Bemerkungen zur Fröhlichschen Theorie der Supraleitung

Autor(en): **Schafroth, M.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **24 (1951)**

Heft VI

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112232

Bemerkungen zur Fröhlichschen Theorie der Supraleitung

von **M. R. Schafroth** (ETH., Zürich).

(20. X. 1951).

Summary: The introduction of magnetically polarized matter into a metal permits to consider infinitely extended superconductors. In such a model, a very simple mathematical criterion for the occurrence of superconductivity can be given. It is then shown that the interaction between the conduction electrons and the lattice vibrations in a metal, if treated by perturbation methods, can never yield the London equation for the supercurrent in a magnetic field. The discrepancy with a result obtained by Fröhlich[6]) stems from an erroneous choice of the expression for the current density by this author. Thus, believing the basic idea of Fröhlich's theory[1]) to be true, other approximations have to be considered. In the appendix, a general expression for the diamagnetic susceptibility of a gas of free charged particles, valid in any statistics, is derived by a new method.

§ 1. Einleitung.

Fröhlich[1]) hat vorgeschlagen, dass die Wechselwirkung zwischen den Leitungselektronen, welche durch ihre Kopplung an das Feld der Gitterschallquanten bewirkt wird, eine Erklärung der Supraleitung liefern könnte. Für diese Annahme sprechen viele Gründe, insbesondere der Isotopeneffekt der Sprungtemperatur[2]), die Tatsache, dass gute Leiter (für welche die Kopplung an die Schallquanten klein ist[3])) nicht supraleitend werden, und die grössenordnungsmässige Übereinstimmung zwischen der Energie eines mit Gitterschallgeschwindigkeit bewegten Elektrons und der pro Elektron gerechneten Energiedifferenz der normalen und der supraleitenden Phase. Fröhlich konnte durch störungsmässige Behandlung dieser Wechselwirkung zeigen, dass bei genügender Grösse der Kopplungskonstanten F mit dem Schallquantenfeld die Verteilung des Elektronengases am absoluten Nullpunkt von der Fermiverteilung verschieden ist; durch Identifikation dieses Zustandes mit dem supraleitenden Zustand können die obenerwähnten Tatsachen in befriedigender Weise erklärt werden. Allerdings hat sich um die Frage, ob das Störungsverfahren zur Diskussion dieser Verteilung berechtigt sei, in der letzten Zeit eine Diskussion entwickelt[4]), und die Lage erscheint noch ungeklärt.

Die Hauptaufgabe einer Theorie der Supraleitung besteht darin, ein Modell aufzuzeigen, aus welchem die Grundgleichungen der Londonschen phänomenologischen Theorie[5]) folgen, und insbesondere einen Ausdruck für die darin enthaltene Temperaturfunktion $n_s(T)$ („Dichte der supraleitenden Elektronen" in einer naiven Interpretation) zu geben.

In einer zweiten Arbeit[6]) hat FRÖHLICH versucht, zu zeigen, dass aus seinem Modell im stationären Fall, bei Abwesenheit elektrischer Felder, diese Gleichungen folgen. Sie reduzieren sich dann auf

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{\imath}) = -\frac{1}{c} \vec{B}, \tag{1}$$

wo $\vec{\imath}$ die Stromdichte, $\vec{B}$ die magnetische Induktion, c die Lichtgeschwindigkeit und

$$\lambda = \frac{m}{e^2 n_s}\,; \quad (e, m \text{ Ladung, Masse des Elektrons}).$$

Unter Verwendung der Randbedingung:

$$\vec{\imath}_n = 0 \quad \text{an der Oberfläche des Supraleiters}$$

kann (1) auch geschrieben werden (vgl. (7)):

$$\vec{\imath} = -\frac{e^2 n_s}{m c} \vec{A}', \tag{1'}$$

wobei $\vec{A}'$ das Vektorpotential in einer derartigen Eichung bedeutet, dass seine Normalkomponente an der Oberfläche verschwindet.

Demgegenüber ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, zu zeigen, dass aus dem Modell freier Elektronen in Wechselwirkung mit dem Schallquantenfeld eine Gleichung vom Typus (1) nicht folgt, solange man die Wechselwirkung nur als Störung behandelt.

Das nächstliegende Vorgehen wäre, ein in ein *endliches* Volumen V eingeschlossenes Gas von Elektronen und Schallquanten mit Wechselwirkung in einem räumlich variablen Magnetfeld zu studieren und zu prüfen, ob eine Beziehung der Form (1') zwischen Vektorpotential und Stromdichte besteht — mindestens für die Feldverläufe, für welche (1') verträglich ist mit der Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{\imath}. \tag{2}$$

Dabei darf das Volumen V nicht beliebig gross gewählt werden, da im Innern grosser Körper bekanntlich kein nichtverschwindendes

Feld mit (1′) und (2) verträglich ist. Die Endlichkeit von V bewirkt, dass man gleichzeitig mit der eigentlichen Supraleitung auch unwesentliche reine Oberflächeneffekte (die z. B. von der speziellen Wahl der Randbedingungen für die Elektronen abhängen) mitnimmt. Ausserdem zeichnet die Berandung des Volumens makroskopisch eine Eichung aus ($\vec{A}'$), so dass man gewisse formale Vereinfachungen, die eichinvarianten Problemen eigen sind, nicht durchführen kann. Wir werden deshalb etwas anders vorgehen auf Grund folgender Überlegung:

Wenn man eine Theorie der Supraleitung auf Grund des Modells eines Gases von Elektronen aufstellen will, die unter sich und mit einem andern Gas — z. B. von Schallquanten — in Wechselwirkung stehen, dann ist es wohl zulässig, den von den Elektronen erfüllten Raum ausserdem mit einem magnetisch polarisierten Medium angefüllt zu denken, das mit den Elektronen und den Schallquanten keine Wechselwirkung hat, ausser durch das Magnetfeld. (Man kann z. B. daran denken, die magnetischen Momente der Kerne des Gitters auszurichten). In einem solchen Medium ist dann zwischen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ zu unterscheiden; die Maxwellschen Gleichungen sind:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{\imath}\,; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}; \; \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{P},$$

wo $\vec{P}$ die Magnetisierung des Zusatzmediums ist. Zu diesen tritt noch ein Zusammenhang zwischen $\vec{\imath}$ und $\vec{B}$; falls dieser die Form (1) hat, so liefert unser Modell Supraleitung.

