

Wightman-Funktionen und retardierte Kommutatoren. II

Autor(en): **Steinmann, O.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **33 (1960)**

Heft V

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113079>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wightman-Funktionen und retardierte Kommutatoren II

von O. Steinmann

Physikalisches Institut der ETH, Zürich

20. II. 1960

Abstract. The consequences of the basic postulates of quantum field theory (Lorentz-invariance, locality, stability of the vacuum) for the retarded products are investigated by considering their connection with Wightman's functions. Necessary and sufficient conditions for the existence of a Wightman function corresponding to a prescribed r -function are given. The Fourier transform $\tilde{r}(p_1, \dots, p_n)$ of r is a boundary value of a function $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$ regular in a domain $\overline{\mathfrak{R}}_n \cdot \overline{\mathfrak{R}}_n$ is constructed by a recursive procedure. Other boundary values $\tilde{g}_\mu(p_1, \dots, p_n)$ of this function are considered. They have to fulfill a set of linear identities of four and twelve terms respectively.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit¹⁾ (im folgenden als A zitiert) wurden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass zu einer vorgegebenen retardierten Vierpunkt-Funktion $r(x_0, \dots, x_3)$ die zugehörige Wightman-Funktion $W(x_0, \dots, x_3)$ existiert. Diese Bedingungen sollen hier auf den Fall der n -Punkt-Funktion verallgemeinert werden.

Das Vorgehen ist dasselbe wie im Falle der Vierpunktfunktion. Der Einfachheit halber beschränken wir uns wie üblich auf den Fall eines einzigen skalaren Feldoperators $A(x)$. In einem ersten Schritt werden wir den Zusammenhang zwischen der Wightman-Funktion

$$W(x_0, \dots, x_n) = \langle A(x_0) \dots A(x_n) \rangle_0 \quad (1)$$

und dem iterierten Kommutator

$$K(x_0, \dots, x_n) = \langle [\dots [A(x_0), A(x_1)], \dots, A(x_n)] \rangle_0 \quad (2)$$

untersuchen. Aus den dabei erhaltenen Bedingungen für K werden wir dann Eigenschaften der Funktion

$$r(\xi_1, \dots, \xi_n) = \langle R(x_0, \dots, x_n) \rangle_0, \quad \xi_i = x_0 - x_i \quad (3)$$

$$R(x_0, \dots, x_n) =$$

$$\sum_{P(1, \dots, n)} \theta(x_0 - x_{i_1}) \theta(x_{i_1} - x_{i_2}) \dots \theta(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) [\dots [A(x_0), A(x_1)] \dots A(x_n)] \quad (4)$$

resp. deren Fouriertransformierten $\tilde{r}(p_1, \dots, p_n)$ herleiten.

Speziell wird sich ergeben, dass die analytische Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$, deren Randwert $\tilde{r}(p_1, \dots, p_n)$ in bekannter Weise ist, (siehe A) in ein grosses Gebiet $\overline{\mathfrak{R}}_n$ analytisch fortgesetzt werden kann. Neben $\tilde{r}(p_j)$ werden wir noch andere Randwerte $\tilde{g}_\mu(p_j)$ betrachten. Zwischen einzelnen dieser Randwerte bestehen viergliedrige, resp. zwölfgliedrige lineare Identitäten.

Diese Bedingungen für $\tilde{r}(k_j)$, d. h. Regularität in $\overline{\mathfrak{R}}_n$ und Bestehen der erwähnten Randwertidentitäten, sind zusammen mit den bereits bekannten Eigenschaften (Symmetrie, Lorentzinvarianz) hinreichend für die Existenz von K und damit von W . W kann aus $\tilde{r}(k_j)$ explizit berechnet werden und ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. (Für die Diskussion der auftretenden Mehrdeutigkeiten siehe A.)

2. Der mehrfache Kommutator

Wir wollen hier die Eigenschaften des durch (2) definierten mehrfachen Kommutators untersuchen. Speziell sollen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, dass die zugehörige Wightman-Funktion (1) existiert und die richtigen Eigenschaften²⁾ hat. Von dem von WIGHTMAN angegebenen System von quadratischen Ungleichungen werden wir dabei allerdings absehen, d. h. wir berücksichtigen nur die linearen Bedingungen.

Neben dem iterierten Kommutator K betrachten wir auch alle Operatoren (resp. deren Vakuumerwartungswerte) der allgemeinen Form

$$O_\mu(x_0, \dots, x_n) = [O_\alpha(x_{i_0}, \dots, x_{i_h}), O_\beta(x_{i_{h+1}}, \dots, x_{i_n})], \quad (5)$$

wobei (i_0, \dots, i_n) eine Permutation der Indizes $(0, \dots, n)$ darstellt und die O_α, O_β entweder Feldoperatoren $A(x_j)$ oder selber wieder von der Form (5) sind. In allen O_μ treten somit n Kommutatorklammern auf. Die zugehörigen Vakuumerwartungswerte bezeichnen wir mit $\langle O_\mu \rangle$. Alle $\langle O_\mu \rangle$ lassen sich mit Hilfe der Jacobischen Identität als Summen von \tilde{K} -Funktionen schreiben.

Es gilt:

Folgende Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Existenz von W :

a) Die $\langle O_\mu \rangle$ haben die richtigen Antisymmetrien, d. h. entsteht O_ν aus O_μ durch die Ersetzung eines Kommutators $[O_\alpha, O_\beta]$ durch $[O_\beta, O_\alpha]$, so gilt $\langle O_\mu \rangle + \langle O_\nu \rangle \equiv 0$. Ebenso sind alle Jacobi-Identitäten erfüllt.

b) $K(x_0, \dots, x_n)$ (und damit jedes $\langle O_\mu \rangle$) ist invariant gegen die inhomogene eigentliche Lorentzgruppe.

c) K ist lokal, d. h.

$$K(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \text{falls } (x_0 - x_1)^2 < 0. \quad (6)$$

Allgemeiner erhält man daraus: Tritt in O_μ der Kommutator $[A(x_i), A(x_j)]$ auf, so ist $\langle O_\mu \rangle = 0$ für $(x_i - x_j)^2 < 0$.

d) Ist $O_\mu = [O_\alpha, O_\beta]$, so gilt für die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}O_\mu(p_0, \dots, p_n)$:

$$\langle \mathfrak{F}O_\mu \rangle = 0, \quad \text{falls } \left(\sum_\beta p_i\right)^2 < 0. \quad (7)$$

\sum_β bedeutet dabei Summation über alle in O_β auftretenden Argumente.

