Neutron-Deuteron Streuung bei niedrigen Energien

Neutron-Deuteron Streuung bei niedrigen Energien

von **A. Troesch** und **M. Verde**, Phys. Inst. der ETH. Zürich.

(30. VIII. 1950.)

Einleitung.

Beim elastischen Stoss von Neutronen an Deuteronen tritt im Schwerpunktssystem eine starke Rückwärtsstreuung auf. Dies wurde experimentell von verschiedenen Autoren für Neutronen von 2,5, 3,3 und 14 MeV sichergestellt[1])[2])[3]).

Die elastische Neutron-Deuteron (n,d) Streuung ist besser zur Entscheidung des Austauschcharakters der Wechselwirkung zwischen Nukleonen geeignet als die Streuung von einem Nukleon an einem anderen.

Die als Dreikörperproblem aufgefasste Theorie der $(n\text{-}d)$-Streuung bietet für die höheren Energien oder für die Berechnung an sich kleiner Streuphasen keine Schwierigkeiten mehr; dagegen bedingt die Ermittlung der Streuphasen bei kleinen Energien mühsame numerische Rechnungen.

In dieser Arbeit haben wir eine Entwicklung von k cotg δ_0 nach Potenzen von k^2, wie sie für das Zweikörperproblem kürzlich angegeben worden ist[4]), auf das hier vorliegende Dreikörperproblem erweitert.

Ist die Energie der einfallenden Neutronen so klein, dass die P-Welle selbst wenig gestreut wird und sich vornehmlich durch die Interferenz mit der S-Welle bemerkbar macht, so lässt sich die Streuphase δ_1 in guter Näherung leicht berechnen, und es bleibt einzig die Streuphase δ_0 der S-Welle streng zu ermitteln. Zur Berechnung von δ_0 ist die Kenntnis der Eigenfunktion des Systems für die Einfallsenergie Null erforderlich. Diese erhielten wir durch ein Variationsverfahren.

Unsere Betrachtungen gelten für eine Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen von der Form

$$V_{23} = U_{23}\{w + b\,(2{,}3)_\sigma + h\,(2{,}3)_\tau + m\,(2{,}3)_{\sigma\tau}\}$$

Die Rechnungen wurden für die von der symmetrischen bzw. der neutralen Mesontheorie nahegelegten Potentiale durchgeführt, hingegen liessen wir die von Christian und Hart[5]) neuerdings vorgeschlagene „even theory" vorläufig ausser Betracht.

Die Formel für k cotg δ_0.

Wir diskutieren zunächst den Fall $S = 3/2$. Hier hat man auszugehen vom Gleichungssystem*)

$$(\varDelta + k^2 - k_d^2)\begin{pmatrix}\psi' \\ \psi''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(w+b)U^s - (h+m)U'' & -(h+m)U' \\ -(h+m)U' & (w+b)U^s + (h+m)U''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi' \\ \psi''\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Dabei bezeichnen wir mit $\varDelta$ die Summe der Laplaceoperatoren in bezug auf die Koordinaten $\vec{r}$ und $\vec{q}$; die Potentiale sind mit $2\,m/\hbar^2$ multipliziert zu denken, wobei $m = 2/3\ M$ die reduzierte Masse des einfallenden Neutrons ist.

Die uns hier interessierende Lösung (ψ', ψ'') soll sich gegenüber Permutationen nach der Darstellung D

$$(2,3) = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & +1\end{pmatrix} \qquad (1,2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (1,3) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

transformieren und zum Drehimpuls Null gehören. Für grosse q soll ψ' nach Null gehen, während ψ'' asymptotisch in das Produkt der Wellenfunktion des Deuterons im ^3S-Zustand und einer ebenen Welle übergehen muss. ψ_0', ψ_0'' seien die Lösungen eines (2) entsprechenden Gleichungssystems mit Energie des einfallenden Neutrons $\hbar^2 k^2/2\,m = 0$. Es gilt also

