreichen, wurde ein zweiter Spulentypus konstruiert, bei dem vier verschiedene Kreise, immer um je vier Windungen

versetzt, auf einem Spulenkörper gewickelt wurden, wobei in jeden Kreis simultan eine 77 μF-Bank entladen wurde. Für die Experimente wurde die Zeit um das erste Strommaximum der Entladung ausgenützt; so variiert dort zum Beispiel bei $T = 3{,}6$ ms das Magnetfeld während 400 μs um weniger als $\pm$ 3%.

3. Das Erregersystem für die magnetoakustische Resonanz

Der Kreis besteht aus der Erregerspule mit der Induktivität L_E, der Hilfsinduktivität L_H und dem Kondensator C_S. Die Sendeentladung wurde mit Hilfe einer Dreielektrodenfunkenstrecke (Lu61) gezündet, welche bei optimaler Einstellung sehr kleine Zündschwankungen (30 ns) aufweist. Durch Variation des Kondensators C_S (0,1 bis 1 μF) und der Hilfsinduktivität L_H konnten Frequenzen zwischen 150 und 1200 kHz erreicht werden.

4. Das Vakuumsystem

Die meisten hier beschriebenen Experimente wurden mit Argon durchgeführt. Das Entladungsgefäss wurde dabei während des Experimentes kontinuierlich durchspült. Nach einer Belüftung wurde das Entladungsrohr mit Hilfe einer Öl-Diffusionspumpe auf 0,8 bis 1,0 10^{-5} mm Hg ausgepumpt. Der Arbeitsdruck wurde mit Hilfe eines Pirani-Gerätes, bei höheren Drücken mit einem Atlas-Membranmanometer gemessen. Kontroll- und Eichmessungen des Piranigerätes wurden mit Hilfe eines McLeod-Manometers ausgeführt.

5. Die Steuerung

Die Verzögerung des Magnetfeldes, der Entladung, des Senderpulses und auch der Drehspiegelkamera wurde mit Hilfe von komerziellen Delay-Einheiten vorgenommen. Bei einem typischen Steuerungsablauf wurde zuerst das Magnetfeld gezündet, welches zum Beispiel in der Spule 1 nach 900 μs seinen maximalen Wert erreicht und zwischen 700 und 1100 μs weniger als $\pm$ 3% variiert. In diesem Zeitintervall wird zuerst die Entladung gezündet und zum Beispiel 100 μs später der Sender. Die Steuerimpulsgeräte befinden sich zusammen mit den Oszillographen im Faraday-Käfig, während die Impulsverstärker sich aussen befinden.

6. Elektrische Messungen

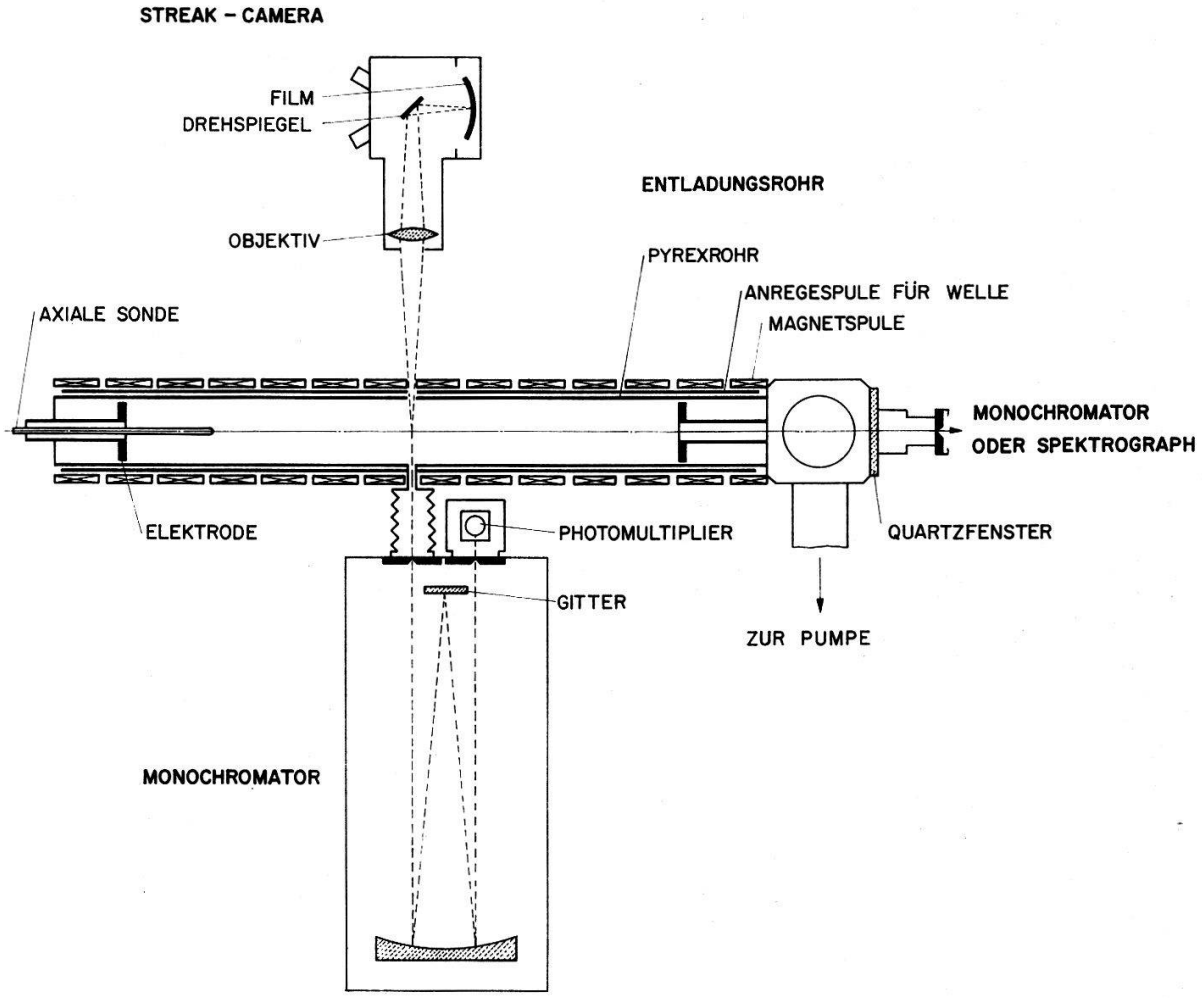
Die elektrischen Messungen wurden mit Hilfe zweier Zweistrahloszillographen durchgeführt. Die Ströme von Hauptentladung und Sender wurden induktiv mit Rogowski-Spulen und nachfolgender RC-Integration gemessen. Für die Messung des Wellenfeldes im Plasma, sowohl in radialer als auch in axialer Richtung, wurden magnetische Miniatursonden verwendet. Die Spulen hatten einen Aussendurchmesser von 2, bzw. 3 mm und waren durch einen aufgeschlitzten Kupferschirm elektrostatisch abgeschirmt.

7. Spektroskopische Diagnostik

In diesem Abschnitt sollen die für die spektrographischen Dichte- und Temperaturbestimmungen benützten Apparaturen kurz beschrieben werden.

Für spektrographische Aufnahmen des ganzen Spektrums wurde ein Füess-UV-Spektrograph verwendet. Zeitaufgelöste spektroskopische Messungen wurden mit Hilfe eines Jarrel-Ash Gittermonochromators (0,5 m Brennweite, Dispersion 16 Å/mm) mit photoelektrischem Detektor und einer zweiten photoelektrischen Abtastvorrichtung, welche auf dem Spektrographen montiert werden konnte, durchgeführt.

Als Detektoren wurden Photomultiplier RCA 1P28 verwendet. Das Ausgangssignal wurde ohne Kathodenfolger über ein abgeschlossenes 160 Ohm Kabel (Kh61) auf einen Oszillographen gegeben und mit einer Polaroid Kamera photographiert. Die Linearität der Schaltung wurde mit Hilfe einer reproduzierbaren, gepulsten Lichtquelle getestet, wobei festgestellt wurde, dass die Ausgangsimpulse bis zu etwa 5V formgetreu waren. Man hatte also einen Linearitätsbereich von über 3 Zehnerpotenzen zur Verfügung. Zur Abschirmung elektromagnetischer Störungen waren die Photomultiplier von einem Messingbehälter umgeben, welcher durch einen Kupferschirm mit der Messzelle verbunden war, in welcher sich neben den Oszillographen auch die Speisegeräte für die Photomultiplier befanden.