Die Einführung der Polarisation $\vec{P}$ gestattet uns, den gesamten Raum homogen mit Supraleiter anzufüllen; durch Wahl eines geeigneten Verlaufes $\vec{P}(x)$ kann dem Feld $\vec{B}$ jeder beliebige (quellenfreie) Verlauf $\vec{B}(x)$ gegeben werden, konsistent mit (1) und (2). Damit fallen nicht nur die Schwierigkeiten am Rande weg, sondern (1) gestattet auch eine eindeutige Auflösung nach dem Strom. Es ist nämlich die Lösung von (1), für welche der Strom gleichzeitig mit B im Unendlichen verschwindet:

$$\vec{\imath}(\vec{x}) = \frac{1}{c\lambda} \operatorname{rot} \int d^3 x' \, \frac{\vec{B}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{3}$$

Die Beschreibung eines endlichen supraleitenden Gebietes V ohne Polarisation $\vec{P}$ geschieht dann so, dass man in V: $\vec{P} = 0$ setzt, ausserhalb V (= in V^*) $\vec{P}(x)$ so einrichtet, dass es am Rande von V stetig anschliesst, im Unendlichen genügend stark verschwindet, und dass am Rande von V: $\vec{\imath}_n = 0$. Es wird dann

$$\vec{\imath} = \frac{1}{c\lambda} \operatorname{rot} \int\limits_V d^3 x' \frac{\vec{H}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{c\lambda} \int\limits_{V^*} d^3 x' \frac{\vec{B}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

und der vom Aussengebiet abhängige Zusatzterm führt gerade die in (1′) verwendete ausgezeichnete Eichung ein.

Wir werden nicht erwarten dürfen, den Zusammenhang zwischen $\vec{\imath}$ und $\vec{B}$ direkt in der Form (1) bzw. (3) zu finden; es werden vielmehr noch Effekte anderer Art (Diamagnetismus usw.) eine Rolle spielen. Eine durchsichtige Klassifikation aller Effekte erreicht man auf folgende Weise:

Bei Beschränkung auf Terme 1. Ordnung im Magnetfeld ist der allgemeinste mögliche Zusammenhang zwischen Stromdichte und Vektorpotential:

$$i_\mu(\vec{x}) = \int d^3 x' K_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{x}') \cdot A_\nu(\vec{x}') \tag{4}$$

oder, im Fourierraum:

$$i_\mu(\vec{p}) = K_{\mu\nu}(\vec{p}) \cdot A_\nu(\vec{p}) . \tag{4'}$$

Dass $K_{\mu\nu}$ nur von der Koordinatendifferenz $\vec{x} - \vec{x}'$ abhängt, ist ein Ausdruck für die Translationsinvarianz unseres Modells, die wir durch den Übergang zum unendlich ausgedehnten Supraleiter erreicht haben.

Die Eichinvarianz und die Kontinuitätsgleichung für den Strom verlangen:

$$\sum_\nu K_{\mu\nu} p_\nu = \sum_\mu p_\mu K_{\mu\nu} = 0 , \tag{5}$$

also

$$K_{\mu\nu}(\vec{p}) = -(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) K(p^2)\,^{*)} \tag{5'}$$

oder

$$\vec{\imath}(\vec{p}) = \vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{A}(\vec{p})) \cdot K(p^2)$$

$$\vec{\imath}(\vec{p}) = + i \vec{p} \times \vec{B}(\vec{p}) \cdot K(p^2) ; \tag{6}$$

*) Hier haben wir, «pour fixer les idées», Isotropie des Raumes vorausgesetzt. Diese ist erfüllt, falls die Kopplung zwischen Elektronen und Schallfeld isotrop ist. Analoge Überlegungen lassen sich aber auch im allgemeinen Anisotropiefalle durchführen.

rot $\vec{\imath}$ ist gegeben durch

$$i\vec{p}\times\vec{\imath}(\vec{p}) = p^2 K(p^2)\,\vec{B}(\vec{p})\,. \tag{6'}$$

Falls $K(p^2)$ für kleine p^2 regulär ist:

$$K(p^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot p^2 + \cdots,$$

so wird:

$$\vec{\imath}(\vec{p}) = i\,\alpha_0 \vec{p}\times\vec{B}(\vec{p}) + i\,\alpha_1 p^2 \vec{p}\times\vec{B}(\vec{p}) + \cdots$$

$$i\vec{p}\times\vec{\imath}(\vec{p}) = -\alpha_0 p^2 \vec{B}(\vec{p}) - \alpha_1 (p^2)^2 \vec{B}(\vec{p}) + \cdots,$$

also

$$\vec{\imath}(\vec{x}) = \alpha_0 \operatorname{rot} \vec{B} + \alpha_1 \operatorname{rot} \Delta\vec{B} + \cdots,$$

$$\operatorname{rot} \vec{\imath}(\vec{x}) = -\alpha_0 \Delta\vec{B} - \alpha_1 \Delta\Delta\vec{B} + \cdots.$$

Darin entspricht ersichtlich der erste Term einer Magnetisierung $\vec{M} = (\alpha_0/c)\,\vec{B}$, die nächsten den Effekten der Inhomogenität des Magnetfeldes. Jedoch tritt kein Term auf, der die Londonsche Gleichung (1) erfüllen würde. Diese kann nur so zustande kommen, dass $K(p^2)$ für $p^2 = 0$ einen Pol erster Ordnung hat:

$$K(p^2) = \frac{\alpha}{p^2} + K_r(p^2)\,;\quad K_r(p^2)\ \text{regulär}\,. \tag{7}$$

Damit erhält obige Entwicklung noch ein Zusatzglied, das der Gleichung (3) entspricht:

$$\vec{\imath}(\vec{p}) = -i\vec{p}\times\vec{B}(\vec{p})\cdot\frac{\alpha}{p^2}\,.$$

Es erfüllt Gleichung (1):

$$i\vec{p}\times\vec{\imath}(\vec{p}) = \alpha\,\vec{B}(\vec{p})$$

oder:

$$\operatorname{rot}\,\vec{\imath}(\vec{x}) = \alpha\,\vec{B}(\vec{x})\,.$$

Man könnte hoffen, dass die Fröhlichsche Wechselwirkung (auch bei bloss störungsmässiger Behandlung) von der Art ist, dass ein solch singulärer Kern $K(p^2)$ auftritt. Wir werden jedoch zeigen, dass der Kern, den man so erhält, vollkommen regulär ist und also nur Korrekturen zum Diamagnetismus (und den Effekten der Feldinhomogenität) der freien Elektronen liefert.