$$(\varDelta - k_d^2)\begin{pmatrix}\psi_0' \\ \psi_0''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(w+b)\,U^s - (h+m)U'' & -(h+m)\,U' \\ -(h+m)\,U' & (w+b)U^s + (h+m)U''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_0' \\ \psi_0''\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Multipliziert man nun das System (2) von links mit $(\psi_0'^*, \psi_0''^*)$, das System (3) hingegen mit (ψ'^*, ψ''^*) und subtrahiert die so erhaltenen Gleichungssysteme, so erhält man:

$$\psi_0'^*\,\varDelta\,\psi' - \psi'\,\varDelta\,\psi_0'^* + \psi_0''^*\,\varDelta\,\psi'' - \psi''\,\varDelta\,\psi_0''^* + k^2(\psi'\,\psi_0'^* + \psi''\,\psi_0''^*) = 0. \qquad (4)$$

Daraus folgt

$$\int\{(\psi_0''^*\,\varDelta\,\psi'' - \psi''\,\varDelta\,\psi_0''^*) + k^2\,\psi''\,\psi_0''^*\}\,d\tau = 0\,. \qquad (5)$$

$d\tau = d^3r\,d^3q$ ist das Volumelement von $\vec{r}$ und $\vec{q}$, die Integration ist über den ganzen Raum von r und q erstreckt zu denken.

---

*) M. Verde, Helv. Phys. Acta XXII, 339 (1949), Gl. $(14)_v$. Auf die in dieser Arbeit angegebenen Formeln werden wir uns fortan durch Verwendung des Buchstabens v beziehen.

Bei der letzten Umformung haben wir vom Umstand Gebrauch gemacht, dass Δ ein gegenüber Permutationen der Koordinaten der drei Teilchen invarianter, d. h. symmetrischer Operator ist. Für jeden symmetrischen Operator S gilt

$$\int \psi'^* S \psi' \, d\tau = \int \psi''^* S \psi'' \, d\tau$$

Das ist eine direkte Konsequenz der Transformationseigenschaften von (ψ', ψ''), die sich, wie gesagt, bei Permutationen nach der Darstellung D transformieren.

Wir setzen nun

$$\left. \begin{aligned} \psi' &= T' \psi \\ \psi'' &= T'' \psi, \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

wobei wir die Symmetrie-Operatoren

$$\left. \begin{aligned} T' &= \frac{\sqrt{3}}{2} \{(13) - (12)\} \\ T'' &= -(23) + \frac{1}{2} \{(13) + (12)\} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

einführen[6]).

ψ ist eine in (2,3) symmetrische Funktion, die für $q \to \infty$ das folgende asymptotische Verhalten besitzt:

$$\psi = -\varphi(r) \cdot \frac{\sin(kq + \delta)}{q \cdot \sin \delta}, \tag{8}$$

wobei $\varphi(r)$ die im Raum von $\vec{r}$ normierte Wellenfunktion des Deuterons im Grundzustand ist. Gehört ψ zum Drehimpuls Null, so ist dies auch für ψ' und ψ'' der Fall. ψ' und ψ'' besitzen das eingangs geforderte asymptotische Verhalten, nämlich

$$\begin{aligned} \psi' &\simeq 0 \\ \psi'' &\simeq \varphi(r) \cdot \frac{\sin(kq + \delta)}{q \cdot \sin \delta}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichung (5) lässt sich auch in der Form schreiben

$$\int \{ (\psi_0''^* \Delta \psi - \psi'' \Delta \psi_0^*) + k^2 \psi'' \psi_0^* \} \, d\tau = 0, \tag{5$'$}$$

weil allgemein gilt

$$\int \psi''^* S \psi'' \, d\tau = -\frac{3}{2} \int \psi''^* S \psi \, d\tau.$$

Wir setzen nun

$$u = -\varphi(r) \cdot \frac{\sin(kq+\delta)}{q \cdot \sin\delta}$$

$$u_0 = -\varphi(r)\left(-\frac{1}{a_4} + \frac{1}{q}\right).$$

$-\frac{1}{a_4} = \lim\limits_{k\to 0} (k \cdot \mathrm{ctg}\,\delta)_4$ ist dabei die reziproke Streulänge für den Grenzfall der Einfallsenergie Null.

