Un générateur à temps de transit, utilisant un seul resonateur de volume

Autor(en): **Müller, J.J. / Rostas, E,**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **13 (1940)**

Heft VI

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-111073

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Copyright 1940 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft.
Société Suisse de Physique. — Società Fisica Svizzera.
Nachdruck verboten. — Tous droits réservés. — Printed in Switzerland.

Un générateur à temps de transit, utilisant un seul resonateur de volume

par **J. J. Müller** et **E. Rostas.**

(19. X. 40.)

Introduction.

L'objet du présent travail est l'étude théorique d'un générateur constitué par l'ensemble d'un faisceau électronique F et d'un circuit résonant K, formé de préférence par un résonateur de volume (fig. 1). Le faisceau est accéléré avant de pénétrer dans le résonateur par une source de tension continue V_0. Nous allons montrer que pour un choix judicieux des paramètres ce système peut présenter une instabilité, de sorte qu'il se crée dans le résonateur un champ électrique oscillant $E \sin \omega t$ de direction parallèle au faisceau.

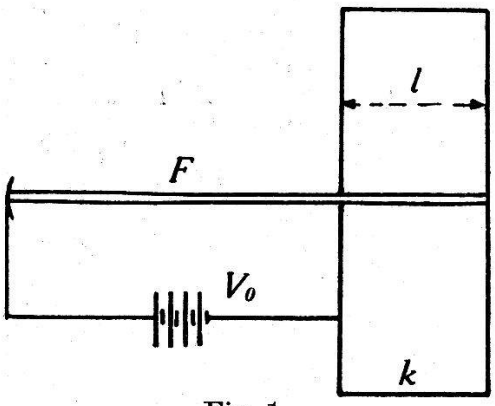

Fig. 1.

Il existe une suite discrète de valeurs de la longueur l, pour V_0 donné, pour lesquelles le fonctionnement de ce générateur est optimum. Ces valeurs sont telles que le temps de transit des électrons, calculé en l'absence de champ oscillant, soit égal à un nombre entier de périodes d'oscillation plus environ $\frac{1}{4}$.

Le rendement, c'est-à-dire le rapport entre la puissance que peut fournir le faisceau d'électrons au résonateur sous forme d'énergie électromagnétique et la puissance totale fournie au faisceau, est dans le cas optimum égal à 22%. Le maximum du rendement s'obtient pour une tension alternative égale à environ 4 fois la tension continue.

*

Le problème qui se pose est analogue à celui de la diode à laquelle on applique une tension alternative. Mais dans le cas présent c'est avant de pénétrer dans le champ oscillant que les électrons reçoivent leur énergie cinétique de la part de la source de tension continue. Il s'agit donc en somme d'une diode où les électrons auraient de grandes vitesses initiales.

Nous ne nous limitons pas, comme le font en général les travaux traitant la diode[1]), au cas d'amplitudes infiniment petites. Si dans une diode normale la tension alternative venait à dépasser la tension continue, l'émission serait supprimée pendant une fraction de la période. Ici rien de pareil ne se produit, et la tension alternative peut dépasser de plusieurs fois la tension continue sans que pour cela les électrons ne fassent demi-tour. Ceci distingue aussi le présent générateur de ceux du type Klystron ou Triode ordinaire.

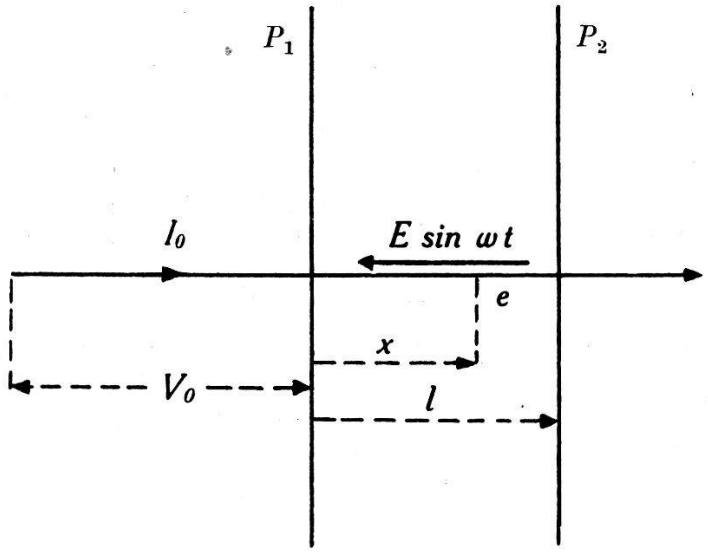

Fig. 2.

Nomenclature.

x	Abscisse d'un électron mesurée à partir de P_1.
v	Vitesse instantanée de l'électron.
v_0	Vitesse initiale.
$E \sin \omega t$	Intensité du champ électrique entre P_1 et P_2.
$V = El$	Valeur maxima de l'intégrale instantanée $\int_{P_1}^{P_2} \varepsilon \, ds$ ou tension maxima.
V_0	Tension continue.
I_0	Courant continu transporté par le faisceau.
ω, T	Pulsation, période de l'oscillation.
e, m	Charge, masse de l'électron.
$\varphi = \omega t$	Variable mesurant le temps en angles.

[1]) J. Muller, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **41**, 1933, p. 156. — A. G. Clavier, Bulletin de la Société française des Electriciens, Janvier 1939.