Dass diese Bedingungen notwendig sind, ist leicht einzusehen, da sie unmittelbar aus den Eigenschaften der Wightman-Funktionen folgen. Dass sie auch hinreichend sind, beweist man durch explizite Konstruktion von W durch ein Rekursionsverfahren:

Seien alle

$$\langle O_0(x_{i_0}, \dots, x_{j_0}) \dots O_{N-1}(x_{i_{N-1}}, \dots, x_{j_{N-1}}) \rangle$$

für ein festes $N \leq n$ bekannt, wobei die O_i von der Form (5) sind und alle Variablen x_0, \dots, x_n genau einmal auftreten. Dann definieren wir

$$\mathfrak{F} \langle O_0 \dots O_N \rangle = \theta \left(-\sum_{O_0} p_i\right) \sum_{j=1}^N \mathfrak{F} \langle O_1 \dots O_{j-1} [O_0, O_j] O_{j+1} \dots O_N \rangle. \quad (8)$$

Durch n -malige Anwendung dieser Definition erhält man aus den $\langle O_\mu \rangle$ die gewünschte Funktion $W(x_0, \dots, x_n)$. Durch eine umständliche, aber elementare Rechnung weist man nach, dass das so konstruierte W unter den angegebenen Voraussetzungen über K tatsächlich die richtigen Eigenschaften aufweist.

3. Die G-Operatoren

Aus den in § 2 hergeleiteten Eigenschaften von $K(x_0, \dots, x_n)$ sollen nun Bedingungen für $r(x_0, \dots, x_n)$ hergeleitet werden. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des retardierten Kommutators $R(x_0, \dots, x_n)$, welche in diesem Paragraphen eingeführt werden soll.

Sei $H(x_0, \dots, x_{h-1})$ ein Operator der Form

$$H(x_0, \dots, x_{h-1}) = \sum_{P(0, \dots, h-1)} f_P(x_0, \dots, x_{h-1}) A(x_{i_0}) \dots A(x_{i_{h-1}}), \quad (9)$$

wobei die f_P beliebige c -Zahl-Funktionen sind.

Wir definieren

$$\begin{aligned} H(x_0, \dots, x_{h-1}) \uparrow A(x_h) &\equiv H(x_0, \dots, x_{h-1} \uparrow x_h) \\ &\equiv \sum_{i=0}^{h-1} \theta(x_i - x_h) H(x_0, \dots, \overline{x_i x_h}, \dots, x_{h-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H(x_0, \dots, x_{h-1}) \downarrow A(x_h) &\equiv H(x_0, \dots, x_{h-1} \downarrow x_h) \\ &\equiv -\sum_{i=0}^{h-1} \theta(x_h - x_i) H(x_0, \dots, \overline{x_i x_h}, \dots, x_{h-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

$\overline{x_i x_h}$ bedeutet dabei die Ersetzung des Feldoperators $A(x_i)$ durch den Kommutator $[A(x_i), A(x_h)]$.

Die so definierten Operatoren $H(x_0, \dots, x_{h-1} \updownarrow x_h)$ (\updownarrow bedeutet \uparrow oder \downarrow) sind wieder von der Form (9). Unser Verfahren kann also beliebig oft hintereinander angewandt werden, was in evidenter Bezeichnungsweise die Operatoren

$$H(x_0, \dots, x_{h-1} \updownarrow x_h \updownarrow x_{h+1} \updownarrow \dots) \equiv H(x_0, \dots, x_{h-1}) \updownarrow A(x_h) \updownarrow A(x_{h+1}) \updownarrow \dots$$

ergibt.

Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} [H_1(x_0, \dots, x_k), H_2(x_{k+1}, \dots, x_{h-1})] \updownarrow A(x_h) = \\ [H_1 \updownarrow A(x_h), H_2] + [H_1, H_2 \updownarrow A(x_h)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Pfeilrichtung ist dabei natürlich in allen Termen dieselbe.

Ferner:

$$\begin{aligned} & H(x_0, \dots, x_{h-1} \up x_h) - H(x_0, \dots, x_{h-1} \down x_h) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} H(x_0, \dots, \overline{x_i x_h}, \dots, x_{h-1}) \\ &= \sum_P \left\{ f_P(x_0, \dots, x_{h-1}) \sum_{j=0}^{h-1} A(x_{i_j}) \dots [A(x_{i_j}), A(x_h)] \dots A(x_{i_{h-1}}) \right\} \\ &= [H(x_0, \dots, x_{h-1}), A(x_h)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Wir verwenden die Abkürzung

$$[x_0, \dots, x_n] = [\dots [A(x_0), A(x_1)], \dots, A(x_n)]. \quad (14)$$

Für $H = \theta(x_0 - x_1) \dots \theta(x_{h-2} - x_{h-1}) [x_0, \dots, x_{h-1}]$ wird unsere Definition von $H \up A$ zu

$$\begin{aligned} & \theta(x_0, \dots, x_{h-1}) [x_0, \dots, x_{h-1}] \up A(x_h) \\ &= \theta(x_0, \dots, x_{h-1}) \sum_{j=0}^{h-1} \theta(x_j - x_h) [x_0, \dots, \overline{x_j x_h}, \dots, x_{h-1}] \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} \theta(x_0, \dots, x_j, x_h, x_{j+1}, \dots) \sum_{k=0}^j [x_0, \dots, \overline{x_k x_h}, \dots, x_{h-1}] \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} \theta(x_0, \dots, x_j, x_h, x_{j+1}, \dots, x_{h-1}) [x_0, \dots, x_j, x_h, x_{j+1}, \dots, x_{h-1}] \end{aligned} \quad (15)$$

mit $\theta(x_0, \dots, x_n) = \theta(x_0 - x_1) \dots \theta(x_{n-1} - x_n)$. In der letzten Umformung wurde die Jacobi-Identität benützt. Wegen (13) gilt auch:

$$\theta(x_0, \dots, x_{h-1}) [x_0, \dots, x_{h-1}] \down A(x_h)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{h-1} \theta(x_0, \dots, x_j, x_h, x_{j+1}, \dots) [x_0, \dots, x_j, x_h, \dots, x_{h-1}] - \\
 &\quad - \theta(x_0, \dots, x_{h-1}) [x_0, \dots, x_h].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Man erhält damit sofort die wichtigen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned}
 R(x_0, \dots, x_{h-1} \uparrow x_h) &= R(x_0, \dots, x_{h-1}, x_h) \\
 R(x_0, \dots, x_{h-1} \downarrow x_h) &= R(x_0, \dots, x_h) - [R(x_0, \dots, x_{h-1}), A(x_h)]
 \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Mit Hilfe des Spezialfalls $R(x_0, x_1 \uparrow x_2) = R(x_0, x_1, x_2) = R(x_0, x_2 \uparrow x_1)$ lässt sich einsehen, dass allgemein

$$\left. \begin{aligned}
 H(x_0, \dots, x_h \uparrow x_{h+1} \uparrow x_{h+2}) &= H(x_0, \dots, x_h \uparrow x_{h+2} \uparrow x_{h+1}) \\
 H(x_0, \dots, x_h \downarrow x_{h+1} \downarrow x_{h+2}) &= H(x_0, \dots, x_h \downarrow x_{h+2} \downarrow x_{h+1})
 \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Wir betrachten jetzt speziell die Operatoren

$$A(x_0 \updownarrow x_1 \updownarrow \dots \updownarrow x_k) = A(x_0) \updownarrow A(x_1) \updownarrow \dots \updownarrow A(x_k). \tag{19}$$

Sie sind nach (17) und (12) Summen von mehrfachen Kommutatoren von R-Operatoren, also lorentzinvariant.