Mit diesen Festsetzungen folgt die Gleichung

$$\int \{(u_0^* \Delta u - u \Delta u_0^*) + k^2 u u_0^*\} d\tau = 0\,. \tag{10}$$

Denn es gilt

$$(\Delta + k^2 - k_d^2)\, u = -U_{23}\, u\,.$$

Wir bilden nun die Summe der Gleichungen (5)′ und (10)

$$\int \{(\psi_0''^* \Delta \psi - \psi'' \Delta \psi_0^*) + (u_0^* \Delta u - u \Delta u_0^*) + k^2 (u u_0^* + \psi'' \psi_0^*)\} d\tau = 0$$

und wenden den Greenschen Satz an. Da die ψ überall reguläre Funktionen mit dem oben angegebenen asymptotischen Verhalten sind, liefern nur die Singularitäten von u und u_0 bei $q = 0$ einen Beitrag. Man erhält nach kurzer Zwischenrechnung

$$k\,\mathrm{ctg}\,\delta_0 = -\frac{1}{a_4} + \frac{k^2}{4\pi} \int (u u_0^* + \psi'' \psi_0^*)\, d\tau \tag{11}$$

Es ist hierbei zu beachten, dass ψ'' für $q \to \infty$ gegen $-u$ strebt.

Ist einmal die Entwicklung von ψ in der Form

$$\psi = \psi_0 + k^2 \psi_1 + k^4 \psi_2 + \ldots$$

bekannt, so kann man damit die entsprechende Entwicklung von k cotg δ_0 ableiten.

Analog zum Zweikörperproblem können wir eine effektive Reichweite

$$\varrho_4 = \frac{1}{2\pi} \int (|u_0|^2 + \psi_0'' \psi_0^*)\, d\tau$$

definieren, womit sich (11) schreiben lässt:

$$k\,\mathrm{cotg}\,\delta_0 = -\frac{1}{a_4} + \frac{\varrho_4}{2} \cdot k^2 + \ldots$$

Dabei ist für die ersten beiden Glieder, wie erwähnt, nur die Kenntnis der Eigenfunktionen des Systems bei Energie Null erforderlich.

Es liegt auf der Hand, dass sich der vorläufig nicht betrachtete Fall $S = 1/2$ in der gleichen Weise behandeln lässt. Der wesentliche Punkt liegt darin, dass beim Gleichungssystem für Spin 1/2, das wir abgekürzt

$$(\Delta + k^2 - k_d^2)\, \psi = W\, \psi$$

schreiben — unter ψ sei die Gesamtheit der vier Komponenten ψ^a, ψ^s, ψ', ψ'' verstanden — die Matrix der Wechselwirkung[6])

$$W = \begin{pmatrix} (w+m)\, U^s & 0 & (b+h)\, U'' & -(b+h) U' \\ 0 & (w-m)\, U^s & (b-h)\, U' & (b-h) U'' \\ (b+h)\, U'' & (b-h)\, U' & wU^s - mU'' & -mU' \\ -(b+h)\, U' & (b-h)\, U'' & -mU' & wU^s + mU'' \end{pmatrix} \tag{2'}$$

symmetrisch ist.

Wir setzen in diesem Fall

$$\begin{aligned} \psi' &= T'\, \Phi \\ \psi'' &= T''\, \Phi \\ \psi^s &= T^s\, \psi\,, \end{aligned} \tag{12}$$

was wiederum keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die Funktionen — Φ und ψ sind im Endlichen überall regulär, in (2,3) symmetrisch, gehören zum Gesamtdrehimpuls Null und haben das gleiche asymptotische Verhalten für $q \to \infty$ wie (8). Die Operatoren T' und T'' sind durch (7) definiert, T^s durch

$$T^s = (2{,}3) + (1{,}2) + (1{,}3)\,.$$

Die der Beziehung (11) entsprechende Formel ist in diesem Fall

$$k \operatorname{cotg} \delta_0 = -\frac{1}{a_2} + \frac{k^2}{4\pi} \int \left(u\, u_0^* + \frac{1}{2}\, \Phi''\, \Phi_0^* - \frac{1}{2}\, \psi^s\, \psi_0^* + \frac{1}{6}\, \psi^a\, \psi_0^{a*} \right) d\tau\,. \tag{13}$$

a_2 ist die Streulänge im Dublettzustand für die Energie Null. Die analoge effektive Reichweite wird gegeben durch

$$\varrho_2 = \frac{1}{2\pi} \int \left(|u_0|^2 + \frac{1}{2}\, \Phi_0''\, \Phi_0^* - \frac{1}{2}\, \psi^s\, \psi_0^* + \frac{1}{6}\, \psi_0^a\, \psi_0^{a*} \right) d\tau$$