Die Tatsache, dass die Londonsche Gleichung (1) äquivalent ist mit der Aussage (7) über das singuläre Verhalten des Kerns $K(p^2)$, bedeutet physikalisch, dass die Supraleitung zustande kommen muss durch einen Effekt, der die langen Wellen des Magnetfeldes stark bevorzugt vor den kürzeren. (Der Diamagnetismus dagegen ist diejenige Erscheinung, welche auf alle Wellenlängen von $\vec{B}$ gleich stark anspricht; die höheren Inhomogenitätseffekte sind nur von den kurzen Wellenlängen abhängig.) Dies steht in engem Zusammenhang mit der Londonschen[7]) Aussage, im Supraleiter sei eine „weitreichende Ordnung" (long-range order) der Elektronen wirksam.

Wenn FRÖHLICH[6]) zu anderen Ergebnissen gelangt, so liegt das an einer falschen Wahl des Stromdichteoperators; wir gehen darauf in § 5 kurz ein.

§ 2. Das Modell.

Wir betrachten ein System von N Elektronen in Wechselwirkung mit Schallquanten und in einem äusseren Magnetfeld; wir fordern Periodizität mit dem Periodizitätsvolumen G und lassen dann $G \to \infty$ gehen, wobei N/G konstant gehalten wird. Die Hamiltonfunktion ist

$$H = H_0 + H_1 + H', \tag{8}$$

wo

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + H_0^{osz}:$$

freie Elektronen und freie Schallquanten

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{\vec{\varkappa}} \sum_{i=1}^{N} \left(a_{\vec{\varkappa}}\, \gamma(\vec{\varkappa})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{\varkappa}\vec{x}_i)} + a_{\vec{\varkappa}}^{*}\, \gamma^{*}(\vec{\varkappa})\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{\varkappa}\vec{x}_i)} \right):$$

Wechselwirkung Elektronen-Schallquanten

$$H' = -\frac{e}{m c} \sum_i \vec{p}_i \vec{A}(\vec{x}_i) + \frac{e^2}{2 m c^2} \sum_i \vec{A}^2(\vec{x}_i):$$

Wirkung des äusseren Magnetfeldes

$\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$: Orts- und Impulskoordinaten des i-ten Elektrons
$\vec{\varkappa}$: Wellenvektor der Schallquanten
$a_{\vec{\varkappa}}$, $a_{\vec{\varkappa}}^{*}$: Absorptions- und Emissionsoperatoren für Schallquanten

$$\gamma(\vec{\varkappa}) = \frac{2}{3} \sqrt{|\varkappa|} \cdot C \sqrt{\frac{\hbar}{M s}}$$ in FRÖHLICH's[1]) Bezeichnung. („Blochsches Matrixelement"[3]))

Die Eichinvarianz des Modells ist gewährleistet; H_1 wird durch das Magnetfeld nicht modifiziert, da es einer Kopplung der Elektronen an die zeitliche Ableitung des Schallfeldes entspricht.

Der Stromdichteoperator ist in einer Matrixdarstellung durch Eigenzustände (p), (p'), ... von H_0:

$$(p) = (\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_N;\ N_{\vec{\varkappa}})$$

$\vec{p}_i$ Impulse der Elektronen
$N_{\vec{\varkappa}}$ Besetzungszahlen der Schallquanten.

$$(p\,|\vec{\jmath}\,(\vec{x}_0)\,|\,p') = \frac{1}{G}\,\frac{e}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i - \frac{e^2}{m\,c}\,\frac{N}{G}\,\vec{A}\,(\vec{x}_0)\,, \tag{9a}$$

falls (p), (p') bezüglich der Elektronenkoordinaten diagonal sind.

$$(p\,|\vec{\jmath}\,(\vec{x}_0)\,|\,p') = \pm\left(\frac{e}{2\,m}\,\frac{1}{G}\,(\vec{p}_i + \vec{p}_i')\,e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_i')\vec{x}_0} - \frac{e^2}{m\,c}\,\frac{1}{G}\,\vec{A}\,(\vec{x}_0)\,e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_i')\vec{x}_0}\right) \tag{9b}$$

für Zustände (p), (p'), welche sich nur im Impuls des i-ten Elektrons, in den Schallquantenzahlen beliebig, unterscheiden. (Das Vorzeichen hängt, infolge des Pauliprinzips, von der Numerierung der Elektronen ab).

$$(p\,|\vec{\jmath}\,(\vec{x}_0)\,|\,p') = 0 \tag{9c}$$

für alle andern Zustandspaare.

Die mittlere Stromdichte an der Stelle $\vec{x}_0$ bei der Temperatur T ist nach der statistischen Mechanik

$$\vec{\imath}\,(\vec{x}_0) = \text{Spur}\left\{\vec{\jmath}\,(\vec{x}_0)\,e^{\frac{\Phi - H}{kT}}\right\} \qquad (\Phi \equiv \text{freie Energie}) \tag{10}$$

(wobei selbstverständlich als Zustände nur die mit den richtigen Symmetrieeigenschaften zu berücksichtigen sind.)

Der Ausdruck (10) soll nun diskutiert werden in der Näherung, dass sowohl H_1 wie H' nur störungsmässig berücksichtigt werden. Dann werden wir H' linear, H_1 hingegen quadratisch berücksichtigen (da ja Terme linear in H_1 in der Spur (10) nichts beitragen können, weil H_1 die Schallquantenzahl stets um 1 ändert, alle andern vorkommenden Operatoren sie invariant lassen). Die Verallgemeinerung auf höhere Näherungen ergibt sich dann von selbst.