Figur 8
Schema des Entladungsrohres mit Hilfsapparaturen

8. Die Drehspiegelkamera

Um zeitlich aufgelöste Aufnahmen der Entladung zu erhalten, wurde eine Drehspiegelkamera gebaut (Figur 8). Die Kamera besitzt ein lichtstarkes (f/2,8) Objektiv von 180 mm Brennweite. Mit einer maximalen Umdrehungszahl des Stahlspiegels von 45000 U.p.M. kann eine Schreibgeschwindigkeit von 1 mm/μs erreicht werden. In der Filmebene kann entweder eine Polaroid-Kassette oder eine Kassette für 6 $\times$ 9 cm^2 Rollfilm angebracht werden. Die Lichtstärke der Kamera erlaubt es, bei maximaler Schreibgeschwindigkeit farbige Drehspiegelkameraaufnahmen zu machen.

Die Synchronisierung geschieht mit einer Hilfslichtquelle, deren Strahl bei einer bestimmten Spiegelposition auf einen Phototransistor reflektiert wird, wobei zu diesem Zeitpunkt die Spiegelstellung definiert wird (Zeit Null). Durch elektronische Verzögerung werden sowohl das Magnetfeld als auch die Entladung zur gewünschten Zeit ausgelöst. Die langsamen Vorgänge, das heisst Beschleunigung des Spiegelantriebes auf Maximaltouren, öffnen und schliessen eines langsamen Verschlusses vor der Drehspiegelkamera, öffnen und schliessen der Oszillographenkameras zu gleichzeitigen Oszillographenaufnahmen werden durch eine elektromechanische Automatik betätigt.

IV. Der Entladungsverlauf mit und ohne Magnetfeld

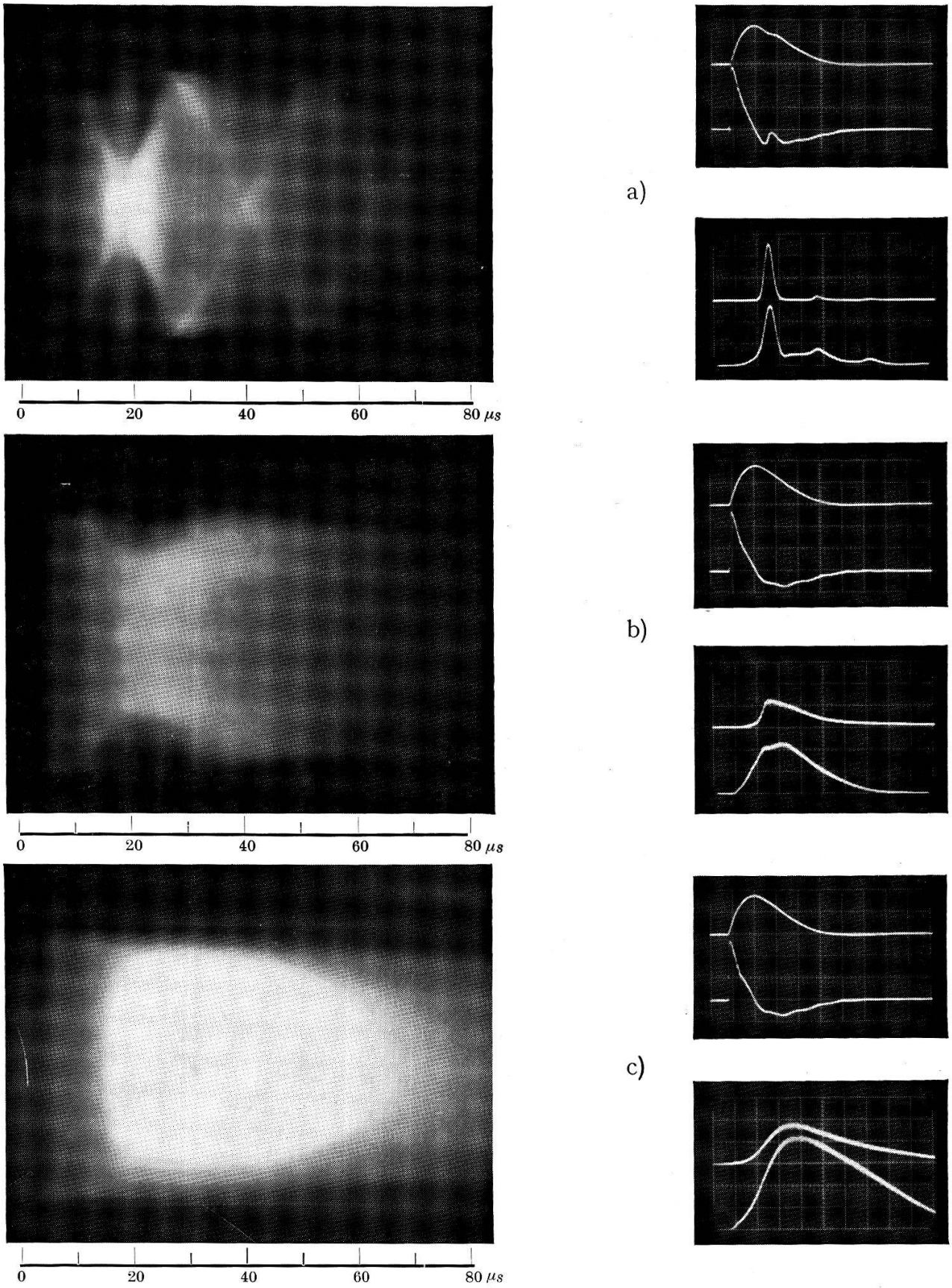
Die Hauptentladung ist kritisch gedämpft. Die Induktivität des Kreises zu Beginn der Entladung beträgt $L_a = 1{,}2$ μH und der totale Ohmsche Widerstand $R_{tot} =$ 0,25 Ohm. Wegen der Kontraktion des Plasmas (Pinch) vergrössert sich dessen Induktivität während der Entladung. Wir wollen den Entladungsverlauf für ein typisches Beispiel anhand der Drehspiegelkameraaufnahmen und Oszillogramme von Figur 9 betrachten. Der Argon-Gasdruck betrug hier 0,3 mm Hg; in den beiden oberen Oszillogrammen sind jeweils Strom- und Stromänderung, in den beiden unteren die Intensität der AII-Linie bei 4348 Å in axialer, bzw. radialer Richtung festgehalten.

a) Hier ist kein statisches axiales Magnetfeld B_0 vorhanden. Das Gas ist, wie in allen übrigen Fällen auch, nicht vorionisiert. Nach der Ionisierungsphase, bei welcher der ganze Querschnitt aufleuchtet, beginnt der Kontraktionsvorgang. Nach etwa 16 μs hat die Plasmasäule ihren minimalen Durchmesser erreicht, welcher, da die implodierende Schicht wegen der am Anfang noch schlechten Leitfähigkeit eine gewisse Dicke aufweist, durch das Zusammentreffen der reflektierten inneren Schichtgrenze und der noch kontrahierenden äusseren Schichtgrenze gegeben ist. Zu diesem Zeitpunkt hat der Strom bereits seinen Maximalwert überschritten. In der Stromänderungskurve ist zur Zeit der maximalen Kontraktion die Induktivitätsänderung sehr gut sichtbar. Die Intensität der AII-Linie erreicht hier ihr Maximum, da die Temperatur zu dieser Zeit ihren höchsten Wert erreicht, dabei müssen wir allerdings noch die Intensitätszunahme wegen der Kompression (Dichtezunahme) berücksichtigen. Nach der Kompression expandiert das Plasma wieder, und zwar bis an die Rohrwand, da der Strom abnimmt und dessen Magnetfeld der Expansion nicht mehr genügend Widerstand entgegensetzen kann. Bei kleineren Drücken erfolgt die erste Kompression früher und es konnten bis zu drei aufeinanderfolgende Kompressionen beobachtet werden bis dann Instabilitäten auftraten. Auch nachdem der Strom zu fliessen aufgehört hat, besitzt das Plasma noch radiale kinetische Energie und es wird wiederholt von der Rohrwand reflektiert, was zu der rhombusartigen Struktur der Drehspiegelkameraaufnahmen Anlass gibt und auch aus den AII-Oszillogrammen ersichtlich ist. Die Zeit bis zur ersten Kompression lässt sich mit Hilfe verschiedener Modelle (free-particle Modell, Schneepflugmodell, Adiabatenmodell) abschätzen und stimmt mit den experimentellen Werten gut überein.

b) Bei dieser Aufnahme ist vor der Entladung ein axiales Magnetfeld von 2 kGauss vorhanden. Dieses setzt der Kompression einen magnetischen Druck entgegen, sodass die resultierende Kompression nur noch gering ist. Das Plasma zerfällt auch langsamer als bei a).