Natürlich muss man zur Bestimmung der Koeffizienten der beiden Reihenentwicklungen (11) und (13) die Lösungen der Schrödingergleichungen kennen. Hierfür kann man sich des an anderer Stelle angegebenen Variationsverfahrens bedienen.

Die Durchführung des Variationsverfahrens.

Das Variationsverfahren besteht bekanntlich darin[6]), die Lösung zu finden, die das Integral

$$J = \sum_{ik} \int \psi_i^* \{\delta_{ik} (\Delta + k^2 - k_d^2) - U_{ik}\} \psi_k \cdot d\tau \tag{14}$$

stationär machen.

U_{ik} ist die Matrix der Wechselwirkung, die für die beiden Fälle $S = 3/2$ und $S = 1/2$ in (2) und (2)' angegeben wurde.

Wir behandeln zuerst den Fall $S = 3/2$. Hierbei wird für ψ der folgende Ansatz gewählt

$$\psi = \varphi(r) \left\{ \frac{\sin kq}{kq} (1 + \alpha\, e^{-\mu^2 q^2}) \cos \delta_0 \right. \\ \left. + \frac{\cos kq}{kq} (1 - e^{-\nu^2 q^2} + \beta\, q\, e^{-\mu^2 q^2}) \sin \delta_0 \right\}, \tag{15}$$

woraus man ψ' und ψ'' nach (6) erhält. δ_0 bedeutet dabei die Streuphase der S-Welle; α, β, μ^2, ν^2 sind Parameter, die zu bestimmen sind. Der Einfachheit halber haben wir für die Deuteron-Eigenfunktion $\varphi(r)$ eine Gauss'sche Funktion gewählt

$$\varphi(r) = \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{3/2} \cdot e^{-\lambda^2 r^2},$$

die im r-Raum zu eins normiert ist. Für λ verwenden wir den Wert $\lambda = 3{,}1 \cdot 10^{+12}$ cm^{-1}. Der Raumanteil des Potentials wurde ebenfalls als Gauss'sche Funktion angesetzt

$$U_{23} = 45\, e^{-\varkappa^2 |r_3 - r_2|^2} \text{ MeV}.$$

Wir haben die Rechnungen für die symmetrische und neutrale Theorie durchgeführt, für die die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen (2,3) folgendermassen lautet:

$$\frac{1}{3} U_{23} (\tau^{(2)} \cdot \tau^{(3)}) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{g}{2}\right) + \frac{1}{2} g\, (\sigma^{(2)} \cdot \sigma^{(3)}) \right\} \qquad \text{S. T.}$$

$$- U_{23} \left\{ \left(1 - \frac{g}{2}\right) + \frac{1}{2} g\, (\sigma^{(2)} \cdot \sigma^{(3)}) \right\} \qquad \text{N. T.}$$

Als numerische Werte haben wir $g = 1{,}4$ (S. T.), $g = 0{,}2$ (N. T.) und $\varkappa^{-1} = 1{,}9 \cdot 10^{-13}$ cm angenommen.

Im Ansatz für ψ (Gleichung 15) weist der Koeffizient von $\cos kq/kq$ einen verwickelteren Bau auf als derjenige von $\sin kq/kq$, weil der Ansatz für $q = 0$ endlich bleiben muss.