Der Kommutator $[H(x_0, \dots, x_k), A(x_{k+1} \updownarrow x_{k+2} \updownarrow \dots \updownarrow x_n)]$ lässt sich nach (12) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 &[H, A(x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_n)] \\
 &= [H, A(x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_{n-1})] \updownarrow A(x_n) - [H \updownarrow A(x_n), A(x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_{n-1})] \\
 &= \dots,
 \end{aligned}$$

wobei der bei einem festen x_j stehende Pfeil in allen Termen derselbe ist. Fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens ergibt schliesslich eine Summe von Gliedern der Form

$$\begin{aligned}
 &[H \updownarrow \dots, A(x_{k+1})] \updownarrow \dots \\
 &= H \updownarrow \dots \uparrow A(x_{k+1}) \updownarrow \dots - H \updownarrow \dots \downarrow A(x_{k+1}) \updownarrow \dots
 \end{aligned}$$

nach (13). Man erhält so

$$\left. \begin{aligned}
 &[H(x_0, \dots, x_k), A(x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_n)] \\
 &= \sum_P (-1)^{s(P)} H(x_0, \dots, x_k \updownarrow x_{i_{k+1}} \updownarrow \dots \uparrow x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_{i_n}) \\
 &- \sum_P (\uparrow x_{k+1} \rightarrow \downarrow x_{k+1})
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Die Summen \sum_P sind über die Permutationen von (x_{k+1}, \dots, x_n) zu erstrecken, die in der Entwicklung des mehrfachen Kommutators $[\dots [x_{k+1}, x_{k+2}], \dots, x_n] = [\dots [x_{k+1}, \dots] x_n - x_n [\dots [x_{k+1}, \dots]] = \dots$ auftreten. Auch die Vorzeichen $(-1)^s$ entsprechen den Vorzeichen in dieser Entwicklung. Mit anderen Worten: \sum_P läuft über alle Permutationen, bei denen kein Index j zwischen zwei niedrigeren Indizes steht. $s(P)$ ist die Zahl der x_j , die vor allen x_i , $i > j$, stehen.

Sei $\uparrow x_{k+2}$, resp. $\downarrow x_{k+2}$. Dann verschwindet in (20) die erste, resp. die zweite Summe wegen (18), da z. B. im ersten Fall mit dem Term $\dots \uparrow x_{k+1} \uparrow x_{k+2} \dots$ immer auch der Term $\dots \uparrow x_{k+2} \uparrow x_{k+1} \dots$ mit dem umgekehrten Vorzeichen auftritt. Es bleiben also nur die Summanden mit $\downarrow x_{k+1}$, resp. $\uparrow x_{k+1}$ stehen.

Wir definieren nun $H(x_0, \dots, x_k) \uparrow A(x_{k+1} \updownarrow \dots \updownarrow x_n)$ als Summe derjenigen Glieder in (20), bei denen der erste Pfeil nach x_k aufwärts gerichtet ist:

$$H \uparrow A(x_{k+1} \updownarrow \dots) = \pm \sum'_P (-1)^{s(P)} H(\dots, x_k \uparrow x_{i_{k+1}} \updownarrow \dots \updownarrow x_{i_n}) \quad (21)$$

und entsprechend

$$-H \downarrow A(x_{k+1} \updownarrow \dots) = \pm \sum''_P (-1)^{s(P)} H(\dots, x_k \downarrow x_{i_{k+1}} \updownarrow \dots \updownarrow x_{i_n}). \quad (22)$$

womit

$$H \uparrow A(x_{k+1} \updownarrow \dots) - H \downarrow A(x_{k+1} \updownarrow \dots) = [H, A(x_{k+1} \updownarrow \dots)] \quad (23)$$

gilt.

Diese Definition der \updownarrow -Operation dehnen wir durch lineare Fortsetzung auf Operatoren der Form

$$G(x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{P(k+2, \dots, n)} \varepsilon_p A(x_{k+1} \updownarrow x_{i_{k+2}} \updownarrow \dots \updownarrow x_{i_n}), \quad \varepsilon_p = 0, \pm 1 \quad (24)$$

aus:

$$H(x_0, \dots, x_k) \updownarrow G(x_{k+1}, \dots, x_n) \equiv \sum_P \varepsilon_p H \updownarrow A(x_{k+1} \updownarrow x_{i_{k+2}} \updownarrow \dots \updownarrow x_{i_n}). \quad (25)$$

Damit gilt wieder

$$[H, G] = H \uparrow G - H \downarrow G. \quad (26)$$

Ist $H(x_0, \dots, x_k)$ selbst von der Form (24), so gilt das offensichtlich auch für $H \updownarrow G$, d. h. die Menge der Operatoren (24) (für beliebige Variablenzahlen) ist gegen die Pfeiloperation abgeschlossen.

Jetzt sind wir in der Lage, die gewünschte Verallgemeinerung der R -Operatoren einzuführen. Wir definieren die Mengen \mathfrak{G}_n von Operatoren $G_\mu(x_0, \dots, x_n)$ durch folgende Rekursionsvorschrift:

- a) \mathfrak{G}_0 besteht aus dem einzigen Element $A(x_0)$
- b) \mathfrak{G}_n besteht aus allen Operatoren

$$G_{\mu \uparrow \nu}(x_0, \dots, x_n) = G_{\mu}(x_0, \dots, x_k) \uparrow G_{\nu}(x_{k+1}, \dots, x_n) \tag{27}$$

mit $G_{\mu} \in \mathfrak{G}_k, G_{\nu} \in \mathfrak{G}_{n-k-1}, k = 0, 1, \dots, n-1$

Diese Vorschrift ist offenbar sinnvoll, da die so konstruierten G_{μ} alle von der Form (24) sind.

\mathfrak{G}_n enthält speziell den Operator

$$A(x_0) \uparrow A(x_1) \uparrow \dots \uparrow A(x_n) = R(x_0, \dots, x_n). \tag{28}$$

Es gilt

$$[G_{\mu}, G_{\nu}] = G_{\mu \uparrow \nu} - G_{\mu \downarrow \nu}. \tag{29}$$

Für den Spezialfall $G_{\mu} \in \mathfrak{G}_0$ lässt sich beweisen:

$$\left. \begin{aligned} A(x_0) \uparrow G_{\nu}(x_1, \dots, x_n) &= G_{\nu}(x_1, \dots, x_n) \downarrow A(x_0) \\ A(x_0) \downarrow G_{\nu}(x_1, \dots, x_n) &= G_{\nu}(x_1, \dots, x_n) \uparrow A(x_0) \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

Im allgemeinen Fall gelten jedoch die entsprechenden Gleichungen nicht!