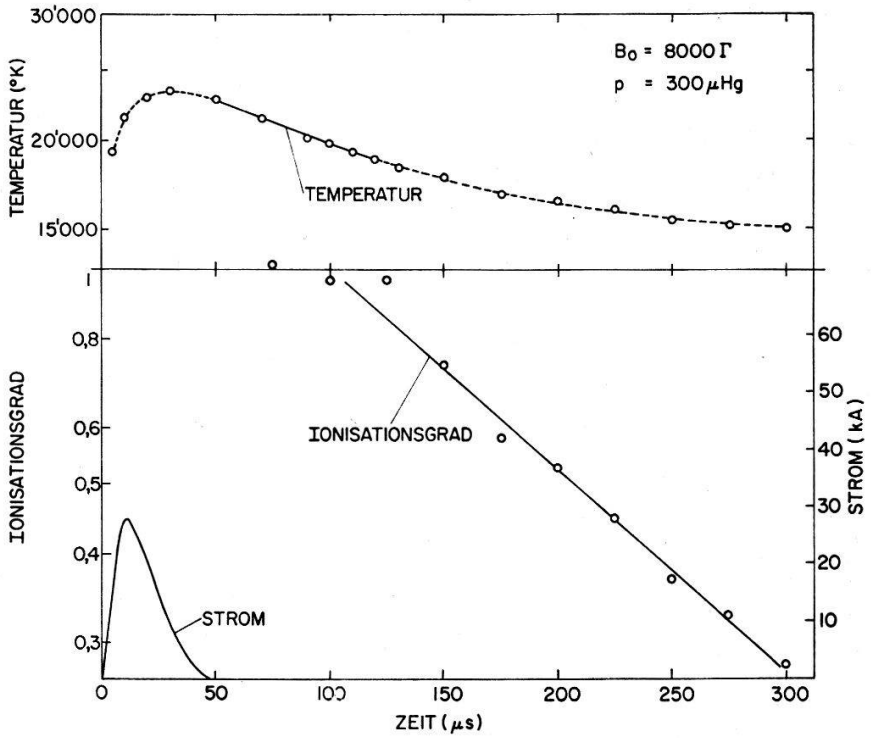
c) Bei einem Magnetfeld von 8 kGauss wird das Plasma nicht mehr komprimiert. Die Entladung ist während der ganzen Zeit homogen über den Querschnitt verteilt. Die maximale Intensität der AII-Linie und somit auch das Temperaturmaximum werden nach ungefähr 30 μs erreicht (Figur 10), also kurz vor dem Ende des Stromes. Das Plasma zerfällt hier viel langsamer, was auch aus der geringeren Intensitätsabnahme auf den Drehspiegelkameraaufnahmen ersichtlich ist.

Bei allen Experimenten, über die wir im folgenden berichten, war dem Plasma ein axiales Magnetfeld überlagert, sodass wir immer ein ruhiges Medium vom Typus der Figur 9c zur Verfügung hatten.



Figur 9

Drehspiegelkameraaufnahmen und zugehörige Oszillogramme (von oben nach unten) von Strom J (15 kA/cm), Stromänderung dJ/dt ($3 \cdot 10^9$ As^{-1}/cm), Intensität der AII-Linie bei 4348 Å in axialer und in radialer Richtung für Argon bei $p = 300$ μHg. Die Zeitskala beträgt 10 μs/cm (1 cm auf dem Oszillographenschirm gleich ein Teilstrich). a) Ohne äusseres Magnetfeld, b) Magnetfeld 2 kG, c) Magnetfeld 8 kG



Figur 10
Temperatur, Ionisationsgrad und Strom für die Parameter von Figur 9c

V. Resonanzmessungen

Für die Resonanzmessungen haben wir die Dichte als kontinuierlichen Parameter gewählt und das Magnetfeld und die Frequenz in diskreten Schritten variiert. Eine weitere Variable war das Alter des Plasmas.

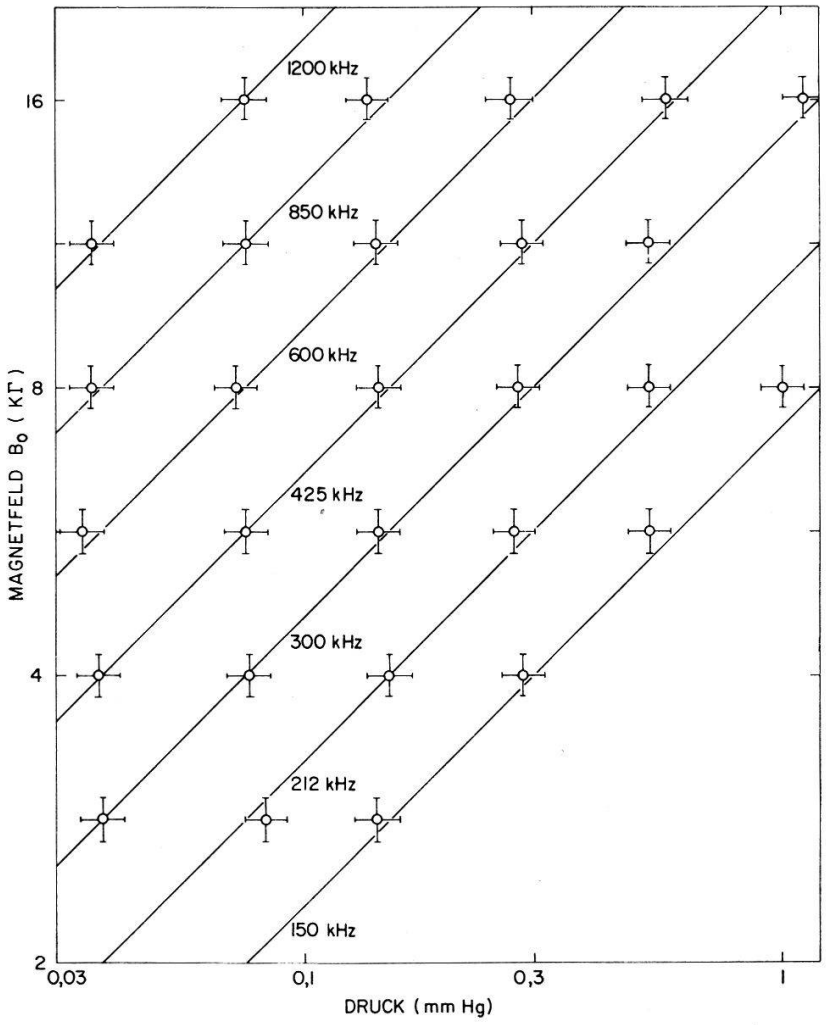
1. Messungen mit verschiedenen Gasen

Wir haben unsere Voruntersuchungen auf verschiedene Gase erstreckt (H_2, He, N_2, O_2, Luft, Ar) und in jedem Fall die magnetoakustische Resonanz feststellen können. Bei Wasserstoff kann die Resonanzüberhöhung Werte bis zu zehn annehmen. Wir haben uns zum Studium der Resonanz in Argon entschlossen, und zwar aus folgenden Gründen: Erstens lässt sich mit einem schweren Gas die Voraussetzung kaltes Plasma (Alfvéngeschwindigkeit viel grösser als Schallgeschwindigkeit), unter welcher die Theorie streng zu behandeln ist, unter Resonanzbedingungen über einen grösseren Parameterbereich erfüllen. Zweitens sind die Stossquerschnitte Ionen-Neutralteilchen, welche für die quantitative Behandlung sehr wichtig sind, für die einatomigen Edelgase am besten bekannt. Die im folgenden beschriebenen Experimente beziehen sich alle auf Argon.