Die Berechtigung dieser Näherung bezüglich H_1 diskutieren wir hier nicht, wollen wir doch gerade zeigen, dass man keine Supraleitung erhält, wenn man sie zugrundelegt. Bezüglich H' ist die Entwicklung sicherlich gerechtfertigt, da uns ja nur Effekte interessieren, welche linear im Magnetfeld sind. Da ausserdem der räumliche Verlauf des Feldes vollständig frei bleibt, können wir die pathologischen Fälle, in denen bei grossem G selbst beliebig schwache Magnetfelder eine starke Störung der Elektronenbahnen bewirken (wie z. B. der Fall des homogenen Magnetfeldes), ohne weiteres ausgeschlossen denken. (Für periodische Felder beispielsweise tritt die Schwierigkeit nicht ein.)

Es handelt sich also darum, die Dichtematrix

$$e^{\frac{\Phi - (H_0 + H_1 + H')}{kT}}$$

nach H_1 und H' zu entwickeln. Dies geschieht mit Hilfe der in § 3 entwickelten mathematischen Hilfsmittel.

§ 3. Mathematische Hilfsmittel.

Sei

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 , \tag{11}$$

wo Λ_0 ein im System der Eigenfunktionen ψ_p diagonaler Operator ist:

$$(p \,|\Lambda_0|\, p') = (p\,|1|\,p') \cdot \lambda(p) .$$

Λ_1 sei ein beliebiger Operator. Dann gilt, falls $F_0(\Lambda)$ eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist, für kleine ε folgende Entwicklung:

$$(p\,|F_0(\Lambda)|\,p') = (p\,|1|\,p')\, F_0(\lambda) + \varepsilon\,(p\,|\Lambda_1|\,p')\, F_1(\lambda, \lambda') +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{p_1 \cdots p_{n-1}} (p\,|\Lambda_1|\,p_1)(p_1\,|\Lambda_1|\,p_2) \cdots (p_{n-1}\,|\Lambda_1|\,p')\, F_n(\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}\, \lambda') \tag{12}$$

mit

$$\lambda \equiv \lambda(p),\ \lambda' \equiv \lambda(p'),\ \lambda_i \equiv \lambda(p_i)$$

und

$$F_n(z_0, z_1, \cdots z_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{F_0(z_i)}{\prod\limits_{\varkappa \neq i} (z_i - z_\varkappa)} . \tag{13}$$

Speziell:

$$F_1(z_0, z_1) = \frac{F(z_1) - F(z_0)}{z_1 - z_0} .$$

Die F_n sind höhere Differenzenquotienten von F_0, deren für uns wesentliche Eigenschaft ist, für reguläre F_0 überall regulär zu sein; ihre Grenzwerte für konfluente Argumente ergeben sich aus

$$\lim_{\substack{z_1 \to z_0 \\ z_2 \to z_0 \\ \vdots \\ z_\lambda \to z_0}} F_n(z_0, z_1 \cdots z_n) = \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial z_0^\lambda} F_{n-\lambda}(z_0, z_{\lambda+1}, \cdots z_n). \tag{14}$$

Hieraus folgt insbesondere, dass für diagonales Λ_1, $(p \mid \Lambda_1 \mid p') = (p \mid 1 \mid p')$. $\lambda_1(p)$ (12) in die gewöhnliche Taylorentwicklung übergeht:

$$(p\,|F_0(\Lambda)|\,p') = (p\,|1|\,p') \sum_0^\infty \frac{\varepsilon^n}{n!} (\lambda_1(p))^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} F_0(\lambda(p)). \tag{12'}$$

Der Beweis von (12) gelingt sehr leicht, wenn man für $F_0(\Lambda)$ seine Potenzreihendarstellung

$$F_0(\Lambda) = \sum_0^\infty c_n \Lambda^n$$

einsetzt und beachtet, dass

$$(\Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1)^n = \Lambda_0^n + \varepsilon(\Lambda_0^{n-1}\Lambda_1 + \Lambda_0^{n-2}\Lambda_1\Lambda_0 + \cdots + \Lambda_0\Lambda_1\Lambda_0^{n-2} + \Lambda_1\Lambda_0^{n-1}) + \cdots$$

also

$$\begin{aligned}(p\,|(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1)^n|\,p') &= (p\,|1|\,p')\,\lambda^n + (p\,|\Lambda_1|\,p') \times \\ &\times (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\lambda' + \cdots + \lambda\lambda'^{\,n-2} + \lambda'^{\,n-1}) + \\ &+ \sum_{\nu=2}^\infty \varepsilon^\nu \sum_{p_1 \cdots p_{\nu-1}}^\infty (p\,|\Lambda_1|\,p_1) \cdots (p_{\nu-1}|\Lambda_1|\,p') \times \\ &\times \sum_{\Sigma\alpha_i = n-\nu} \lambda^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} \lambda'^{\alpha_\nu}.\end{aligned}$$

Verwendet man noch die algebraische Identität

$$\sum_{\sum_{i=0}^{\nu}\alpha_i = n} z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \cdots z_\nu^{\alpha_\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{z_i^{n+\nu}}{\prod_{\varkappa \neq i}(z_i - z_\varkappa)},$$

so ergibt sich sofort

$$(p\,|\sum_n c_n\Lambda^n|\,p') = (p\,|1|\,p')\sum_n c_n\,\lambda^n +$$
$$+\,\varepsilon\,(p\,|\Lambda_1|\,p')\sum_n c_n\left(\frac{\lambda^n}{\lambda-\lambda'}+\frac{\lambda'^n}{\lambda'-\lambda}\right)+$$
$$+\sum_{\nu=2}^{\infty}\varepsilon^\nu\sum_{p_1\cdots p_{\nu-1}}(p\,|\Lambda_1|\,p_1)\cdots(p_{\nu-1}\,|\Lambda_1|\,p')\times$$
$$\times\sum_n c_n\sum_{i=0}^{\nu}\frac{\lambda_i^n}{\prod\limits_{\varkappa\neq i}(\lambda_i-\lambda_\varkappa)}$$
$$=(p\,|1|\,p')\,F_0(\lambda)+\varepsilon\,(p\,|\Lambda_1|\,p')\,F_1(\lambda,\lambda')+$$
$$+\sum_{\nu=2}^{\infty}\varepsilon^\nu\sum_{p_1\cdots p_{\nu-1}}(p\,|\Lambda_1|\,p_1)\cdots(p_{\nu-1}\,|\Lambda_1|\,p')\,F_\nu(\lambda,\lambda_1,\cdots\lambda_{\nu-1},\lambda')$$

w. z. b. w.

