

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 33 (1960)
Heft: VIII

Artikel: Zur Anziehung leitender Ebenen im Vakuum
Autor: Fierz, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113101>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Anziehung leitender Ebenen im Vakuum

von **M. Fierz**

(Genf, CERN)

M. J. SPARNAAY¹⁾ ist es gelungen, die Kraft, mit welcher sich zwei Metallplatten zufolge der Quantennatur des elektromagnetischen Strahlungsfeldes anziehen, experimentell nachzuweisen. CASIMIR²⁾ hat die Grösse dieser Kraft unter der Annahme berechnet, dass nur die Nullpunktsenergie des Strahlungsfeldes dazu etwas beitrage. Da aber die Messungen bei Zimmertemperatur ausgeführt worden sind, und da bei hohen Temperaturen die Plancksche Temperaturstrahlung die Wirkungen der Nullpunktsenergie genau kompensiert, so erhebt sich die Frage, ob es berechtigt ist, bei den vorliegenden Experimenten die Temperaturstrahlung zu vernachlässigen. Denn die für dieses Experiment charakteristische Grösse

$$X = \frac{2 \pi k T a}{\hbar c}$$

wo a der Plattenabstand bedeutet, ist keineswegs klein gegen eins.

Wir nennen $V(a, T)$ die potentielle Energie pro Flächeneinheit eines ungeladenen Plattenkondensators mit dem Plattenabstand a und bei der Temperatur T . Diese rührt erstens von der Nullpunktsenergie und zweitens von der thermischen Energie des elektromagnetischen Feldes her. Der Vollständigkeit halber wollen wir hier beide Teile berechnen; der Beitrag des ersten Teiles ist gerade der, auf den sich CASIMIR beschränkt hat.

Das Potential der Nullpunktsenergie

Da die Nullpunktsenergie divergent ist, betrachte man drei planparallele Platten, die die Abstände a und $A - a$ voneinander besitzen. Man berechne mit Hilfe eines geeigneten konvergenzerzeugenden Faktors die Energie dieser Anordnung und subtrahiere davon die Energie der gleichen Anordnung mit $a = A/2$. Nach der Subtraktion lässt man den Konvergenzfaktor verschwinden und macht schliesslich noch $A \rightarrow \infty$. Auf diese Weise erhält man eine endliche Potentielle Energie $J(a)$ als Funktion des Abstandes a .

Wir rechnen im folgenden in Einheiten, in denen $\hbar = c = k = 1$ gesetzt sind. (N.B.: $\hbar$ ist die Plancksche Konstante $6,24 \cdot 10^{-27}$ erg. s, k die Boltzmannsche Konstante.)

Die Kondensatorplatten werden als ideale Leiter behandelt, auf denen die tangentielle elektrische Feldstärke verschwindet. Daher sind die möglichen Eigenfrequenzen durch

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2} \quad (1)$$

gegeben, mit $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ (N.B.: $n = 0$ kommt einmal, $n \neq 0$ zweimal vor.) Die potentielle Energie unserer Anordnung ist darum durch

$$J(a) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \{ E(\alpha, a) + E(\alpha, A - a) - 2 E(\alpha, A/2) \} \quad (2)$$

gegeben mit

$$E(\alpha, a) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx dy \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2} \cdot e^{-\alpha \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2}}$$

α ist ein konvergenzerzeugender Faktor. Mit

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 (x^2 + y^2) = z \quad (3)$$

kann $E(\alpha, a)$ wie folgt geschrieben werden:

$$E(\alpha, a) = - \frac{d^3}{d\alpha^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{8} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z+1} e^{-\frac{n}{a} \alpha \sqrt{z+1}} \quad (4)$$

Nun kann man die Summe über n ausführen und hernach das Integral über z . So erhält man

$$E(\alpha, a) = \frac{\pi}{4a} \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{a/\alpha}{e^{a/\alpha} - 1} \quad (5)$$

Weil

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_v \frac{B_v}{v!} y^v,$$

so gilt

$$E(\alpha, a) = \frac{\pi}{4a} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_v \frac{B_v}{v!} \cdot \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{v-2}. \quad (6)$$

Setzt man diesen Ausdruck in $J(a)$ ein, so heben sich dort die Terme mit $\nu = 0, 1$ fort. Darum kann man $\alpha = 0$ und hernach $A = \infty$ setzen und erhält

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \frac{B_4}{4!} \frac{1}{a^3}.$$

Das ist das Resultat von CASIMIR.