2. Lage der Resonanz bei Variation von Magnetfeld und Frequenz

Bei Abwesenheit von Dissipationseffekten in einem vollionisierten Plasma wäre die Lage der Resonanz durch die Beziehung (37) mit $N = 1$ gegeben. In einem experimentellen Plasma wird die Lage der Resonanz aber verschoben, einerseits dadurch, dass nicht alle Neutralteilchen an der Wellenbewegung teilnehmen ($a^2 = a_0^2/F_1$) und dass K komplex ist, anderseits durch den in Kapitel II.5 beschriebenen Effekt der

Abhängigkeit der Elektronendichte vom Radius. Die beiden ersten Einflüsse sind in der Theorie berücksichtigt, und wir wollen die Resonanz allgemein so definieren, dass dort $N = 1$ sein soll. Daraus ergeben sich die experimentellen Werte, welche in Figur 11 aufgetragen sind. Jeder der experimentellen Punkte entspricht einer oder



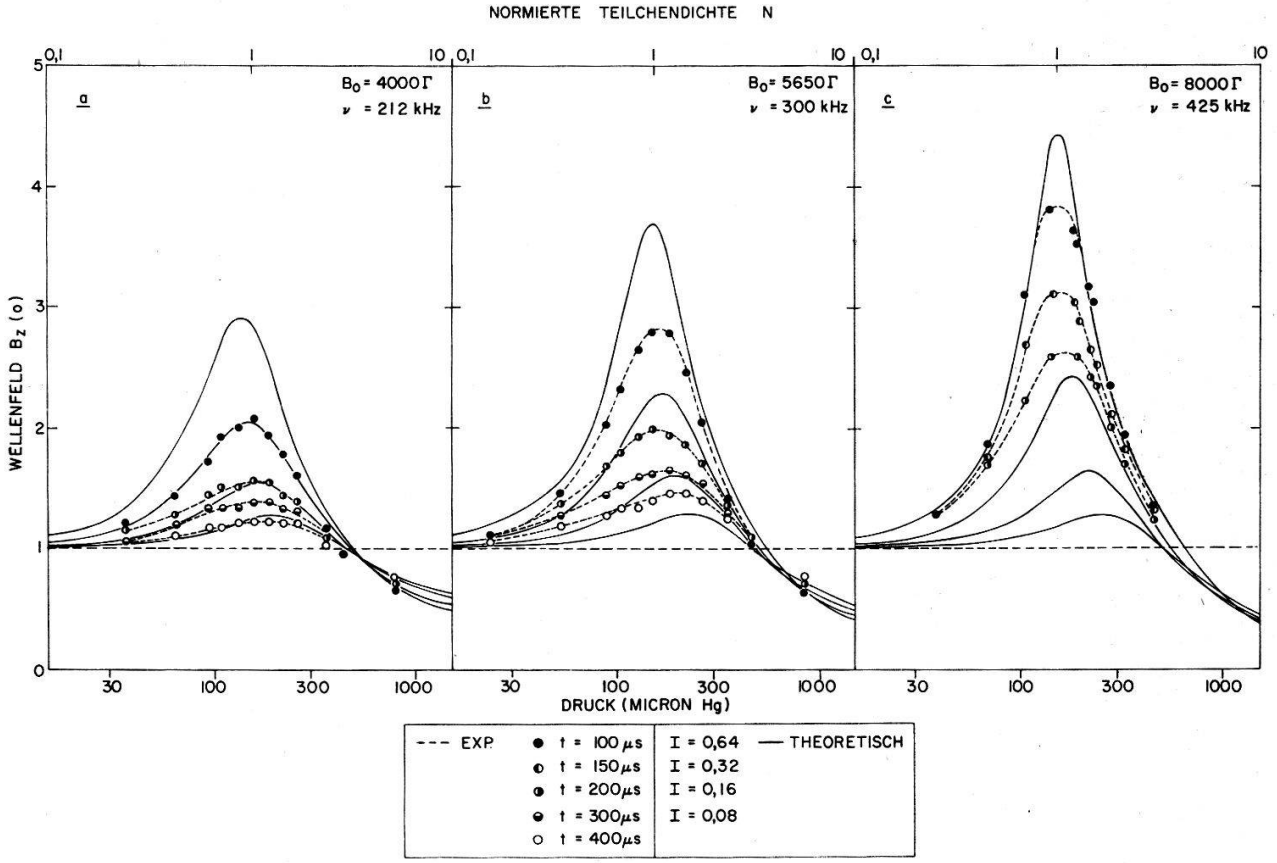
Figur 11
Lage der Resonanz bei Variation von Magnetfeld, Frequenz und Druck

mehreren Kurvenscharen (siehe später Figur 12) und der eingezeichnete Fehler entspricht der Unsicherheit im Magnetfeld, in der Frequenz und im Druck. Fehler, die bereits in die Theorie eingegangen sind, zum Beispiel durch die Unsicherheit des Wertes von Q_{in} oder $I(T)$, sind nicht berücksichtigt worden. Die ausgezogenen Geraden geben die Beziehung (37) wieder, mit $R = 4{,}0$ cm, worin der in Kapitel II.5 beschriebene Effekt der Verkleinerung des Plasmaradius durch die radiale Veränderung der Elektrodendichte zum Ausdruck kommt. Man sieht aus der Abbildung, dass diese Verkleinerung von knapp zwanzig Prozent fast unabhängig von der Dichte ist, da die experimentellen Werte innerhalb ihrer Fehlergrenzen auf den Geraden liegen.

3. Vergleich der Resonanzkurven mit der Theorie

Von besonderem Interesse ist der direkte Vergleich der gemessenen Resonanzkurven mit den theoretisch berechneten. Wir wollen diesen Vergleich anhand einer Auswahl von Resonanzkurven (Figur 12), bei welchen die Amplitude des Wellenfeldes

auf der Axe gegen die Dichte für drei ausgewählte Parameterpaare (von Magnetfeld und Frequenz) aufgetragen ist, diskutieren. Die ausgezogenen Kurven sind berechnete Werte für die angegebenen Ionisationsgrade. Bei dieser Parameterauswahl nimmt die



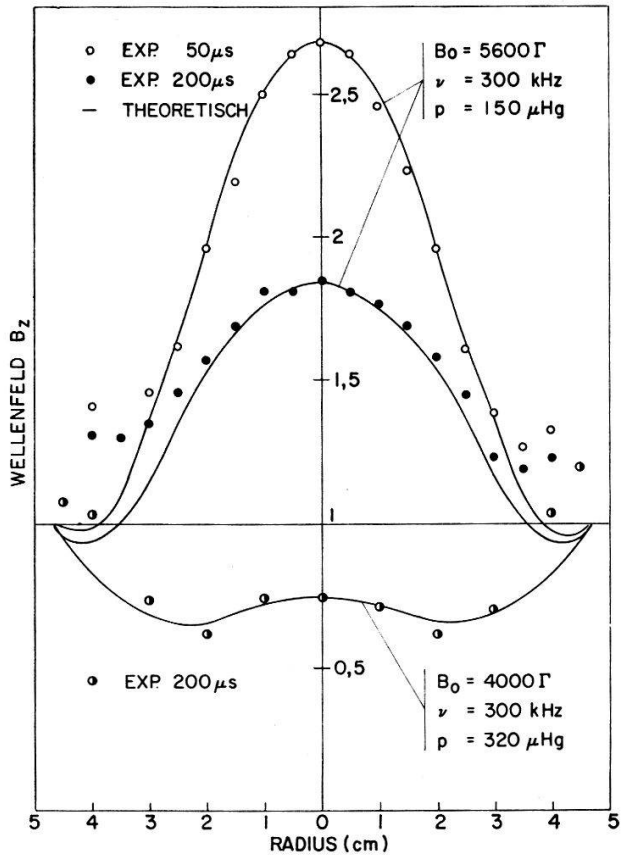
Figur 12

Vergleich von theoretischen und experimentellen Resonanzkurven (siehe Text)

Resonanzüberhöhung bei konstantem Ionisationsgrad mit dem Magnetfeld zu. Bei den experimentellen Werten trifft dies noch in gesteigertem Masse zu, da bei grösserem Magnetfeld das Plasma langsamer zerfällt und somit auch der Ionisationsgrad zunimmt (siehe später Figur 14). Die Form der experimentell gemessenen Kurven stimmt gut mit den theoretischen überein, wobei zu bemerken ist, dass die experimentellen Werte Einzelmessungen sind, und deren Streuung ist offensichtlich gering. Die noch vorhandenen Abweichungen haben verschiedene Gründe. Anhand der Figur 12c ist ersichtlich, das speziell bei grossen Resonanzüberhöhungen eine Abflachung im Maximum auftritt. Dies rührt hauptsächlich davon her, dass wir einerseits in der Theorie für die Frequenz einen scharfen Wert vorgegeben haben, während wir im Experiment mit einem gedämpften Sinus, also einem ganzen Fourierspektrum arbeiten, anderseits kann auch die Veränderung der Ionendichte über den Radius einen Effekt dieser Art zur Folge haben. Eine zweite Abweichung tritt daher auf, weil bei abnehmender Dichte der Ionisationsgrad zunimmt, während die theoretischen Kurven mit konstantem Ionisationsgrad berechnet wurden. Dieser Effekt ist aus Figur 11a und 11b bei kleinen Dichten, das heisst vor der Resonanz deutlich ersichtlich.