Im folgenden werden wir einige Eigenschaften der Träger der G -Operatoren benutzen, die aus der lokalen Vertauschbarkeit der Feldoperatoren $A(x)$ folgen. Wir behaupten:

$G_{\mu}(x_0, \dots, x_n)$ verschwindet ausserhalb einer Menge, die durch Bedingungen der Form $(x_i - x_j) \in V_+$ (V_+ = Vorkegel) charakterisiert ist, wobei diese Bedingungen untereinander sowohl durch sowohl-als-auch als auch durch entweder-oder-Relationen verknüpft sein können. $G_{\mu}(x_0, \dots, x_k) \uparrow G_{\nu}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ hat in (x_0, \dots, x_k) denselben Träger wie $G_{\mu}(x_0, \dots, x_k)$.

Den Beweis führen wir durch allgemeine Induktion, wobei es genügt, den Fall $G_{\mu}(x_0, \dots, x_k) \uparrow A(x_{k+1})$ zu betrachten.

Wir nehmen also an, G_{μ} habe einen Träger der angegebenen Form. Die Bedingung $(x_i - x_j) \in V_+$ soll dadurch zustandekommen, dass G_{μ} als Summe von Termen geschrieben werden kann, die alle oder zum Teil (für eine entweder-oder-Bedingung) Bestandteile der Form $\theta(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_h}) \times [x_{i_1}, \dots, x_{i_h}]$, $i_1 = i, i_h = j$, enthalten. Diese Voraussetzung gilt in \mathfrak{G}_1 , das aus den beiden Elementen $\theta(x_0 - x_1) [x_0, x_1]$ und $\theta(x_1 - x_0) [x_1, x_0]$ besteht.

Anwendung der Operation $\uparrow A(x_{k+1})$ auf einen solchen Term ergibt nach (15)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{h-1} \theta(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}, x_{k+1}, \dots, x_{i_h}) [x_{i_1}, \dots, x_{i_j}, x_{k+1}, \dots, x_{i_h}] + \\ &\quad + \theta(x_{i_h} - x_{k+1}) [\theta(x_{i_1}, \dots, x_{i_h}) [x_{i_1}, \dots, x_{i_h}], A(x_{k+1})] \end{aligned}$$

Jeder der auftretenden Summanden enthält wieder einen Bestandteil der betrachteten Art, die Bedingung $(x_i - x_j) \in V_+$ bleibt somit bestehen. Zusätzlich erhält man noch die Bedingung

$$(x_i - x_{k+1}) \in V_+ \text{ für mindestens ein } i \leq k, \quad (31)$$

da ja jeder Summand in $G_\mu \uparrow A$ einen Operator $\theta(x_i - x_{k+1}) [x_i, x_{k+1}]$ enthält.

Entsprechend erhält man für $G_\mu \downarrow A(x_{k+1})$ die Zusatzbedingung

$$(x_{k+1} - x_i) \in V_+ \text{ für mindestens ein } i \leq k, \quad (32)$$

während die Bedingungen in (x_0, \dots, x_k) wiederum bestehen bleiben.

4. Verhalten im p-Raum

Wir betrachten die Vakuumerwartungswerte

$$g_\mu(\xi_1, \dots, \xi_n) = \langle G_\mu(x_0, \dots, x_n) \rangle_0, \quad \xi_i = x_0 - x_i \quad (33)$$

der G -Operatoren, resp. deren Fouriertransformierte

$$\tilde{g}(\not{p}_1, \dots, \not{p}_n) = \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_n e^{i\sum p_j \xi_j} g_\mu(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (34)$$

In diesem Paragraphen werden wir folgenden Satz beweisen:

$\tilde{g}_\mu(\not{p}_1, \dots, \not{p}_n)$ ist Randwert einer analytischen Funktion $\tilde{g}_\mu(k_1, \dots, k_n)$, $k_j = \not{p}_j + iq_j$, deren Regularitätsgebiet eine Röhre \mathfrak{R}_μ folgender Art ist:

Jeder Teilmenge I der Indizes $(1, \dots, n)$ wird ein Halbkegel $V_{\sigma(\mu, I)}$ ($\sigma = +$ oder $-$) zugeordnet. Dann

$$\mathfrak{R}_\mu = \{(k_1, \dots, k_n) \mid \sum_{j \in I} q_j \in V_{\sigma(\mu, I)}, \text{ alle } I\} \quad (35)$$

Es können n -Teilmengen I_h derart angegeben werden, dass das System der zugehörigen Bedingungen

$$Q_i \in V_{\sigma(\mu, I_i)}, \quad Q = \sum_{I_i} q_j \quad (36)$$

mit dem System aller $2^n - 1$ in (35) auftretenden Bedingungen äquivalent ist. Die Menge $\{Q_i\}$ nennen wir die Basis von \mathfrak{R}_μ .

Es ist zu beachten, dass \mathfrak{R}_μ von der im ersten Lemma von HALL und WIGHTMAN³⁾ betrachteten Form ist. \tilde{g}_μ ist also in das Gebiet

$$\mathfrak{R}'_\mu = \bigcup_{\Lambda \in L_+(C)} \Lambda \mathfrak{R}_\mu \quad (37)$$

analytisch fortsetzbar.

Den Beweis des angegebenen Satzes führen wir durch Induktion. Sei $G_\mu \in \mathfrak{G}_h, G_\nu \in \mathfrak{G}_{n-h-1}$. Sei $\tilde{g}_\mu(k_1, \dots, k_h)$ in \mathfrak{R}_μ regulär, ebenso $\tilde{g}_\nu(k_{h+2}, \dots, k_n)$ in \mathfrak{R}_ν . Dann behaupten wir, dass $\tilde{g}_{\mu \uparrow \nu}(p_1, \dots, p_n)$ wieder Randwert einer analytischen Funktion $\tilde{g}_{\mu \uparrow \nu}(k_j)$ ist, und dass die zugehörigen Röhren $\mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$ wie folgt charakterisiert sind:

Sei $I_\mu = \{q_1, \dots, q_h\}, I_\nu = \{q_{h+1}, \dots, q_n\}$. q -Summen, die nur Summanden aus einem der I enthalten, liegen in $\mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$ im selben Halbkegel wie die entsprechende Summe in \mathfrak{R}_μ , resp. \mathfrak{R}_ν . In \mathfrak{R}_ν ist dabei die Beziehung

$$q_{h+1} = - \sum_{i=h+2}^n q_i \text{ zu verwenden. Die Summe über alle } q_j \in I_\nu \text{ liegt in } V_+ \text{ resp.}$$

V_- für $\mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$ resp. $\mathfrak{R}_{\mu \downarrow \nu}$. Summen, die Glieder aus beiden I enthalten, liegen im selben Halbkegel wie die darin enthaltenen Partialsummen aus I_μ .