Mit einem Ansatz dieser Art berücksichtigt man die Polarisation des gestossenen Deuterons nicht, was für kleine Energien von vorneherein nicht gerechtfertigt ist. Verfügt man aber über wenige Parameter, so ist es vernünftig, diese für die Verzerrung der einfallenden Neutronenwelle allein zu verwenden. Durch die Einführung zusätzlicher Parameter würde der Rechenaufwand ganz erheblich vergrössert. Die Grösse der Streuphase dürfte hauptsächlich durch den Austausch der Teilchen, den wir hier streng berücksichtigen, bedingt sein. Deshalb haben wir die Rechnung mit dem angegebenen verhältnismässig einfachen Ansatz durchgeführt. Die Tatsache, dass die Parameter plausible Werte annehmen, bestätigt nachträglich unsere Vermutung. Die Form des Ansatzes ist durch die Tatsache bedingt, dass alle Integrale, die für die Berechnung der Parameter nötig sind, in geschlossener Form durchführbar sein sollen; zumal sich die Parameter aus Gleichungen bestimmen, in die Differenzen von fast gleich grossen Integralen eingehen.

Wir haben die folgenden Integrale auszuwerten:

$$J_0 = \int \psi^* U_{23} \psi \, d\tau, \quad J_1 = \int \psi^* U_{13} \psi \, d\tau, \quad J_2 = \int \psi^* U_{13} \; (12) \, \psi \, d\tau,$$

$$J_4 = \int \psi^* (\Delta + k^2 - k_d^2 + U_{23}) \psi \, d\tau, \quad J_5 = \int \psi^* (\Delta + k^2 - k_d^2 + U_{13}) \psi \, d\tau.$$

Gleichung (14) wird damit, ausführlich geschrieben, für die symmetrische Theorie

$$J_5 - J_4 + J_3 - J_2 = 0,$$

für die neutrale Theorie

$$J_5 - J_4 - 2\, J_1 + J_2 + J_3 = 0.$$

In unserem Falle können die beiden Integrale J_4 und J_5 ohne die speziellen Umformungen $(42)_v$ und $(43)_v$ berechnet werden.

Für $k = 0$, worauf wir uns hier beschränken dürfen, können alle Integrale in geschlossener Form integriert werden. Es treten nach der Integration über den Zwischenwinkel nur Integrale der Form

$$\int_0^\infty\!\!\int e^{-a x^2 - b y^2} \operatorname{Sin} f x y \cdot x^n y^m \, dx \; dy$$

auf. Sie lassen sich alle ableiten aus

$$\int_0^\infty\!\!\int e^{-a x^2 - b y^2} \operatorname{Sin} (f x y) \frac{x}{y} \, dx \, dy = \frac{\pi f}{4\, a} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\, a b - f^2}}$$

$$\int_0^\infty\!\!\int e^{-a x^2 - b y^2} \operatorname{Sin} (f x y) \, dx \; dy = \frac{1}{\sqrt{4\, a b - f^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{f}{\sqrt{4\, a b - f^2}} \right)$$

$$\int_0^\infty\!\!\int e^{-a x^2 - b y^2} \operatorname{Sin} (f x y x) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, f \, \frac{1}{(4\, a b - f^2)}$$

Es handelt sich nun darum, a_2, a_4 und die Parameter α, β, μ^2, ν^2 zu bestimmen. Es ist jedoch kaum möglich, die Parameter μ^2 und ν^2, für die (14) stationär ist, aus dem Variationsverfahren mit $(30)_v$ zu berechnen, da ein kompliziertes transzendentes Gleichungssystem aufgelöst werden müsste. Wir bestimmen in dieser Weise nur α und β als Funktion von μ^2, ν^2 und a_4, a_2. a_4 und a_2 haben wir weiter als Funktion von μ^2 und ν^2 berechnet aus der exakten Integralformel für die Streuphase $(37)_v$, die unabhängig von Variationsverfahren gilt*).

$J(\mu^2, \nu^2) = 0$ liefert graphisch μ^2 als Funktion von ν^2. In dieser Weise bleibt die Wahl des einen Parameters noch offen. Es zeigt sich aber, dass a_4 und a_2 innerhalb einiger Prozente unabhängig vom Werte von ν^2 sind, wenn ν^2 zwischen 0,2 und $4\,\lambda^2$ (für sym. Th.) bzw. zwischen 0,4 und $4\,\lambda^2$ (für neutr. Th.) liegt.