4. Radialer Verlauf des Wellenfeldes

Wie wir in der Theorie bereits dargelegt haben, ist für den radialen Verlauf nicht allein die Überhöhung des Wellenfeldes massgebend, sondern sowohl Absolutbetrag als auch Phase des Argumentes der Besselfunktion sind wesentlich. Die Phase bleibt dabei für eine bestimmte Parameterwahl konstant und der Betrag des Argumentes variiert proportional zum Radius (Strahlen in Figur 4). Die ausgezogenen theoretischen Kurven der Figur 13 sind auf dieselbe Art wie diejenigen von Figur 5 berechnet worden. Die Punkte sind experimentelle Werte. Zum Vergleich mit der Theorie wurde folgendermassen vorgegangen: Zuerst wurde für die gewählten Parameter die Resonanzkurve ausgemessen und durch Vergleich mit den theoretischen Resonanzkurven das Argument der Besselfunktion bestimmt. Daraus konnten die radialen Verteilungen berechnet werden. Die beiden oberen Kurven von Figur 13 zeigen den radialen Verlauf in der Nähe der Resonanz zu zwei verschiedenen Zeitpunkten nach der Erzeugung des Plasmas, während die untere den Verlauf weit oberhalb der Resonanz wiedergibt. Die Abweichungen bei grossem Radius sind Randeffekte.

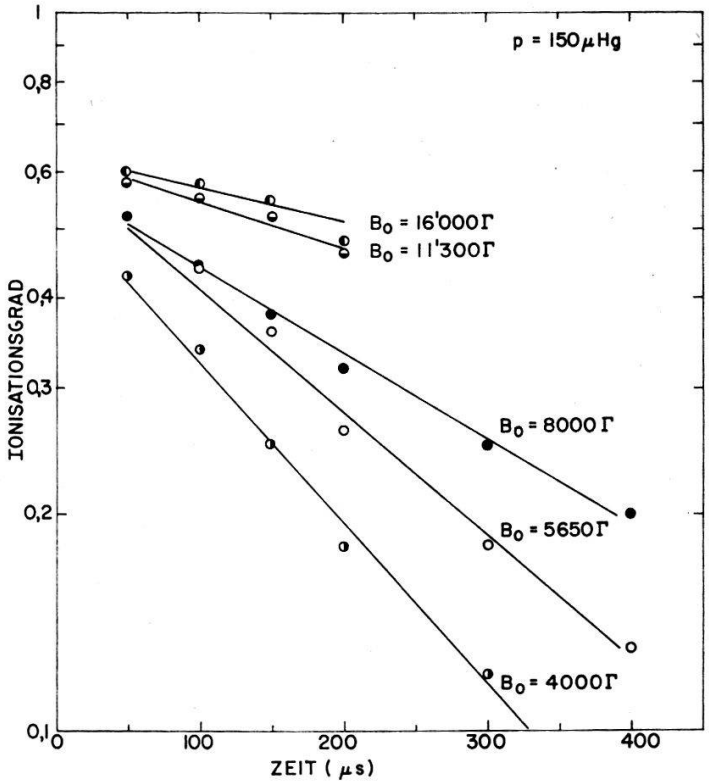


Figur 13

Radiale Verteilung des Wellenfeldes in der Nähe der Resonanz (obere Kurven) und weit oberhalb der Resonanz (untere Kurve)

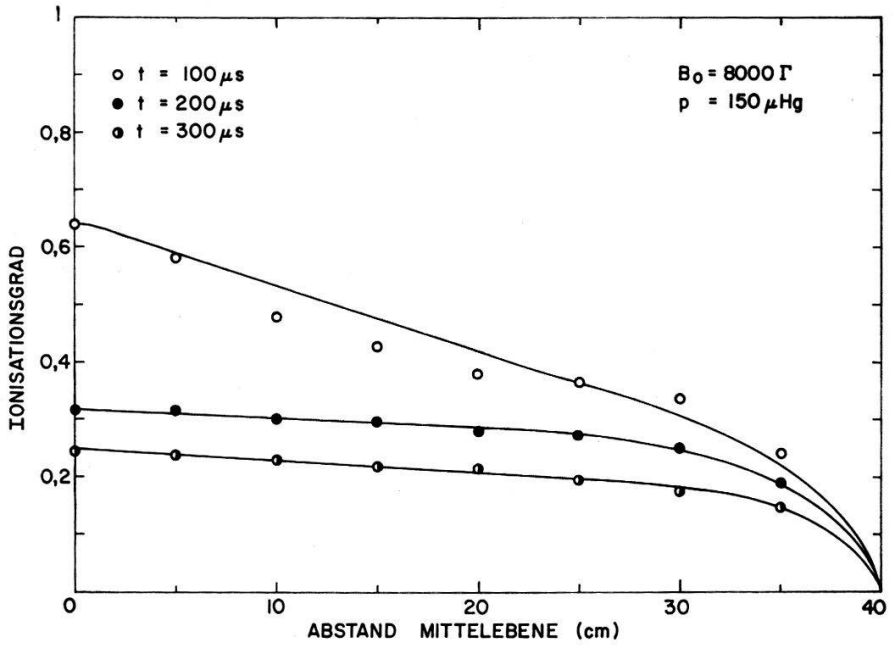
5. Bestimmung der Ionendichte mit magnetoakustischer Resonanz

Zur Bestimmung der Ionendichte haben wir die Kurven der Figur 3 benützt, wo die Resonanzüberhöhung in Funktion des Ionisationsgrades aufgetragen ist. Im Maximum ist die Empfindlichkeit der Resonanzkurven auf eine Änderung des



Figur 14

Mit magnetoakustischer Resonanz gemessene Ionendichten, 20 cm von der Mittelebene entfernt, für $p = 150\,\mu$Hg und verschiedene Magnetfelder



Figur 15

Axiale Verteilung der Ionendichte

Ionisationsgrades am grössten, anderseits aber werden wir auf diese Art wegen der in Abschnitt 3 besprochenen Abflachung der experimentellen Resonanzkurven bei grossen Überhöhungen zu kleine Ionendichten erhalten. Diesen Punkt werden wir beim Vergleich mit spektroskopischen Messungen (Kapitel 7) näher betrachten. Figuren 14 und 15 zeigen Beispiele von Ionisationsgradbestimmungen, die mit magnetoakustischer Resonanz vorgenommen wurden. Wir müssen nun noch einen wichtigen Punkt etwas näher betrachten. In die theoretischen Berechnungen geht sowohl die Temperatur als auch der Ionisationsgrad ein, welche hier durch Gleichung (43) miteinander verbunden sind. Primär ist in den bisher betrachteten Fällen immer der Ionisationsgrad bestimmt worden und daraus kann man mit Hilfe der erwähnten Relation auf die Temperatur schliessen, da dieses Vorgehen nicht sehr kritisch ist (der Fehler ist nicht grösser als etwa $10^0/_0$). Diese Methode ist aber nur solange zulässig, als am Ort der Resonanz der zweite Summand des Dämpfungsparameters überwiegt, welcher von den Stössen zwischen Ionen und Neutralteilchen herrührt, und infolgedessen der Ionisationsgrad und der Stossquerschnitt Q_{in} für die Höhe der Resonanz verantwortlich sind. Falls aber der erste Term überwiegt (herrührend von den Stössen zwischen Elektronen und Ionen), wird mit der Resonanzüberhöhung primär die Temperatur bestimmt, und es ist nicht zulässig, daraus auf die Ionendichte zu schliessen. Zur Erläuterung des eben Gesagten wollen wir Gleichung (24) etwas umschreiben:

$$K = \frac{\omega}{a_0} \left\{ \frac{1}{F_1} - i\,(y + x\,F_3) \right\}^{-1/2} \tag{44}$$

mit

$$F_3 = F_2/F_1 = (1 - I)/I\,(1 + x^2). \tag{45}$$

y und x sind Temperaturfunktionen, welche nicht vom Ionisationsgrad abhängen (abgesehen vom logarithmischen Term in y), wobei in x die Temperatur nur unter der Wurzel eingeht:

$$x = 0{,}50 \cdot \frac{n_0 \cdot T^{1/2}}{\nu}, \tag{46}$$

$$y = 0{,}33 \cdot \frac{n_0\,\nu}{B_0^2\,T^{3/2}} \left\{ 1 + 0{,}08 \ln \frac{T^3}{n_0\,I} \right\}. \tag{47}$$