Die entsprechende Basis Q_1, \dots, Q_n erhält man offenbar aus den Basen $Q_1^\mu, \dots, Q_h^\mu, Q_{h+2}^\nu, \dots, Q_n^\nu$ von $\mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{R}_\nu$ wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= Q_i^\mu + \sum_{\substack{q_j \in I_\nu \\ q_j \rightsquigarrow Q_i^\mu}} q_j, & Q_i \sim Q_i^\mu, & i = 1, \dots, h \\ Q_{h+1} &= \sum_{I_\nu} q_j, & Q_{h+1} \in V_+, V_- \text{ für } \mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}, \mathfrak{R}_{\mu \downarrow \nu} \text{ resp.} \\ Q_i &= Q_i^\nu, & \text{falls } Q_i^\nu \rightsquigarrow Q_{h+1} \\ Q_i &= Q_{h+1} - Q_i^\nu, & Q_i \rightsquigarrow Q_i^\nu, \text{ falls } Q_i^\nu \sim Q_{h+1}. \end{aligned} \right\} i = h+2, \dots, n \quad (38)$$

Dabei bedeutet $P \sim Q$ ($P \rightsquigarrow Q$), dass die Vektoren P und Q im selben Halbkegel (in verschiedenen Halbkegeln) liegen.

Zum Beweis dieser Induktionsbehauptung benötigen wir einen Hilfssatz, dessen Beweis im Anhang gegeben werden wird:

Lemma. Sei $G(x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{G}_n$, also eine Summe von Termen der Form (19). Wir lassen nun die Variable x_f ($1 \leq f \leq n$) in allen diesen Summanden weg und erhalten so einen wohldefinierten Operator $G^f(x_0, \dots, x_{f-1}, x_{f+1}, \dots, x_n)$. Dann ist $G^f \in \mathfrak{G}_{n-1}$, und \mathfrak{R}_{G^f} ergibt sich aus \mathfrak{R}_G durch Weglassen der q_f enthaltenden Bedingungen.

$G_\mu(x_0, \dots, x_h) \uparrow G_\nu(x_{h+1}, \dots, x_n)$ ist nach Definition eine Summe von Gliedern der Form

$$G_\mu(x_0, \dots, x_h) \uparrow A(x_{i_{h+1}}) \downarrow \dots \downarrow A(x_{i_n}). \quad (39)$$

Wir betrachten eine Aufteilung T der Variablen x_{h+1}, \dots, x_n in $h+1$ Teilmengen T_0, \dots, T_h und definieren einen Operator $G_{\mu \uparrow \nu}^T(x_0, \dots, x_n)$. Dieser entsteht aus $G_{\mu \uparrow \nu}$ dadurch, dass in allen Summanden (39) die Mengen T_i in der richtigen Reihenfolge (und mit den richtigen Pfeilen) an die in G_μ vorhandenen Feldoperatoren $A(x_i)$ angehängt werden. $G_\mu \uparrow G_\nu$ ist die Summe dieser $G_{\mu \uparrow \nu}^T$ über alle Aufteilungen T .

Betrachten wir speziell den Fall, dass alle T_i ausser dem einen T_j leer sind. $G_{\mu \uparrow \nu}^T$ entsteht dann aus G_μ einfach durch Ersetzung des Faktors $A(x_j)$ durch $A(x_j) \uparrow G_\nu(x_{h+1}, \dots, x_n)$. $G_{\mu \uparrow \nu}^T$ hat also die dem Operator $A(x_j) \uparrow G_\nu$ zukommenden Trägereigenschaften. Im allgemeinen Fall ergibt sich ebenfalls eine Ersetzung von $A(x_j)$ durch einen G -Operator, der mit $A(x_j) \uparrow G_\nu$ in dem im vorstehenden Lemma angegebenen Zusammenhang steht.

Wie wir schon wissen, hat $G_\mu \uparrow G_\nu$ in x_0, \dots, x_h denselben Träger wie G_μ . Der Träger in x_{h+1}, \dots, x_n ist in der Vereinigungsmenge sämtlicher G^T -Träger enthalten. Wir behaupten, dass

$$\sum_{i=1}^n q_i \xi_i > 0 \tag{40}$$

für alle ξ_i aus diesem Träger und alle $\{q_i\} \in \mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$. Sei speziell $\xi_i \in t(G_\mu)$ für $i \leq k$, $\xi_i \in t(G_{\mu \uparrow \nu}^T)$ für $i > k$, T eine beliebige Aufteilung. Dann gilt in $R_{\mu \uparrow \nu}$:

$$\sum_1^n q_i \xi_i = \sum_{i \in T_0} \xi_i q_i + \sum_{\alpha=1}^h \sum_{i \in T_\alpha} (\xi_i - \xi_\alpha) q_i + \sum_{\alpha=1}^h \xi_\alpha (q_\alpha + \sum_{i \in T_\alpha} q_i) > 0,$$

da unter den gemachten Voraussetzungen alle drei Glieder einzeln > 0 sind. Dabei ist die Induktionsvoraussetzung verwendet worden, dass alle Behauptungen für den Fall $A(x_0) \uparrow G_\nu(x_1, \dots, x_h)$, $h < n$, gelten. Den Spezialfall $A(x_0) \uparrow G(x_1, \dots, x_n)$ führt man mit Hilfe von (30) auf den hier betrachteten Fall zurück.

Aus (40) folgt aber sofort die behauptete Regularität von $\tilde{g}_{\mu \uparrow \nu}$ in $\mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$. Der Beweis für den Fall $G_\mu \downarrow G_\nu$ verläuft genau gleich.

Zusätzlich zu diesen Regularitätsaussagen erhält man noch Aussagen über das Anwachsen von $\tilde{g}_{\mu \downarrow \nu}$ im Unendlichen, die hier nicht explizit angegeben werden sollen (siehe A).

5. Die Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$

Wir betrachten die Gesamtheit der in § 4 definierten Funktionen $\tilde{g}_\mu(k_1, \dots, k_n)$ für ein festes n . Diese Gesamtheit enthält speziell die Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$. \tilde{g}_μ ist nach (37) in \mathfrak{R}'_μ regulär.

Durch allgemeine Induktion beweisen wir

$$G_\mu(x_0, \dots, x_n) = R(x_0, \dots, x_n) + \text{+ Glieder der Form } [H_\alpha(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}), H_\beta(\dots, x_{i_n})] \tag{41}$$

$G_\mu(x_0, \dots, x_n)$ besteht nach Konstruktion aus Gliedern der allgemeinen Form $\pm A(x_0 \uparrow x_1 \uparrow \dots)$ resp. $\pm A(x_0 \downarrow x_1 \downarrow \dots)$. Dabei ist die Zahl der positiven Summanden um eins grösser als die Zahl der negativen: Gelte

das nämlich für G_α und G_β , $\mu = \alpha \uparrow \beta$. Wir greifen je einen Term aus G_α und G_β heraus und betrachten

$$A(x_0 \uparrow \dots) \uparrow A(x_{k+1} \downarrow x_{k+2} \downarrow \dots) = \pm \sum_P (-1)^{s(P)} A(x_0 \uparrow \dots x_k \uparrow x_{i_{k+1}} \downarrow \dots \downarrow x_{i_n})$$

nach (21). Dabei gilt das $+$ vor \sum_P im Falle $\downarrow x_{k+2}$, das $-$ im Falle $\uparrow x_{k+2}$.