Bemerkung: Die Entwickelbarkeit von $F_0(\Lambda)$ in eine Potenzreihe ist nicht wesentlich; die Entwicklung (12) lässt sich genau so z. B. aus der Fourierdarstellung

$$F_0(\Lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,c(\sigma)\,e^{i\sigma\Lambda}$$

gewinnen. In dieser Arbeit werden wir für $F_0(\Lambda)$ nur die Exponentialfunktion $e^{-\Lambda/kT}$ und, im Anhang, die Fermi- bzw. Boseverteilung $(1\pm e^{-(\zeta-\Lambda)/kT})^{-1}$ einsetzen, die sich als Potenzreihe bzw. Fourierintegral darstellen lassen, so dass die Verwendung von (12) gerechtfertigt ist. Die Frage der Konvergenz der Reihe (12) ist äquivalent mit der Frage der Konvergenz der Störungstheorie und braucht uns hier nicht zu beschäftigen.

§ 4. Diskussion der Stromdichte.

Die Entwicklung (12) ist nun auf

$$F_0(\Lambda)\equiv e^{\frac{\Phi-\Lambda}{kT}} \tag{15}$$

anzuwenden, mit $\Lambda_0=H_0$, $\varepsilon\,\Lambda_1=H_1+H'$. Es ist hierbei zu beachten, dass es nicht erlaubt ist, einfach $e^{-H/kT}$ zu entwickeln und in

$$\vec{\imath}=\mathrm{Sp.}\left\{\vec{\jmath}\,e^{\frac{\Phi-H}{kT}}\right\}=\mathrm{Sp.}\left\{\vec{\jmath}\,e^{-\frac{H}{kT}}\right\}\Big/\mathrm{Sp.}\left\{e^{-\frac{H}{kT}}\right\}$$

Zähler und Nenner als separate Entwicklungen anzuschreiben. Da nämlich Φ eine extensive Grösse, d. h. proportional der Teilchenzahl N ist, ist die Entwicklung der Zustandssumme mit Hilfe von (12) nicht eine solche nach ε, sondern nach $N\varepsilon$ und also bei grossem Periodizitätsbereich nicht gerechtfertigt. Man kann jedoch eine Entwicklung für Mittelwerte intensiver Grössen durchführen, indem man schreibt:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\,\Phi_1 + \varepsilon^2\,\Phi_2 + \cdots \tag{16}$$

und

$$F_0(\Lambda) = e^{\frac{1}{kT}[(\Phi_0 - \Lambda_0) + \varepsilon\,(\Phi_1 - \Lambda_1) + \varepsilon^2\,\Phi_2 + \cdots]} \tag{17}$$

und dies nach $\varepsilon\,(\Phi_1 - \Lambda_1) + \varepsilon^2 \Phi_2 + \cdots$ entwickelt. Man erhält dann für den Mittelwert einer intensiven Grösse ϱ:

$$\begin{aligned}
\bar{\varrho} = \mathrm{Sp.}\{\varrho F_0(\Lambda)\} &= \sum_n (n\,|\varrho|\,n)\,F_0(\Phi_0 - \lambda(n)) + \\
&+ \varepsilon \sum_{n n'} (n\,|\varrho|\,n')\,(n'\,|\Phi_1 \cdot 1 - \Lambda_1|\,n)\,F_1(\Phi_0 - \lambda(n), \Phi_0 - \lambda(n')) \\
&+ \varepsilon^2 \sum_{n n' n''} (n\,|\varrho|\,n')\,\big[(n'\,|\Phi_1 \cdot 1 - \Lambda_1|\,n'')\,(n''\,|\Phi_1 \cdot 1 - \Lambda_1|\,n)\,\times \\
&\quad \times F_2(\Phi_0 - \lambda(n), \Phi_0 - \lambda(n'), \Phi_0 - \lambda(n'')) + \\
&\quad + \Phi_2\,(n'\,|1|\,n'')\,(n''\,|1|\,n)\,F_1(\Phi_0 - \lambda(n), \Phi_0 - \lambda(n'))\big] \\
&+ \cdots
\end{aligned} \tag{18}$$

Die Grössen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$ sind aus

$$\mathrm{Sp.}\,F_0(\Lambda) = 1 \tag{19}$$

zu bestimmen, d. h.

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_0 = \text{freie Energie des ungestörten Systems} \\
&\sum_n (n\,|\Phi_1 \cdot 1 - \Lambda_1|\,n)\,F_1(\Phi_1 - \lambda(n), \Phi_0 - \lambda(n)) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

usw.

In unserm Fall ist $\varepsilon\,\Lambda_1 = H_1 + H'$ zu setzen, und wir haben bis zu Termen der Ordnung $H_1^2\,H'$ zu entwickeln. Wir müssen also, in einleuchtender Bezeichnung, setzen:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' + \Phi_1 + \Phi_1' + \Phi_2 + \Phi_2' \tag{20}$$

Es ist leicht zu sehen, dass Φ', Φ_1', Φ_2' verschwinden. Sie sind nämlich proportional der nullten Fourierkomponente $\int d^3x\,\vec{A}(x)$ des Vektorpotentials, die durch eine triviale Umeichung immer zum

Verschwinden gebracht werden kann. Ebenso ist $\Phi_1 = 0$, da H_1 keine Diagonalelemente hat, und es bleibt nur

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_2 \,. \tag{20'}$$

Damit wird — wir schreiben $(p\,|\Phi|\,p')$ statt $\Phi \cdot (p\,|1|\,p')$ und $F(E)$ statt $F(\Phi_0 - E)$