(ν in MHz, n_0 in 10^{15} cm^{-3}, B_0 in 10 kGauss und T in 10000° K). Wir definieren nun noch eine Funktion F, welche das Verhältnis der Beiträge der Stösse Ionen-Neutralteilchen und der Stösse Elektronen-Ionen zu den Dissipationseffekten darstellt:

$$F = \frac{x\,F_3}{y} = \frac{1 - I}{I} \cdot \frac{x}{y\,(1 + x^2)}. \tag{48}$$

Falls nun $F \gtrsim 1$ kann immer primär der Ionisationsgrad bestimmt werden, im andern Fall erhalten wir eine Temperaturbestimmung. Mit Hilfe der angegebenen Beziehungen kann man leicht abschätzen, dass für unsere Parameterwahl bei Resonanz diese Ungleichung für grosse Magnetfelder und kleine Dichten auch bei grossen Ionisationsgraden noch erfüllt ist, während dies bei den Parametern der unteren Hälfte von Figur 11 nicht der Fall ist.

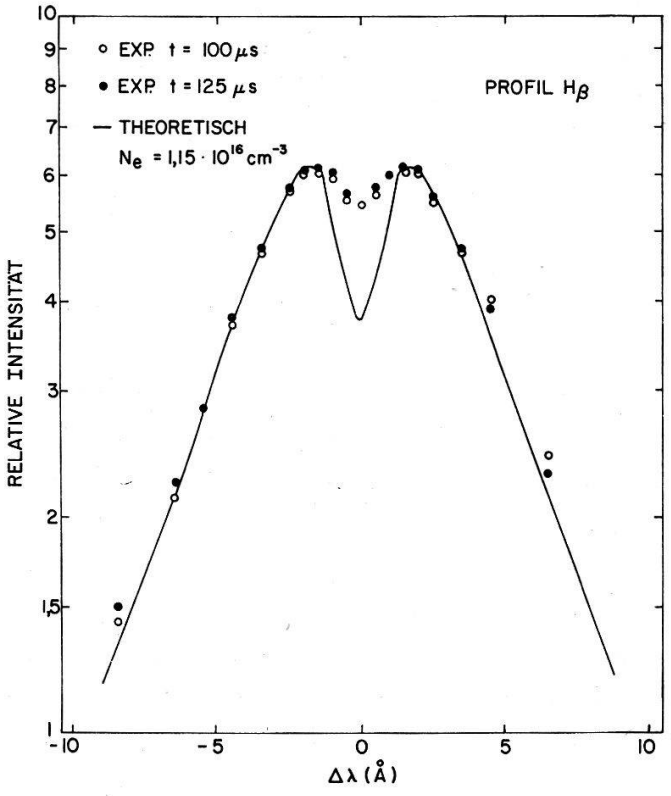
VI. Spektroskopische Experimente

1. Grundlagen

Eine sehr gute Übersicht über die Messung von Temperaturen und Dichten mit Hilfe der Plasmaspektroskopie vermittelt eine Arbeit von GRIEM (Gr61). Zur Bestimmung von Elektronendichten über 10^{14} cm^{-3} ist die Messung der Starkverbreiterung der Spektrallinien die geeignetste Methode, und wir werden sie hier anwenden. Die theoretischen Grundlagen der Starkverbreiterung sind in den letzten Jahren sehr weitgehend ausgearbeitet worden; für eine Zusammenfassung der älteren Arbeiten siehe (Un55) (Tr60), über die Verbreiterung von Wasserstoff- und Heliumlinien (Gr60) (Gr62a) und über die Verbreiterung von Linien schwerer Elemente (Argon, Cäsium, Sauerstoff, Kohlenstoff) siehe (Gr62b). Eine grosse Zahl von experimentellen Arbeiten, von welchen wir hier nur zwei (Be62) (Ki61) angeben wollen, bestätigen diese Theorien gut.

Die Ionendichte erhält man aus dem Linienprofil oder bereits schon aus der Halbwertsbreite. Die Temperaturabhängigkeit der Linienprofile ist schwach, so dass bereits eine grobe Kenntnis der Temperatur eine gute Dichtebestimmung ergibt. In den angegebenen Referenzen findet man ausgedehnte Tabellen und graphische Darstellungen von Linienprofilen.

Die Temperaturbestimmung kann zum Beispiel durch die Messung von Linienintensitäten durchgeführt werden, entweder nach der Methode von FOWLER und MILNE, bei der von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, dass eine Linie einer bestimmten Ionisationsstufe bei einer bestimmten Temperatur ihr Maximum hat, oder aus dem Intensitätsverhältnis zweier Linien aufeinanderfolgender Ionisationsstufen.



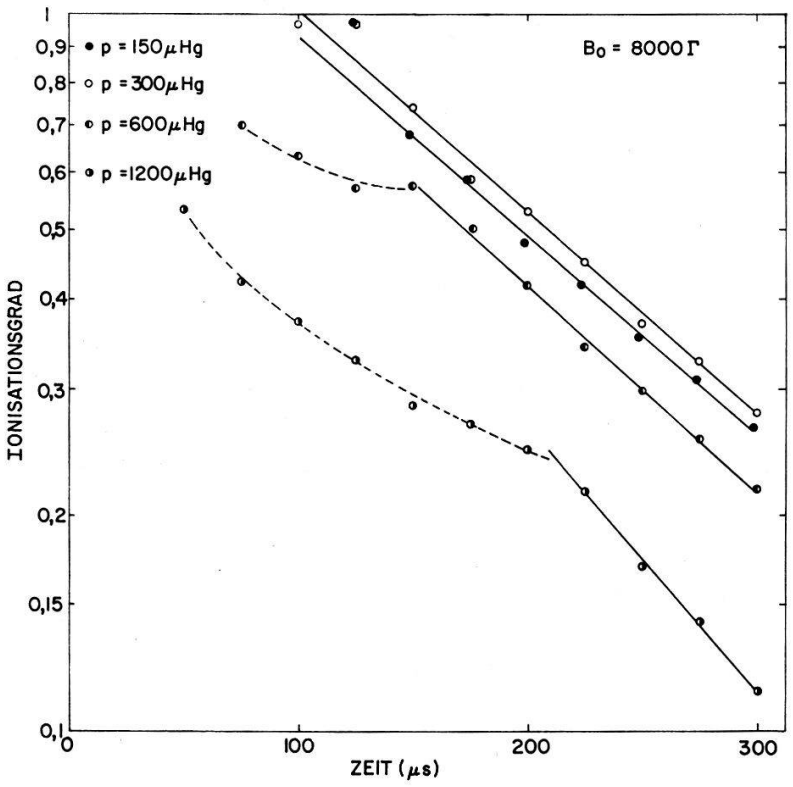
Figur 16

Profil der Linie H_β, experimentell und nach der Theorie von Griem-Kolb-Shen

2. Messung der Starkverbreiterung der H_β-Linie

Zur Bestimmung der Ionendichte mit Hilfe der Starkverbreiterung wurde das ganze Linienprofil ausgemessen. Dabei wurde mit Hilfe des Monochromators ein Wellenlängenband von 1 Å Breite zeitlich aufgelöst gemessen und bei jeder Entladung über das Linienprofil weiterverschoben. Die Reproduzierbarkeit der Entladungen wurde mit Hilfe des zum Monochromatoren umgebauten Spektrographen kontrolliert, der die Intensität der ganzen Linie registrierte. Bei Entladungen im Magnetfeld konnte innerhalb der Messgenauigkeit volle Reproduzierbarkeit festgestellt werden, während ohne Magnetfeld die Intensität von Entladung zu Entladung um 10 bis 20% schwankte.