Wir brauchen deshalb, was die Kenntnis der Streulänge bei Energie Null anbelangt, nicht festzusetzen, welches der wirkliche Wert von ν^2 ist. Für die Berechnung der effektiven Reichweite haben wir $\mu^2 = \nu^2$ angenommen.

Für den Spin $S = 1/2$ gehen die Rechnungen in entsprechender Weise vor sich. Die Gleichung (14) lautet in diesem Fall

Sym. Th.

$$(2J_5+J_4)_{\psi,\psi} - (J_5-J_4)_{\Phi,\Phi} = -g(J_1+J_2+J_3)_{\psi,\psi} + g(J_1+J_2-2J_3)_{\Phi,\Phi}$$
$$+ (J_3-J_2)_{\Phi,\Phi} + \frac{1}{3}(g-2)\{(J_1-J_2+J_3)_{\psi,\psi} + (J_1-J_2+J_3)_{\Phi,\Phi}$$
$$-2(J_1+J_3)_{\psi,\Phi} + 4(J_2)_{\psi,\Phi} - 2(J_2)_{\Phi,\psi} - 2[(J_0)_{\psi,\psi} + (J_0)_{\psi,\Phi}]\}$$

Neutr. Th.

$$(2J_5+J_4)_{\psi,\psi} - (J_5-J_4)_{\Phi,\Phi} = (3g-2)(J_1+J_2+J_3)_{\psi,\psi} + (3g-2)(J_1)_{\Phi,\Phi}$$
$$-(3g-1)(J_2)_{\Phi,\Phi} + (J_3)_{\Phi,\Phi} - g\{(J_1-J_2+J_3)_{\psi,\psi} + (J_1-J_2+J_3)_{\Phi,\Phi}$$
$$-2(J_1+J_3)_{\psi,\Phi} + 4(J_2)_{\psi,\Phi} - 2(J_2)_{\Phi,\psi} - 2[(J_0)_{\psi,\psi} + (J_0)_{\psi,\Phi}]\}$$

Wir haben dabei die Beziehung (12) benutzt und für Φ und ψ wiederum einen Ansatz der Form (15) gewählt. Der Einfachheit halber haben wir hierbei den Wert von μ^2 in Φ und ψ als gleich angenommen, ebenso den Wert von ν^2; dagegen wurden α und β unabhängig für die zwei Ansätze bestimmt. Ferner haben wir den Beitrag von ψ^a vollkommen vernachlässigt.

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass die Formeln $(37)_v$ dem Spin $S = 3/2$ entsprechen und die Formeln $(38)_v$ dem Spin $S = 1/2$. Entsprechend sind auch die Bezeichnungen „Symmetrische Theorie“ und „Neutrale Theorie“ abzuändern.

Die Bezeichnung für die Integrale bedarf keiner weiteren Erklärung. Es bedeutet z. B.

$$(J_2)_{\psi,\Phi} = \int \psi^* \, U_{13}\,(12)\; \Phi \; d\tau.$$

In der folgenden Tabelle sind die Zahlenwerte zusammengestellt.

		Neutr. Theorie		Sym. Theorie	
		$S = 3/2$	$S = 1/2$	$S = 3/2$	$S = 1/2$
$\mu^2 = \nu^2$	$\times\, 10^{-24}$ cm^2	2,3	4,6	2,7	4,0
a	$\times\, 10^{+13}$ cm^{-1}	2,8	6,8	3,2	7,0
$-\alpha_\psi \cdot \frac{1}{a} + \beta_\psi$	$\times\, 10^{-12}$ cm	0,9	1,6	0,9	1,6
$-\alpha_\Phi \cdot \frac{1}{a} + \beta_\Phi$	$\times\, 10^{-12}$ cm		$-0,6$		0,9
ϱ	$\times\, 10^{+13}$ cm^{-1}	2	4	2	4

Die Werte der Wirkungsquerschnitte für die Energie Null betragen 2,6 und 2,9 Barns für die neutrale bzw. symmetrische Mesontheorie. Das Experiment[8]) liefert für die beiden Streulängen die Werte $a_{3/2} = 2{,}6$ und $a_{1/2} = 8{,}26\ 10^{-}{}_{13}$ cm. Der Umstand, dass die Werte der effektiven Reichweiten kleiner sind als die entsprechenden Streulängen, bringt notwendigerweise mit sich, dass der totale Wirkungsquerschnitt bei Energie Null mit zunehmender Energie abnimmt.