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\imath}\,(x_0) = \\
&= \sum_p (p\,|\vec{\jmath}_0|\,p)\, F_0(E) && \text{(a)}\\
&+ \sum_{p p'} (p\,|H'|\,p')\,(p'\,|\vec{\jmath}\,|\,p)\, F_1(E, E') + \sum_p (p\,|\vec{\jmath}\,'|\,p)\, F_0(E) && \text{(b)}\\
&+ \sum_{p p' p''} \{(p\,|H_1|\,p')\,(p'\,|H_1|\,p'')\, F_2(E, E', E'') - \\
&\qquad - (p\,|\Phi_2|\,p')\,(p'\,|1|\,p'')\, F_1(E, E')\}\,(p''\,|\vec{\jmath}_0|\,p) && \text{(c)}\\
&+ \sum_{p p' p''} \{(p\,|H_1|\,p')\,(p'\,|H_1|\,p'')\, F_2(E, E', E'') - \\
&\qquad - (p\,|\Phi_2|\,p')\,(p'\,|1|\,p'')\, F_1(E, E')\}\,(p''\,|\vec{\jmath}\,'|\,p) && \text{(d)}\\
&+ \sum_{p p' p'' p'''} \{[(p\,|H_1|\,p'')\,(p''\,|H_1|\,p''')\, F_3(E, E'', E''', E') - \\
&\qquad - (p\,|\Phi_2|\,p'')\,(p''\,|1|\,p''')\, F_2(E, E'', E''')]\,(p''\,|H'|\,p''') + \\
&\qquad + (p\,|H_1|\,p'')\,(p''\,|H'|\,p''')\,(p'''\,|H_1|\,p')\, F_3(E, E'', E''', E') + \\
&\qquad + (p\,|H'|\,p'')\,[(p''\,|H_1|\,p''')\,(p'''\,|H_1|\,p')\, F_3(E, E'', E''', E') - \\
&\qquad - (p''\,|\Phi_1|\,p''')\,(p'''\,|1|\,p')\, F_2(E, E'', E')]\}\,(p'\,|\vec{\jmath}_0|\,p) && \text{(e)}\\
&+ \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Bestimmungsgleichungen für Φ_0 und Φ_2 sind:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_p F_0(E) = 1\\
&\sum_{p p'} \{(p\,|H_1|\,p')(p'\,|H_1|\,p)\, F_2(E, E', E) - \Phi_2\,(p\,|1|\,p')\, F_1(E, E)\} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Die Terme (a) und (c) verschwinden aus Symmetriegründen; (b) ist die Stromdichte eines Gases freier Elektronen im Magnetfeld: sie besteht aus dem Diamagnetismus freier Elektronen nebst Zusatztermen von der Inhomogenität des Feldes (vgl. Anhang). (d) und (e) sind die uns hier interessierenden Beiträge der Ordnung $H_1^2\, H'$.

Zunächst sieht man sofort, dass (d) verschwindet: $(p'|\vec{j}'|p)$ hat nämlich ausser den Diagonalelementen nur Matrixelemente, welche ein Elektron ohne Impulserhaltung streuen, während $(p|H_1|p'')$ $(p''|H_1|p')$ stets den Impuls erhält. Es geben also nur die Terme mit $(p') = (p)$ in (d) einen Beitrag. $(p|\vec{j}'|p)$ ist aber von (p) unabhängig $= -\frac{e^2}{mc}\frac{N}{G}\vec{A}(x_0)$ und kann vor die Summe gezogen werden; diese verschwindet dann identisch infolge der Bestimmungsgleichung für Φ_2.

Der uns interessierende Strom $\sim H_1^2 H'$ ist damit einzig durch (21e) gegeben. Jedes Glied dieser Summe entspricht einem vierstufigen Übergang, in dessen Verlauf zwei Elektronen unter Erhaltung des Gesamtimpulses gestreut werden ($H_1 \cdot H_1$; dabei wird im Zwischenzustand die Schallquantenbesetzung geändert, was aber wieder rückgängig gemacht wird und sich für uns nur im betreffenden Energiewert äussert) und ausserdem eine zweimalige Streuung eines Elektrons ohne Impulserhaltung stattfindet ($H' j_0$). Der gesamte Prozess muss wieder zum Anfangszustand zurückführen. Es ist deshalb klar, dass die „Impulsdefizite" der beiden Streuungen ohne Impulserhaltung sich kompensieren müssen. Bei einem Impulsdefizit $\vec{q}$ enthält das Matrixelement von H' die Fourierkomponente $\vec{A}(\vec{q})$ als Faktor; beim kompensierenden Impulsdefizit $-\vec{q}$ enthält das Matrixelement von $\vec{j}_0$ den Faktor $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{x}_0}$. Dies ist überdies die einzige $\vec{x}_0$-abhängige Grösse im ganzen Ausdruck. Es ist damit sofort ersichtlich, dass unser Kern $K_{\mu\nu}(\vec{q})$ durch die Terme in (21e) gegeben ist, die einem Impulsdefizit $\vec{q}$ entsprechen. Nach den in § 1 gemachten Bemerkungen haben wir nur zu zeigen, dass dieser Ausdruck für kleine $\vec{q}$ nicht die Form

$$c \cdot \frac{q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} \cdot q^2}{q^2}$$

haben kann, um nachzuweisen, dass unser Modell in dieser Näherung keine Supraleitung liefert.

Diese Tatsache ist ohne weitere Rechnung einzusehen, indem man feststellt, dass

a) keines der auftretenden Matrixelemente für sich bei kleinem $\vec{q}$ die Form $\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$ haben kann;

b) keines der auftretenden Matrixelemente und keiner der Faktoren F für $\vec{q} = 0$ einen Pol haben kann. Die Faktoren F sind ja, wie in § 3 erwähnt, überall regulär; die Matrixelemente von H'

und $\vec{j}_0$ ebenfalls. Für die Matrixelemente von H_1 ist die Aussage dann richtig, wenn (*A*) $\gamma(\vec{\varkappa}) < 0 \left(\frac{1}{|\vec{\varkappa}|}\right)$ für kleine $\vec{\varkappa}$. Dies bedeutet physikalisch, dass keine endliche Vorwärtsstreuung in einen beliebig kleinen Winkel bestehen soll; eine Abweichung von dieser Annahme (die durch das Blochsche Matrixelement natürlich erfüllt ist) erscheint unnatürlich und dürfte wohl schwerwiegende Folgen für die Theorie der Leitfähigkeit haben. Indem wir deshalb die Annahme (*A*) ausdrücklich einführen, folgt aus diesen Überlegungen, dass in (21e) keine Terme der Form $c \cdot \frac{q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} \cdot q^2}{q^2}$ enthalten sein können, was unsere Behauptung beweist.