Die Energie der Temperaturstrahlung

Da die Energie der Temperaturstrahlung endlich ist, genügt es hier, nur zwei Platten im Abstand a zu betrachten. Die Energie pro Flächeneinheit ist durch

$$\left. \begin{aligned} E_T(a) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dx dy \frac{\nu(n)}{e^{\nu(n)/T} - 1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b(n); \\ \nu(n) &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

gegeben. Auf (7), wenden wir nun die Poissonsche Summenformel an, die lautet:

Wenn

$$c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-2\pi i m x} dx$$

gesetzt wird, so ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} b(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m.$$

Es ist hier

$$c_m = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} dx dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r e^{-2\pi i m a z}}{e^{r/2T} - 1}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (8)$$

Man erkennt nun, dass c_0 der bekannte Ausdruck für die Energiedichte $U(T)$ der schwarzen Strahlung ist, der noch mit a multipliziert erscheint. Dieser Beitrag zum Strahlungsdruck im Inneren wird durch den äusseren Strahlungsdruck kompensiert, weshalb es auf

$$E_T(a) - a U(T) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad (9)$$

ankommt. Denn es ist ja $c_m = c_{-m}$. Eine leichte Rechnung ergibt nun

$$c_m = \frac{2 T^3}{m} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu \frac{\sin 4\pi a T m \nu}{e^{\nu} - 1} = \frac{2 T^3}{m} J_m. \quad (10)$$

Mit Hilfe einer bei WHITTAKER-WATSON angegebenen Formel*) (Chapt. VI, Example 2, p. 122) lässt sich auch das Integral J_m ausführen, und man erhält

$$J_m = \frac{1}{(4\pi m a T)^3} - \frac{\pi^3 C h 4 \pi^2 m a T}{(Sh 4 \pi^2 m a T)^3}. \quad (11)$$

*) Auf diese Formel machte mich Herr Professor W. PAULI in einem Brief vom 30. 10. 58 aufmerksam.

Das Gesamtpotential $V(a, T)$

Setzt man (10), (11) in (9) ein, und bildet

$$J(a) + E_T(a) - c_0 = V(a, T), \quad (12)$$

so erkennt man, dass der erste Term in J_m , wegen

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi}{4!} B_4 \quad (13)$$

$J(a)$ genau kompensiert. Daher ist

$$V(a, T) = -(\pi T)^3 \cdot 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Ch \, 4 \pi^2 m a T}{m(Sh \, 4 \pi^2 m a T)^3}. \quad (14)$$

Weil $E_T(a)$ für $T = 0$ verschwindet, ist natürlich

$$V(a, 0) = J(a),$$

was man aus (14), mit Hilfe von (13), leicht erkennt.

Will man $V(a, T)$ mit $J(a)$ vergleichen, so hat man die Funktion

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^3 Ch \, m x}{m(Sh \, m x)^3}, \quad \text{mit } x = 4 \pi^2 a T \quad (15)$$

zu betrachten.

Die Summe über m in (15) konvergiert für alle x sehr schnell; es genügt praktisch das erste Glied, $m = 1$, zu betrachten.

Ist $0 < x < 1$, so ist $f(x)$ nahezu konstant; für $x > 1$ verschwindet $f(x)$ sehr schnell.

(Man findet $f(0) = 1,08$; $f(1) = 0,98$; $f(2) = 0,63$; $f(3) = 0,27$; $f(4) = 0,07$.)

Der kritische Abstand a , bei welchem bei Zimmertemperatur ($T = 300^\circ$) der Effekt noch praktisch demjenigen bei $T = 0$ entspricht, ist somit durch $x = 1$ oder

$$a = \frac{\hbar c}{2 \pi k T} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (16)$$

gegeben.

Die Messungen sind im Intervall $(0,5 < a < 2) \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ durchgeführt worden, wobei der Effekt unterhalb 10^{-4} cm deutlich nachweisbar war. In diesem Gebiet kann die Temperaturstrahlung gerade vernachlässigt werden.

Literaturverzeichnis

¹⁾ M. J. SPARNAAY, *Physica* 24, 751 (1958).

²⁾ H. B. G. CASIMIR, *Proc. kon. Ned. Akad. Wetenschap* 51, 793 (1948).