Zu jedem Summanden mit $i_{k+1} \neq k+1, k+2$ gibt es auch einen Summanden, in dem x_{k+1}, x_{k+2} vertauscht sind und der dementsprechend das umgekehrte Vorzeichen aufweist. Zusätzlich zu diesen Paaren hat man im Fall $\downarrow x_{k+2}$ einen positiven Term mit $i_{k+1} = k+1$, im andern Fall einen negativen Term mit $i_{k+1} = k+2$. Daraus ergibt sich sofort unsere Behauptung über die Zahl der positiven und negativen Summanden in $G_{\alpha \uparrow \beta}$ und analog für $G_{\alpha \downarrow \beta}$. Nun ist nach (12) und (17)

$$A(x_0 \uparrow \dots \downarrow x_n) = R(x_0, \dots, x_n) + \sum [H_\alpha, H_\beta],$$

woraus sich auf Grund der vorangehenden Bemerkung die Beziehung (41) ergibt.

Die Fouriertransformierte von $\langle [H_\alpha(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}), H_\beta(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n})] \rangle_0$ verschwindet auf Grund der Spektralbedingungen, falls $(p_{i_{k+1}} + \dots + p_{i_n})^2 < 0$. Das gilt speziell in den Jost-Punkten⁴⁾, d. h. in den reellen Regularitätspunkten von $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$. Es lässt sich leicht zeigen, dass \mathfrak{R}' und \mathfrak{R}'_μ gemeinsame reellen Umgebungen enthalten. In diesen Umgebungen gilt somit nach (41)

$$\tilde{g}_\mu(k_1, \dots, k_n) = \tilde{r}(k_1, \dots, k_n), \tag{42}$$

d. h. \tilde{g}_μ ist eine analytische Fortsetzung von \tilde{r} in das Gebiet \mathfrak{R}'_μ .

Wir haben damit folgendes *Theorem* bewiesen:

Die Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$ ist in das Gebiet

$$\overline{\mathfrak{R}_n} = \bigvee_{G_\mu \in \mathfrak{G}_n} \mathfrak{R}'_\mu \tag{43}$$

analytisch fortsetzbar. Alle Funktionen (genauer: Distributionen) $\tilde{g}_\mu(p_1, \dots, p_n)$ sind Randwerte dieser Funktion \tilde{r} :

$$\tilde{g}_\mu(p_1, \dots, p_n) = \lim_{\substack{\{k_i\} \in \mathfrak{R}'_\mu \\ q_i \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_1, \dots, k_n), \quad k_j = p_j + iq_j. \tag{44}$$

Zusätzlich zu dieser Regularitätsaussage unterliegt \tilde{r} noch der früher erwähnten Bedingungen über das Verhalten im Unendlichen.

Eine so einfache Charakterisierung des Gebietes $\overline{\mathfrak{R}_n}$ wie im Falle der Vierpunktfunktion ist im allgemeinen Fall nicht bekannt. Man ist hier auf die im Text gegebene rekursive Definition angewiesen (siehe dazu auch § 8).

6. Identitäten

Neben der eben hergeleiteten Regularitätsforderung ergeben sich aus den Eigenschaften von K noch weitere Bedingungen für \tilde{r} , nämlich gewisse Identitäten zwischen G -Operatoren und somit zwischen speziellen Randwerten von \tilde{r} .

Es muss gelten:

$$[G_\mu, G_\nu] = - [G_\nu, G_\mu], \tag{43}$$

also

$$G_{\mu \uparrow \nu}(x_0, \dots, x_n) - G_{\mu \downarrow \nu}(x_0, \dots, x_n) \equiv G_{\nu \downarrow \mu}(x_0, \dots, x_n) - G_{\nu \uparrow \mu}(x_0, \dots, x_n). \tag{44}$$

Die gleiche Identität gilt natürlich für die entsprechenden \tilde{g} -Funktionen:

$$\lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) - \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\mu \downarrow \nu} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) \equiv \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\nu \downarrow \mu} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) - \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\nu \uparrow \mu} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) \tag{45}$$

Allgemeinere Identitäten erhält man, wenn man beachtet, dass zu (44) beliebige G -Operatoren in beliebiger Reihenfolge durch die Pfeiloperation hinzugefügt werden können, resp. dass (44) zu beliebigen G 's hinzugefügt werden kann, z. B.

$$G_\alpha \uparrow G_{\mu \uparrow \nu} - G_\alpha \uparrow G_{\mu \downarrow \nu} = G_\alpha \uparrow G_{\nu \downarrow \mu} - G_\alpha \uparrow G_{\nu \uparrow \mu}$$

usw. Es ergibt sich so:

$$\lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\dots(\mu \uparrow \nu)\dots} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) - \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\dots(\mu \downarrow \nu)\dots} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) = \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\dots(\nu \downarrow \mu)\dots} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) - \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_{\dots(\nu \uparrow \mu)\dots} \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) \tag{46}$$

Auf genau dieselbe Weise erhält man aus der Jacobi-Identität

$$[[G_\alpha, G_\beta], G_\gamma] + [[G_\beta, G_\gamma], G_\alpha] + [[G_\gamma, G_\alpha], G_\beta] \equiv 0 \tag{47}$$

zwölfgliedrige Beziehungen der Form

$$G_{\dots(\alpha \uparrow \beta \uparrow \gamma)\dots} - G_{\dots(\alpha \uparrow \beta \downarrow \gamma)\dots} - G_{\dots(\alpha \downarrow \beta \uparrow \gamma)\dots} + G_{\dots(\alpha \downarrow \beta \downarrow \gamma)\dots} + \text{zykl.} = 0, \tag{48}$$

welche natürlich ebenfalls als Randwertidentitäten für $\tilde{r}(k_j)$ geschrieben werden können.

7. Umkehrung

Wir haben jetzt zu zeigen, dass die eben hergeleiteten Bedingungen für \tilde{r} , nämlich Regularität in $\overline{\mathfrak{R}_n}$ und Bestehen der Identitäten (46) und (48), für die Existenz von K (und damit von W) hinreichend sind.

Sei also eine analytische Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

A) \tilde{r} ist regulär in $\overline{\mathfrak{R}_n}$ (und erfüllt dort die erwähnten Bedingungen im Unendlichen).

B) \mathcal{r} ist in $\overline{\mathfrak{R}}_n$ invariant gegen die komplexe homogene Lorentzgruppe $L_+(C)$ (d. h. mit Determinante + 1).