Es mag, vom formalen Standpunkt, bemerkt werden, dass falls H_1 für kleine $\vec{\varkappa}$ eine derartige Singularität hätte, es in den Termen, in welchen H_1 ein Elektron gerade um $\vec{q}$ streut, nicht genügen würde, die niedrigste Ordnung in der Entwicklung nach $\vec{q}$ zu betrachten. Diese wäre dann in allen Faktoren bis zur 2. Ordnung durchzuführen, wobei wohl Terme der Form $\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$ auftreten könnten.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass für reguläres $\gamma(\vec{\varkappa})$ (also z. B. für den Blochschen Ansatz) auch in höheren Näherungen keine Supraleitung auftreten kann, da ja dann stets alle Faktoren eines Glieds einzeln regulär sind.

Der Vorteil der hier verwendeten Methode, die Dichtematrix direkt zu entwickeln, gegenüber dem anderen Verfahren, zunächst durch störungsmässige Elimination des Schallfeldes auf ein nur von den Elektronenkoordinaten abhängiges Problem überzugehen, liegt hauptsächlich darin, dass die im letzten Fall auftretenden Energienenner bei uns in übersichtlicher Weise in den F_n-Funktionen zu regulären Ausdrücken amalgamiert sind.

§ 5. Schlussbemerkungen.

Dass Fröhlich[6]) zu entgegengesetzten Folgerungen gelangt, beruht, wie in § 1 erwähnt, auf einer falschen Wahl des Stromoperators. Sein Vorgehen ist das folgende: Durch eine Störungstheorie zweiter Ordnung nach H_1 werden zunächst die Schallquanten eliminiert, wodurch man eine bestimmte Wechselwirkung zwischen den Elektronen erhält. Von dieser werden nur die Terme, welche im Impulsraum diagonal sind (die „Selbstenergie der Verteilung"), betrachtet. Die Eigenzustände der Elektronen sind dann ebene

Wellen. Fröhlich setzt für den Stromdichteoperator eines Elektrons den Ausdruck kräftefreier Elektronen im Magnetfeld

$$\vec{\jmath}\,(\vec{x}_0) = \frac{e}{2m}\left(\vec{p}\,\delta\,(\vec{x}-\vec{x}_0) + \delta\,(\vec{x}-\vec{x}_0)\,\vec{p}\right) - \frac{e^2}{mc}\,\vec{A}\,(\vec{x}_0)\,\delta\,(\vec{x}-\vec{x}_0) \tag{22}$$

ein. Dies ist offensichtlich unzulässig, muss man doch bei Durchführung der Störungstheorie den Stromdichteoperator (9) ebenfalls der kanonischen Transformation, welche die Schallquanten wegschafft, unterwerfen, wodurch Zusatzterme auftreten. Man erkennt auch leicht, dass für nicht freie Teilchen, auch wenn der Hamiltonoperator im Impulsraum diagonal und also ihre Eigenzustände weiterhin ebene Wellen sind, der Ausdruck (22) die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt.

Die Kontinuitätsgleichung allein reicht nicht aus, die Stromdichte eindeutig zu definieren, da sie einen divergenzfreien Zusatz offen lässt. Dieser kann nur bei Kenntnis des Verhaltens des Systems im äusseren elektromagnetischen Feld festgelegt werden. Es genügt also nicht, die Wechselwirkung der Elektronen, welche durch die Gitterschwingungen verursacht wird, in Abwesenheit des Magnetfeldes zu berechnen. Man muss im Gegenteil die Elimination der Schallquanten bereits in Gegenwart des Magnetfeldes durchführen, was die oben erwähnten Zusatzterme zum Strom liefert. Einfacher ist jedoch der hier eingeschlagene Weg, die Schallquanten überhaupt nicht erst zu eliminieren.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass die Isotropieannahme $\gamma\,(\vec{\varkappa}) = \gamma\,(|\vec{\varkappa}|)$, welche die Isotropie des Raumes nach sich zieht (siehe Fussnote S. 4), nicht notwendig ist und in unserer Rechnung auch nicht verwendet wurde.

Es sei ausdrücklich betont, dass wir nicht behaupten, die Wechselwirkung zwischen Leitungselektronen und Gitterschwingungen sei nicht für das Auftreten der Supraleitung verantwortlich; die in der Einleitung aufgeführten Gründe sprechen deutlich dafür, dass ein solcher Zusammenhang besteht. Lediglich wenn man diese Wechselwirkung störungsmässig als schwache Kopplung behandelt, kann man keine Supraleitung erhalten; d. h. diese tritt im Konvergenzgebiet der Störungstheorie nicht auf. Diese Tatsache dürfte mit der Wentzelschen Kritik[6]) von Fröhlich's Theorie in Zusammenhang stehen. Es ist zu hoffen, dass eine Behandlung unter anderen Approximatoinen neue Aussichten eröffnet.

ANHANG.

Der Diamagnetismus freier geladener Teilchen.

Wir wollen noch die Terme (21b) diskutieren. Da in diesen die Elektronen dynamisch vollständig unabhängig sind, ist es bequemer, sie im „kleinen“ Phasenraum der einzelnen Teilchen anzuschreiben. Für die die Zustände charakterisierenden Indizes (p) können wir den Impuls $\vec{p}$ des Teilchens wählen; für F_0 müssen wir je nach der Statistik, der die Teilchen genügen, die Boltzmann-, Fermi- oder Bose-Verteilungsfunktion setzen.

Es ist dann die mittlere Stromdichte pro Teilchen:

$$\vec{\imath}\,(\vec{x}_0) = \sum_{\vec{p}\,\vec{p}'} (\vec{p}\,|H'|\,\vec{p}')\,(\vec{p}'\,|\vec{\jmath}_0(\vec{x}_0)|\,\vec{p})\,F_1(E,E') + \sum_{\vec{p}} (\vec{p}\,|\vec{\jmath}'(\vec{x}_0)|\,\vec{p})\,F_0(E) =$$

$$= -\frac{e^2}{m^2 c}\,\frac{1}{G} \sum_{\vec{p}\,\vec{q}} (\vec{p}\,\vec{A}\,(\vec{q}))\left(\vec{p}+\frac{\vec{q}}{2}\right) e^{-i\frac{\vec{q}}{\hbar}\vec{x}_0}\, F_1(E,E') -$$

$$-\frac{e^2}{m c}\,\frac{1}{G}\,\vec{A}\,(\vec{x}_0) \sum_{\vec{p}} F_0(E)\,; \qquad \text{mit } \vec{p}\,'-\vec{p} \equiv \vec{q}\,.$$