Die Breite verschiedener Argonlinien erreicht erst bei etwa 5.10^{16} cm^{-3} die Grösse von ungefähr 1 Å. Wir interessieren uns zum Vergleich mit magnetoakustischen Messungen für den Bereich kleinerer Dichten. Zu diesem Zweck haben wir dem Argon 1,35% Methan (entspricht 5,4% H) beigegeben und die Breite der Wasserstofflinien gemessen. Leider war aber sowohl die H_δ-Linie, die wegen der grössten Breite die geeignetste gewesen wäre, als auch die $H\gamma$-Linie gestört, und wir mussten uns auf die Ausmessung der Linie H_β beschränken. Figur 16 zeigt den Vergleich eines gemessenen H_β-Profils mit der Theorie von Griem-Kolb-Shen. Trotz der relativ schlechten Auflösung von etwa 1 Å ist das Minimum im Zentrum noch gut erkennbar. Figur 17 zeigt spektroskopisch gemessene Ionendichten für $B_0 = 8$ kGauss und verschiedene Arbeitsdrücke. Bei kleineren Drücken war die Messung nicht mehr möglich, da die Linienbreite zu klein wurde (für die ganze Halbwertsbreite B der H_β-Linie in Å für $T = 20000°$ K gilt in guter Näherung $B = 2{,}0\, n_e^{2/3}$, wobei die Elektronendichte n_e in 10^{15} cm^{-3} gegeben ist).



Figur 17

Aus der Verbreiterung der Linie H_β bestimmte Ionendichten für verschiedene Arbeitsdrücke und $B_0 = 8$ kG

3. Messung von Linienintensitäten und Temperaturen

Es wurden auch zeitlich aufgelöste Linienintensitäten verschiedener AI- und AII-Linien, sowie des Kontinuums gemessen. Oszillogramme der AII-Linie bei 4348 Å in axialer und radialer Richtung bei verschiedenen Magnetfeldern wurden bereits in Figur 9 gezeigt. Die meisten AI-Linien sind relativ schwach und zu frühen Zeiten durch das Kontinuum ziemlich gestört. Die korrigierten AI-Linien zeigen ein erstes scharfes Maximum in den ersten μs der Entladung, dann nimmt die Intensität wieder ab, um einige Zeit nach Ende des Stromes (zum Beispiel für die Bedingungen von Figur 9c nach 120 μs) ein zweites Maximum von vergleichbarer Grösse zu zeigen. Danach fällt die Intensität langsam ab. Zwischen diesen beiden Maxima liegt das Maximum der AII-Linien und des Kontinuums, da hier die höchste Temperatur erreicht wird.

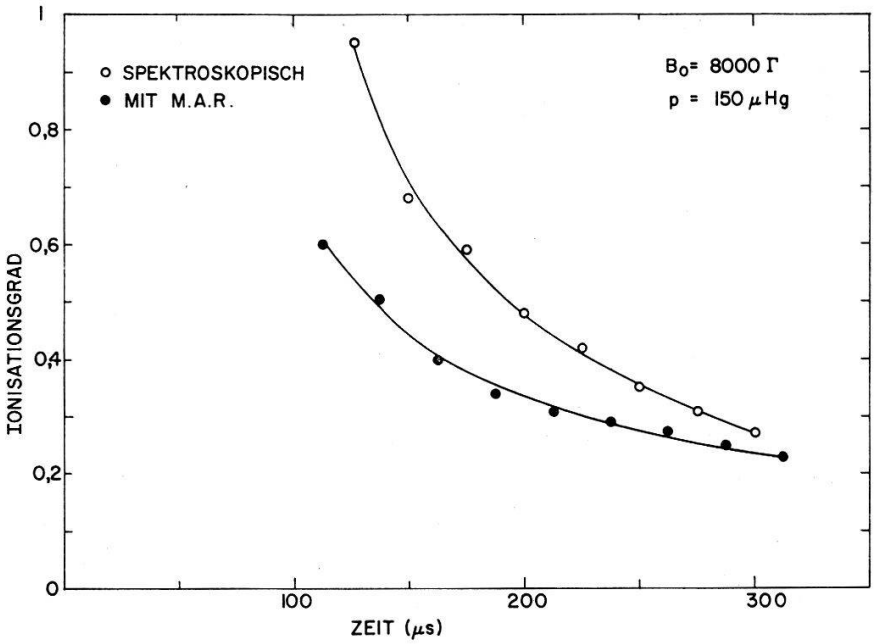
Zur Bestimmung des Temperaturverlaufes, der in Figur 10 aufgetragen ist, haben wir folgendes Verfahren angewendet. Einerseits wurde die Temperatur nach 130 μs aus den spektroskopisch gemessenen Ionendichten mit Hilfe der Gleichung (43) berechnet. Der Fehler ist von der Grössenordnung $10^0/_0$. Anderseits konnten die Intensitäten verschiedener AII-Linien über den ganzen Bereich von Beginn bis 150 μs gemessen werden. Es wurden aber nur relative Linienintensitäten bestimmt. Da aber für Zeiten nach 130 μs die Temperatur bekannt ist, können daraus für den ganzen Bereich die Temperaturen ermittelt werden.

Schliesslich haben wir auch einige Temperaturbestimmungen aus dem Verhältnis der Linien AII 4348 und AI 4259 und nach der Methode von Fowler-Milne durchgeführt, und soweit die gemessenen Bereiche überlappen, geben diese Methoden Temperaturen (Anregungstemperaturen) die knapp $10^0/_0$ tiefer liegen als die oben erwähnten.

VII. Diskussion der Resultate

1. Vergleich zwischen magnetoakustischen und spektroskopischen Dichtebestimmungen

Aus den in Kapitel V.5 angegebenen Gründen, und da spektroskopische Dichtebestimmungen bei kleinen Dichten wegen der zu geringen Breite der Linien nicht mehr möglich sind, ist für den Vergleich zwischen magnetoakustischen und spektrographischen Ionisationsgradbestimmungen die Parameterwahl sehr beschränkt. Figur 18 zeigt einen solchen Vergleich für $p = 150\,\mu$Hg Anfangsdruck und ein äusseres Magnetfeld von $B_0 = 8$ kG. Der Zerfall des Plasmas zeigt bei beiden Messmethoden denselben charakteristischen Verlauf und die Streuung der Messwerte ist bei beiden Kurven gering. Die Abweichung von $30^0/_0$ bei 100 μs und noch $10^0/_0$ bei 300 μs ist also systematisch. Der theoretische Fehler bei den spektroskopischen Messungen (Ionendichte in Funktion des Linienprofils) beträgt nach Angabe der Autoren 10–$20^0/_0$; dazu kann noch ein experimenteller Fehler von etwa $10^0/_0$ kommen. Die spektroskopisch ermittelten Werte scheinen eher etwas gross zu sein, da vereinzelte Punkte knapp über dem Ionisationsgrad $I = 1$ liegen (Figur 10 und 17) und zweifache Ionisation bei den gemessenen Temperaturen nur in sehr geringem Ausmasse zu erwarten ist. Die magnetoakustische Methode anderseits liefert für grosse Resonanzüberhöhungen zu kleine Werte wegen der Abflachung der experimentellen Resonanzkurven (Figur 12c), bei



Figur 18
Vergleich von Ionendichten, die mit Hilfe der magnetoakustischen Resonanz und spektroskopisch bestimmt wurden

nicht zu grossen Resonanzüberhöhungen hingegen ist der Fehler nur durch die Unsicherheit der in die Theorie eingehenden Grössen gegeben. Die grössere Abweichung der beiden Methoden bei grossen Ionisationsgraden (Figur 18) ist somit hauptsächlich der Abflachung der Resonanzkurven zuzuschreiben, bei kleineren Ionisationsgraden stimmen die Resultate der beiden Diagnostikmethoden innerhalb ihrer Fehlergrenzen überein.

2. Der Zerfall des Plasmas

Für den Zerfall eines dichten Plasmas können verschiedene Mechanismen in Frage kommen, so die ambipolare Diffusion oder Rekombination von Ionen und Elektronen, oder die Ladungsträger befinden sich mit der absinkenden Temperatur im Gleichgewicht. Welcher dieser Prozesse der massgebende ist, hängt von den Plasmaparametern wie Temperator, Ionendichte, Druck, Gas, vom äusseren Magnetfeld und von den Gefässdimensionen ab. Wir wollen den Zerfall des Plasmas im speziellen für das Beispiel von Figur 9c und 10 betrachten, also Anfangsdruck $p = 300\mu$ Hg und Magnetfeld $B_0 = 8$ kG. Theoretisch lässt sich der Zerfall eines Plasmas mit Hilfe zweier gekoppelter Diffusionsgleichungen für die Ionendichte und die Temperatur beschreiben. Ein solches Gleichungssystem lässt sich leicht aus den Grundgleichungen eines Plasmas mit Neutralteilchen, wie wir sie zum Beispiel im Handbuchartikel von FINKELNBURG und MAECKER (Fi57) finden, ableiten. In diesen beiden Gleichungen sind alle oben genannten Zerfallsmechanismen enthalten. Diese Gleichungen sind aber in ihrer allgemeinsten Form nicht ohne weiteres lösbar, und wir wollen diese Prozesse hier einzeln betrachten, da meistens ein Mechanismus die andern überwiegt. Für die ambipolare Diffusion, siehe zum Beispiel (GK62), sind die Dichten zu gross und in radialer Richtung wird sie durch das Magnetfeld stark vermindert. Man erhält mit

diesem Mechanismus Zerfallszeiten von 70 ms in axialer und 30 ms in radialer Richtung.