C) $\tilde{\mathcal{r}}$ ist invariant gegen Permutationen der Argumente k_1, \dots, k_n und gegen die Ersetzung $k_i \rightarrow k_0 = -\sum_{j=1}^n k_j$.

D) Die Randwerte von $\tilde{\mathcal{r}}$ in den reellen Punkten erfüllen die in § 6 angegebenen Identitäten.

Dann lässt sich das zugehörige $K(x_0, \dots, x_n)$ mit den Eigenschaften a) bis d) aus § 2 wie folgt konstruieren:

Wir definieren

$$\tilde{g}_\mu(\phi_1, \dots, \phi_n) = \lim_{\substack{\{k_j\} \in \mathfrak{R}_\mu \\ q_j \rightarrow 0}} \tilde{\mathcal{r}}(k_1, \dots, k_n) \tag{49}$$

und erhalten daraus durch Fouriertransformation

$$g_\mu(\xi_1, \dots, \xi_n) \equiv \langle G_\mu(x_0, \dots, x_n) \rangle_0, \quad \xi_i = x_0 - x_i \tag{50}$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} &\langle [\dots [G_\mu(x_0, \dots, x_i), G_\nu(x_{i+1}, \dots, x_j)], O_1(x_{j+1}, \dots)], O_h(\dots, x_n)] \rangle_0 \equiv \\ &\equiv \langle [\dots [G_{\mu \uparrow \nu}, O_1], \dots, O_h] \rangle_0 - \langle [\dots [G_{\mu \downarrow \nu}, O_1], \dots, O_h] \rangle_0, \end{aligned} \tag{51}$$

wobei die O_r aus G -Operatoren nach der Vorschrift (5) aufgebaute Kommutatorausdrücke sind.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Definition erhält man schliesslich $K(x_0, \dots, x_n)$ und allgemeiner alle in § 2 betrachteten $\langle O_\mu \rangle$.

Die Bedingungen a) bis d) sind offenbar erfüllt:

a) gilt als Folge von D), wie man durch Induktion beweist.

Translationsinvarianz besteht trivialerweise. Die Invarianz gegen die homogene eigentliche Lorentzgruppe folgt aus B), da die Definitionen (49) und (51) eine invariante Bedeutung haben.

Die Fouriertransformierte des durch (51) definierten Ausdrucks ist nach Konstruktion in ϕ_1, \dots, ϕ_i Randwert einer in \mathfrak{R}_μ analytischen Funktion. Speziell ist die Fouriertransformierte von $\langle [\dots [R(x_0, x_1), A(x_2)], \dots], A(x_n)] \rangle_0$ eine in \mathfrak{R} analytische Funktion der Variablen k_1 . Wie üblich folgt daraus

$$\langle [\dots [R(x_0, x_1), \dots] \rangle_0 = 0 \quad \text{für} \quad (x_0 - x_1) \notin V_+$$

und damit

$$\begin{aligned} &K(x_0, \dots, x_n) \\ &= \langle [\dots [R(x_0, x_1), \dots] \rangle_0 - \langle [\dots [R(x_1, x_0), \dots] \rangle_0 = 0 \\ &\quad \text{für} \quad (x_0 - x_1)^2 < 0, \end{aligned}$$

womit auch c) bewiesen ist.

Die in Bedingung d) auftretenden Ausdrücke

$$\langle [O_\alpha(x_0, \dots, x_k), O_\beta(x_{k+1}, \dots, x_n)] \rangle_0$$

sind nach Definition Summen von Termen der Form

$$\begin{aligned} T(x_0, \dots, x_n) &= \langle [G_\mu(x_0, \dots, x_k), G_\nu(x_{k+1}, \dots, x_n)] \rangle_0 \\ &= g_{\mu \uparrow \nu}(\xi_1, \dots, \xi_n) - g_{\mu \downarrow \nu}(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned} \tag{52}$$

oder im Impulsraum

$$\begin{aligned} \tilde{T}(p_1, \dots, p_n) &= \tilde{g}_{\mu \uparrow \nu}(p_1, \dots, p_n) - \tilde{g}_{\mu \downarrow \nu}(p_1, \dots, p_n) \\ &= \lim_{\substack{\{k_i\} \in \mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu} \\ q_i \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j) - \lim_{\substack{\{k_i\} \in \mathfrak{R}_{\mu \downarrow \nu} \\ q_i \rightarrow 0}} \tilde{r}(k_j). \end{aligned} \tag{53}$$

Nun unterscheiden sich die Gebiete $\mathfrak{R}_{\mu \uparrow \nu}$ und $\mathfrak{R}_{\mu \downarrow \nu}$ nur durch die Lage der Summe $\sum_{k+1}^h q_j$ ($\in V_+$ resp. $\in V_-$). Lässt man bei der Grenzwertbildung in (53) zuerst diese Summe gegen Null gehen, so erhält man

$$\tilde{T}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \text{für} \quad (p_{k+1} + \dots + p_n)^2 < 0, \tag{54}$$

weil in diesem Fall der betrachtete Grenzpunkt noch ein Regularitätspunkt ist (da $\in \mathfrak{R}'_{\mu \uparrow \nu}$) und somit die verschiedene Art des Grenzübergangs in den beiden Termen keine Rolle spielt. Damit ist auch d) verifiziert.

8. Schlussbemerkungen

Wir haben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abgeleitet, dass zu einer vorgegebenen r -Funktion die zugehörige W -Funktion existiert. Insbesondere haben wir ein Gebiet $\overline{\mathfrak{R}}_n$ angegeben, in dem $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$ regulär sein muss. Zu diesem Gebiet sollen hier noch einige Bemerkungen gemacht werden.

Auf Grund der in A gegebenen Resultate für die Vierpunkt-Funktion hätte man Regularität von $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$ im Gebiet

$$\mathfrak{D}' = \bigcup_{A \in L_+^{(C)}} A \mathfrak{D} \tag{55}$$

erwarten können, wobei \mathfrak{D} die durch die Bedingung

$$\left(\sum_{j \in I} q_j \right)^2 > 0 \quad \text{für alle Teilmengen } I \text{ aus } (1, \dots, n) \tag{56}$$

charakterisierte Röhre darstellt. Wie D. RUELLE⁵⁾ gezeigt hat, ist \mathfrak{D}' für $n > 3$ grösser als $\overline{\mathfrak{R}}_n$. Es enthält nämlich auch Röhren der am Anfang

von § 4 betrachteten Art, die nicht durch eine aus nur n Elementen bestehende Basis der Form (36) festgelegt sind.