Entwickeln wir

$$F_1(E,E') = F_1\left(\frac{p^2}{2m}\,,\ \frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{2m}\right)$$

nach Potenzen von $\vec{q}$, so erhalten wir:

$$F_1(E,E') = \frac{\partial F_0(E)}{\partial E} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F_0(E)}{\partial E^2}\left(\frac{\vec{p}\,\vec{q}}{m}+\frac{q^2}{2m}\right) + \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 F_0(E)}{\partial E^3}\left(\frac{\vec{p}\,\vec{q}}{m}\right)^2 + \cdots$$

Damit:

$$\vec{\imath}\,(\vec{x}_0) = -\frac{e^2}{m c}\,\frac{1}{G}\,\vec{A}\,(\vec{x}_0) \sum_{\vec{p}} F_0(E) - \frac{e^2}{m c}\,\frac{1}{G} \sum_{\vec{p}\,\vec{q}} (\vec{p}\,\vec{A}\,(\vec{q}))\,\frac{\partial E}{\partial \vec{p}}\, e^{-i\frac{\vec{q}}{\hbar}\vec{x}_0}\,\frac{\partial F_0}{\partial E} -$$

$$-\frac{e^2}{2 m^2 c}\,\frac{1}{G} \sum_{\vec{p}\,\vec{q}} (\vec{p}\,\vec{A}\,(\vec{q}))\left\{\left[\frac{\vec{q}}{2}\,\frac{(\vec{p}\,\vec{q})}{m} + \vec{p}\,\frac{q^2}{2m}\right]\frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\,\vec{p}\,\frac{(\vec{p}\,\vec{q})^2}{m^2}\,\frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3}\right\} e^{-i\frac{\vec{q}}{\hbar}\vec{x}_0} + 0\,(q^4)\,,$$

wobei die in $\vec{q}$ linearen Terme, welche aus Symmetriegründen nichts beitragen, weggelassen wurden.

Der zweite Term kompensiert nach partieller Integration exakt den ersten; es bleibt:

$$i_\mu(\vec{x}_0) = \frac{e^2}{4 m^3 c} \frac{1}{G} \Big\{ \hbar^2 \Delta A^\lambda(x_0) \sum_{\vec{p}} p_\lambda p_\mu \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} +$$
$$+ \hbar^2 \frac{\partial^2 A^\lambda(x_0)}{\partial x_0^\varrho \, \partial x_0^\sigma} \sum_{\vec{p}} \Big[p_\lambda p_\varrho \delta_{\mu\sigma} \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} + \frac{2}{3m} p_\lambda p_\mu p_\varrho p_\sigma \frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3} \Big] \Big\}.$$

Mit

$$\sum_{\vec{p}} p_\lambda p_\mu \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} = \frac{1}{3} \delta_{\lambda\mu} \sum_{\vec{p}} p^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}$$

$$\sum_{\vec{p}} p_\lambda p_\mu p_\varrho p_\sigma \frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3} = \frac{1}{15} [\delta_{\lambda\mu} \delta_{\varrho\sigma} + \delta_{\lambda\varrho} \delta_{\mu\sigma} + \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\mu\varrho}] \sum_{\vec{p}} (p^2)^2 \frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3}$$

und unter Einschränkung der Eichung durch $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, wird:

$$i_\mu(\vec{x}_0) = \frac{1}{G} \frac{e^2 \hbar^2}{3 m^2 c} \Delta A_\mu(\vec{x}_0) \left[\frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} E \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} + \frac{2}{15} \sum_{\vec{p}} E^2 \frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3} \right].$$

Mit

$$\sum_{\vec{p}} E \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} = \frac{3}{4} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{E} F_0 = \frac{3}{4} \overline{E^{-1}}$$

$$\sum_{\vec{p}} E^2 \frac{\partial^3 F_0}{\partial E^3} = -\frac{15}{8} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{E} F_0 = -\frac{15}{8} \overline{E^{-1}}$$

erhalten wir schliesslich:

$$\vec{\imath}(\vec{x}_0) = + \frac{\hbar^2 e^2}{24 m^2 c} \frac{1}{G} \overline{E^{-1}} \Delta \vec{A} = -\frac{1}{G} \frac{\hbar^2 e^2}{24 m^2 c} \overline{E^{-1}} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}_0).$$

Dem entspricht eine Magnetisierung $\vec{M}$ nach:

$$\vec{\imath} = c \operatorname{rot} \vec{M}.$$

Also:

$$\vec{M} = -\frac{1}{G} \frac{1}{6} \mu^2 \vec{H} \cdot \overline{E^{-1}}; \quad \mu = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Für ein Gas freier spinloser geladener Teilchen ergibt sich somit eine diamagnetische Suszeptibilität pro Teilchen:

$$\chi = -\frac{1}{6} \mu^2 \frac{\overline{E^{-1}}}{G},$$

was für Boltzmannstatistik ($\overline{E^{-1}} = 2\,N/kT$) und Fermistatistik am absoluten Nullpunkt ($\overline{E^{-1}} = 3\,N/\zeta$) in die bekannten Ausdrücke[8]) übergeht.

Es ist mir eine angenehme Verpflichtung Herrn Prof. W. PAULI für seine stete Hilfe und Anregung, Herrn Prof. V. WEISSKOPF für viele wertvolle Diskussionen meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Literatur.

[1]) H. FRÖHLICH, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).
[2]) REYNOLDS et al. Phys. Rev. **78**, 487 (1950); MAXWELL, Phys. Rev. **78**, 477 (1950).
[3]) F. BLOCH, Z. f. Phys. **52**, 555 (1928).
[4]) G. WENTZEL, Phys. Rev. **83**, 168 (1951); KUN HUANG, im Druck.
[5]) F. und H. PONDON, Physica **2**, 341 (1935); M. v. LAUE, Theorie der Supraleitung, Springer, 1947.
[6]) H. FRÖHLICH, Proc. Phys. Soc. **64**, 129 (1951).
[7]) F. LONDON, Phys. Rev. **74**, 562 (1948).
[8]) L. LANDAU, Z. f. Phys. **64**, 629 (1930).