Der Rekombinationskoeffizient wurde nach der Methode von Kapitel II.6 berechnet, und man erhält für $T = 18000°\,\mathrm{K}$ den Wert $\alpha = 0{,}6\ 10^{-11}\ \mathrm{cm^3\ s^{-1}}$ (etwa 40 mal grösser als der Strahlungsrekombinationskoeffizient), woraus man mit $n_e = 10^{16}\ \mathrm{cm^{-3}}$ eine Zerfallszeit von 16 μs erhält. Das Plasma zerfällt aber etwa zehn mal langsamer; auch hat die Zerfallscharakteristik einen exponentiellen Verlauf, was gegen einen Rekombinationsmechanismus spricht.

Daraus folgt nun, dass die Abnahme der Ionendichte der Abkühlung des Plasmas folgt. Dadurch ist auch unsere Annahme von Kapitel II.6 bestätigt, dass sich Ionendichte und Temperatur im Gleichgewicht befinden.

Wir haben noch die Koeffizienten der Wärmeleitungsgleichung für ein Plasma im Magnetfeld (Ma60) berechnet und es ergeben sich für die Parameter von Figur 10 für die Temperatur von $T = 20000°\,\mathrm{K}$ ($I = 1$) Zerfallszeiten der Temperaturen von 30 ms in axialer und 330 μs in radialer Richtung. Dieser exponentielle Temperaturabfall mit einer Zeitkonstanten von etwa 330 μs (solange das Plasma noch vollionisiert ist) stimmt gut mit der experimentell gemessenen Kurve (ausgezogen) von Figur 10 überein. Später wird der Temperaturabfall langsamer, was auch theoretisch zu erwarten ist. Der Abfall der Ionendichte ist dann durch den Abfall der Temperatur bestimmt. Der eben beschriebene Mechanismus ist für die meisten hier untersuchten Parameterkombinationen der für den Zerfall entscheidende.

Herrn Prof. Dr. O. Huber sind wir für sein Interesse an dieser Arbeit sehr zu Dank verpflichtet. Herrn H. Gaug möchten wir für die Mithilfe bei den spektroskopischen Messungen und den Herren F. Steinrisser und J. Hofmann für die Mitarbeit beim Programmieren und an der Rechenmaschine danken.

Literatur

Al63 Alfvén, H., Arkiv Mat. Astron. Fysik *29 B*, Nr. 2 (1943).
Al59 Allen, T. K., Baker, W. R., Pyle, R. V., and Wilcox, J. M., Phys. Rev. Letters *2*, 383 (1959).
An61 D'Angelo, N., Phys. Rev. *121*, 505 (1961).
Ba55 Baños, A., Proc. Roy. Soc., *A 233*, 350 (1955).
Ba61 Bates, D. R. and Kingston, A. E., Nature *189*, 652 (1961).
Ba62 Bates, D. R., Kingston, A. E. and McWhirter, R. W. P., Proc. Roy. Soc. *A 267*, 297 (1962).
Be60 Bernstein, I. B. and Trehan, S. K., Nuclear Fusion *1*, 3 (1960).
Be62 Berg, H. F., Ali, A. W., Lincke, R., and Griem, H. R., Phys. Rev. *125*, 199 (1962).
Ca62 Cantieni, E. und Schneider, H., Helv. Phys. Acta *35*, 245 (1962).
Dr61 Drawin, H. W., Z. Physik *164*, 513 (1961).
Eg19 Eggert, J., Phys. Z. *20*, 570 (1919).
El52 Elwert, G., Z. Naturforschg. *7a*, 432, 703 (1952).
Fi56 Finkelnburg, W. und Maecker, H., Handbuch der Physik *22*, 254 (Verlag Springer 1956).
Fr61a Frank-Kamenetskiĭ, D. A., Soviet Physics – JETP *12*, 469 (1961).
Fr61b Frank-Kamenetskiĭ, D. A., Soviet Physics – Technical Physics *5*, 842, 847 (1961).
Ga59 Gajewski, R., Phys. Fluids *2*, 633 (1959).
Ga60 Gajewski, R. and Mawardi, O. K., Phys. Fluids *3*, 820 (1960).
Ga61 Gajewski, R. and Winterberg, F., Preprint, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1961).

Gra62 GRAY, E. P. and KERR, D. E., Ann. of Physics *17*, 276 (1962).
Gr60 GRIEM, H.R., KOLB, A. C., and SHEN, K. Y., U. S. Naval Research Lab. Report *5455* (1960).
Gr61 GRIEM, H.R., Proc. 5. International Conf. on Ion. Phen. in Gases Vol. II, 1856 (1961).
Gr62a GRIEM, H.R., KOLB, A. C. and SHEN, K. Y., U. S. Naval Research Lab. Report *5805* (1962).
Gr62b GRIEM, H.R., Phys. Rev. *128*, 515 (1962).
Ha59 HARDCASTLE, R. A. and JEPHCOTT, D. F., Proc. 4. International Conf. on Ion. Phen. in Gases Vol. II, 786 (1959).
He50 HERLOFSON, N., Nature *165*, 1020 (1950).
Hi61 HINNOV, E. and HIRSCHBERG, J. G., Proc. 5. International Conf. on Ion. Phen. in Gases Vol. II, 638 (1961).
Hi62 HINNOV, E. and HIRSCHBERG, J. G., Phys. Rev. *126*, 795 (1962).
Je59 JEPHCOTT, D. F., Nature *183*, 1652 (1959).
Je61 JEPHCOTT, D. F., STOCKER, P. M., and WOODS, L. C., Conf. on Plasma Physics and Contr. Nuclear Fusion Res. Salzburg, CN-10/62, (1961).
Je62 JEPHCOTT, D. F. and STOCKER, P. M., Journal Fluid Mech. *13*, 587 (1962).
Ki61 KITAYEVA, V. F. and SOBOLOV, N. N., Proc. 5. International Conf. on Ion. Phen. in Gases Vol. II, 1897 (1961).
Kö57 KÖRPER, K., Z. Naturforschg. *12a*, 815 (1957).
Kö60 KÖRPER, K., Z. Naturforschg. *15a*, 220 (1960).
Le59 LEHNERT, B., Nuovo Cimento Suppl. *13*, Nr. 1 (1959).
Lü53 LÜST, R., Z. Naturforschg. *8a*, 277 (1953).
Lü59 LÜST, R., Fortschritte der Physik *7*, 503 (1959).
Lu61 LUPTON, W. H., Proc. 5. International Conf. on Ion. Phen. in Gases Vol. II, 2059 (1961).
Ma60 MARSHALL, W., UKAEA-Report, AERE T/R 2419 (1960).
MW61 MCWHIRTER, R. W. P., Nature *190*, 902 (1961).
Ne57 NEWCOMB, W. A., in Magnetohydrodynamics, Editor R. K. M. Landshoff (Stanford Un. Press 1957).
Sa20 SAHA, M. N., Phil. Mag. *40*, 472 (1920), Z. Physik *6*, 40 (1921).
Tr60 TRAVING, G., Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien (Verlag Braun, Karlsruhe 1960).
Un55 UNSÖLD, A., Physik der Sternatmosphären (Springer 1955).
Wi60 WILCOX, J. M., BOLEY, F. I., and DESILVA, A. W., Phys. Fluids *3*, 15 (1960).
Wi61 WILCOX, J. M., DESILVA, A. W., and COOPER, W. S., Phys. Fluids *4*, 1506 (1961).
Wo61a WOODS, L. C., UKAEA-Report CLM-R5 (1961).
Wo61b WOODS, L. C., UKAEA-Report CLM-R13 (1961)
Wo62 WOODS, L. C., Plasma Physics *4*, 169 (1962).
Zi53 ZIEGLER, B., Z. Physik *136*, 117 (1953).