Wir haben jedoch nur Regularität in \mathfrak{R}_n gefunden. Das hat zur Folge, dass der im Falle $n = 3$ bestehende Zusammenhang zwischen \tilde{r} und der Fouriertransformierten $\tilde{\tau}$ von

$$\tau(\xi_1, \dots, \xi_n) = \langle TA(x_0, \dots, x_n) \rangle_0 \quad (57)$$

mit den hier entwickelten Hilfsmitteln im allgemeinen Fall nicht mehr bewiesen werden kann. D. h. $\tilde{\tau}(p_1, \dots, p_n)$ ist nicht unbedingt überall Randwert der Funktion $\tilde{r}(k_1, \dots, k_n)$. Es ist jedoch zu beachten, dass $\overline{\mathfrak{R}_n}$ (auch nach Bildung der Holomorphiehülle) keineswegs das vollständige Regularitätsgebiet von \tilde{r} zu sein braucht. Es ist anzunehmen, dass die in § 6 betrachteten Identitäten das Regularitätsgebiet noch vergrössern, wie in A für den Spezialfall $n = 3$ bewiesen wurde. Die zitierte Arbeit von D. RUELLE, in der nur die 0-Komponenten der p_i als komplexe Variable betrachtet werden, scheint tatsächlich darauf hinzudeuten, dass eine analytische Fortsetzung von \tilde{r} in \mathfrak{D}' möglich ist.

Ein grosser Teil dieser Arbeit entstand während eines Aufenthaltes des Autors am Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg. Für die ihm dort erwiesene Gastfreundschaft möchte er Herrn Prof. H. LEHMANN herzlich danken. Die Arbeit wurde durch ein Nachwuchsstipendium des Schweizerischen Nationalfonds unterstützt.

Anhang: Beweis des in § 4 verwendeten Lemmas

Das zu beweisende Lemma lautet:

Sei $G(x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{G}_n$. Wir lassen in allen Summanden (19) die Variable x_f ($1 \leq f \leq n$) weg und erhalten so einen Operator $G^f(x_0, \dots, x_{f-1}, x_{f+1}, \dots, x_n)$. Dann ist $G^f \in \mathfrak{G}_{n-1}$ und \mathfrak{R}_{G^f} ergibt sich aus \mathfrak{R}_G durch Weglassen der q_f enthaltenden Bedingungen.

Beweis:

A) Sei $G(x_0, \dots, x_n) = G_\alpha(x_0, \dots, x_k) \updownarrow G_\beta(x_{k+1}, \dots, x_n)$, $1 \leq f \leq k$. Das Lemma gelte für G_α . Dann gilt es offensichtlich auch für G mit

$$G^f = G_\alpha^f \updownarrow G_\beta. \quad (A.1)$$

B) Sei

$$G(x_0, \dots, x_n) = A(x_0) \updownarrow G_\alpha(x_1, \dots, x_n). \quad (A.2)$$

Wir betrachten den Operator $\overline{G^f}(x_0, \dots, x_{f-1}, x_{f+1}, \dots, x_n)$, der aus $G_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ durch die Substitution $x_f \rightarrow x_0$ entsteht. $\overline{G^f}$ gehört natürlich zu \mathfrak{G}_{n-1} , und das Regularitätsgebiet der zugehörigen Funktion \tilde{g}^f ergibt sich aus \mathfrak{R}_α durch die Ersetzung $q_f \rightarrow q_0$ in allen Bedingungen. Die Bedingungen für die q_f nicht enthaltenden Summen werden davon nicht berührt.

Es ist aber

$$\overline{G^f} \equiv G^f. \quad (\text{A.3})$$

Zum Beweis betrachten wir einen typischen Term aus G_α , wobei wir speziell den Fall $\uparrow x_f$ annehmen (resp. $x_1 \downarrow x_2$ für $f = 1$. Der andere Fall $\downarrow x_f$ resp. $x_1 \uparrow x_2$ lässt sich genau gleich behandeln):

$$A(x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_f \dots \uparrow x_n) \quad (\text{A.4})$$

Adjunktion dieses Terms zu $A(x_0)$ ergibt in der bekannten Weise Ausdrücke der Form $A(x_0 \uparrow x_{i_1} \uparrow \dots \uparrow x_f \dots \uparrow x_{i_n})$. Beim Weglassen der Variablen x_f bleiben nur die Glieder

$$A(x_0 \downarrow x_{i_1} \uparrow \dots \uparrow x_{i_{n-1}}), \quad i_1 < f \text{ (resp. } i_1 = 2 \text{ im Fall } f = 1)$$

stehen, da sich die übrigen paarweise wegheben. Man erhält damit

$$\begin{aligned} & (A(x_0) \uparrow A(x_1 \uparrow \dots \uparrow x_n))^f = \\ & = (A(x_0) \downarrow A(x_1 \uparrow \dots \uparrow x_{f-1})) \uparrow A(x_{f+1}) \uparrow \dots \uparrow A(x_n) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Für $f = 1$ lautet die rechte Seite $A(x_0) \downarrow A(x_2) \dots$

Andererseits erhält man bei Bildung von $\overline{G^f}$ aus dem Term (A.4) den Ausdruck

$$\begin{aligned} & A(x_1 \uparrow x_2 \dots x_{f-1} \uparrow x_0 \uparrow x_{f+1} \dots x_n) = \\ & = (A(x_0) \downarrow A(x_1 \uparrow \dots \uparrow x_{f-1})) \uparrow x_{f+1} \dots \uparrow x_n \end{aligned}$$

nach (30), also dasselbe wie in (A.5), womit (A.3) bewiesen ist. Das Lemma gilt somit im betrachteten Spezialfall.

C) Sei $G = G_\alpha(x_0, \dots, x_k) \uparrow G_\beta(x_{k+1}, \dots, x_n)$, $f > k$. Vergleichsweise betrachten wir

$$G'(x_0, x_{k+1}, \dots, x_n) = A(x_0) \uparrow G_\beta(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (\text{A.6})$$

G'^f besteht aus Summanden der Form

$$A(x_0) \uparrow A(x_{i_{k+1}}) \uparrow \dots \uparrow A(x_{i_n}). \quad (\text{A.7})$$

Analog bilden wir G^f , indem wir in (A.7) $A(x_0)$ durch G_α ersetzen. Da $G'^f \in \mathfrak{G}_{n-k-1}$, liegt das analog gebildete G^f in \mathfrak{G}_{n-1} . Es ist klar, dass das so definierte G^f der nach den Vorschriften des Lemmas gebildete Operator ist. Dass sich dabei das richtige Regularitätsgebiet ergibt, ist einfach zu sehen. Die Vorschriften innerhalb I_α bleiben ja bestehen, und die übrigen Vorschriften ergeben sich in voller Analogie zu G'^f .

Literaturverzeichnis

- 1) O. STEINMANN, Helv. Phys. Acta 33, 257 (1960).
- 2) A. S. WIGHTMAN, Phys. Rev. 101, 860 (1956).
- 3) D. HALL und A. S. WIGHTMAN, Dan. Vid. Sels. mat. fys. Medd. 37, Nr. 5 (1957).
- 4) R. JOST, Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957).
- 5) D. RUELLE, Thèse, Université libre de Bruxelles, 1959.