Schlussbemerkungen.

Wegen des Umfanges der numerischen Rechnungen mussten wir darauf verzichten, die Bestimmung der effektiven Reichweite zu verbessern, z. B. durch Einführung weiterer Parameter oder durch eine von μ^2 unabhängige Bestimmung von ν^2 und Anwendung der Prüfformel $(37)_v$ zur unabhängigen Kontrolle der Lösungen. Aus dem gleichen Grunde konnten wir auch weder für die Triplett- und Singulettwechselwirkung zwei verschiedene Reichweiten einführen, wie dies erforderlich ist, wenn man eine Gauss'sche Raumabhängigkeit des Potentials annimmt[7]), noch für den Grundzustand des Deuterons eine besser angenäherte Wellenfunktion wählen.

Nichtsdestoweniger glauben wir eine wirksame Rechenmethode angegeben zu haben, deren numerische Resultate es gestatten, sich von den Folgen einer Wechselwirkung von einem gewissen Austauschtypus beim betrachteten Stossproblem ein gutes Bild zu machen.

Die Bestimmung der Phase δ_1 der P-Welle ist auf die für die Phase δ_0 verwendete Weise kaum durchführbar. Indessen kann man bei jenen Energien, bei denen δ_1 klein ist, dadurch eine gute Näherung erhalten, dass man in die exakten Integralformeln $(37)_v$ die ungestörte Lösung einsetzt.

Für sin δ_1 erhält man z. B. folgende Werte:

Energie in MeV	Sym. Theorie		Neutr. Theorie	
	$S = 3/2$	$S = 1/2$	$S = 3/2$	$S = 1/2$
2,5	0,16	− 0,11	0,29	0,018
3,3	0,12	− 0,08	0,205	0,006

Das eventuelle Auftreten einer Spin-Bahnkopplung könnte die Werte der verschiedenen δ_1-Phasen merklich beeinflussen.

Es wäre verfrüht, durch einen Vergleich der experimentellen Daten mit unseren Berechnungen endgültige Schlüsse zu ziehen. Der Umstand, dass die Werte der differentiellen Wirkungsquerschnitte bei einem Streuwinkel Null nicht sehr gut bekannt sind (sie können nur durch Extrapolation gewonnen werden), macht den Vergleich mit der Theorie recht schwierig.

Die beiden Arten der Wechselwirkungen liefern Maxima der Streuung im Schwerpunktsystem bei den Streuwinkeln 0^0 und 180^0. Diese Maxima sind jedoch bei der neutralen ausgeprägter als bei der symmetrischen Theorie. Die experimentellen Kurven würden mehr zugunsten der neutralen Theorie sprechen. Vermutlich wird die "even theory" Ergebnisse in der selben Richtung liefern.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. P. Scherrer unseren herzlichen Dank für sein Interesse an dieser Arbeit auszusprechen.

Literatur.

[1]) J. H. Coon und H. H. Barschall, Phys. Rev. **70**, 592 (1946).
[2]) J. Halter, I. Hamouda und P. Scherrer, Helv. Phys. Acta **23**, 510 (1950).
[3]) J. H. Coon und R. F. Tasheck, Phys. Rev. **76**, 710 (1949).
[4]) H. A. Bethe, Phys. Rev. **76**, 38 (1949).
[5]) R. S. Christian und E. W. Hart, Phys. Rev. **77**, 710 (1950).
[6]) M. Verde, Helv. Phys. Acta, XXII, 339 (1949).
[7]) J. M. Blatt und J. B. Jackson, Phys. Rev. **76**, 18 (1949).
[8]) D. G. Hurst and N. Z. Allock, Phys. Rev. **80**, 117 (950).