φ_0, φ_1	Angles d'entrée et de sortie.
W	Energie fournie à un électron.
W_d	Energie déwattée relative au trajet d'un électron.
ϱ, ϱ_d	Rendement en puissance wattée et déwattée.
R_D	Résistance de démarrage.
R, C	Résistance, capacité équivalentes au faisceau.
S	Résistance shunt du circuit.
$\mathfrak{J}$	Inconnue auxiliaire.
$I(t)$	Courant instantané dans le circuit extérieur.
k	Rapport de la tension oscillante à la tension continue.
α	Rapport du temps de transit à la période.
R_c	Rayon de convergence de la solution.
p	Ordre de l'oscillation.

1. Etude qualitative du fonctionnement.

Nous supposons que le système oscille et montrons que ces oscillations sont capables de s'entretenir. Nous négligeons le champ dû aux charges d'espace et étudions le mouvement des électrons dans un champ électrique de valeur instantanée $E \sin \omega t$, limité à deux plans P_1, P_2 perpendiculaires au faisceau et perméables aux électrons (Fig. 2). Les électrons sont alternativement accélérés et freinés par le champ et mettant pour franchir l'espace $P_1 P_2 = l$ un temps plus ou moins long. Le temps de transit d'un électron dépend de l'instant t_0 de son entrée dans le champ. Au cours de son déplacement de P_1 à P_2, l'électron reçoit du champ E un travail positif ou négatif suivant que sa vitesse de sortie est supérieure ou inférieure à sa vitesse d'entrée. Nous calculons ce travail pour chaque électron, puis faisons la somme des travaux fournis aux électrons « nés » dans l'intervalle d'une période. Si cette somme est positive le champ E fournit en moyenne de l'énergie aux électrons. Si elle est négative c'est le faisceau qui abandonne de l'énergie au champ. Dans ce dernier cas, si l'amortissement du circuit oscillant est tel que pour l'amplitude considérée il absorbe exactement la puissance abandonnée par les électrons dans le champ E, l'oscillation sera capable de s'entretenir à cette amplitude.

2. Calcul de l'énergie fournie aux électrons.

Les coordonnées et les grandeurs utilisées sont définies par la Fig. 2 et la nomenclature adjointe. Nous caractérisons le fonctionnement par deux paramètres sans dimensions. L'un

$$k = \frac{V}{V_0}$$

désigne le rapport de la tension alternative de crête à la tension continue et caractérise l'amplitude de l'oscillation. L'autre

$$\alpha = \frac{l}{v_0 T}$$

représente le rapport du temps de transit l/v_0 calculé en l'absence d'oscillation, à la période T, et caractérise les dimensions de l'oscillateur de volume. On intègre l'équation du mouvement d'un électron né à l'instant t_0

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \frac{V}{l} \sin \omega t$$

et détermine sa vitesse v et son abscisse x à l'instant t. En introduisant les angles $\varphi = \omega t$, $\varphi_0 = \omega t_0$ et les paramètres α et k il vient:

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{k}{4\pi\alpha} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \tag{1}$$

et

$$2\pi\alpha \frac{x}{l} = (\varphi - \varphi_0) \left(1 + \frac{k}{4\pi\alpha} \cos \varphi_0\right) + \frac{k}{4\pi\alpha} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Cette dernière équation permet de calculer l'instant t_1 où l'électron né à t_0 atteint le plan P_2. En posant $x = l$ et $\varphi_1 = \omega t_1$ elle s'écrit:

$$2\pi\alpha = (\varphi_1 - \varphi_0) \left(1 + \frac{k}{4\pi\alpha} \cos \varphi_0\right) + \frac{k}{4\pi\alpha} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) \tag{2}$$

L'équation transcendante (2) définit φ_1 comme fonction implicite de φ_0. Elle doit donner une valeur unique de φ_1 pour chaque φ_0 à condition que

$$k < 2\pi\alpha. \tag{3}$$

En effet dans ce cas l'équation (1) montre que la vitesse des électrons est toujours positive. Aucun d'entre eux ne peut faire demi-tour. Nous nous maintiendrons dans les limites définies par (3).

Energie wattée.

L'énergie dW fournie à un électron par le champ dans le temps dt est égale au produit de la force $eE \sin \omega t$ par le déplacement élémentaire dx:

$$dW = e \frac{V}{l} \sin \omega t \, v \, dt. \tag{4}$$

L'énergie totale fournie dans le trajet de P_1 à P_2 est:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e \frac{V}{l} \sin \omega t \, v \, dt.$$

Soit n le nombre d'électrons débités à la seconde par le faisceau initial. L'énergie fournie au faisceau en une période par le champ est la somme W_1 des énergies fournies dans le trajet complet de P_1 à P_2 aux électrons nés dans l'intervalle d'une période, soit

$$W_1 = n \int_0^T dt_0 \int_{t_0}^{t_1} e \frac{V}{l} \sin \omega t \, v \, dt. \tag{5}$$

Nous appelons rendement ϱ le rapport de la puissance moyenne fournie aux électrons par le champ, à la puissance fournie au faisceau par la source continue. Il est égal à

$$\varrho = \frac{W_1}{n T \frac{1}{2} m v_0^2}$$

et se déduit de (5). En introduisant dans (5) les paramètres α, k, les angles $\varphi = \omega t$, et l'expression de v tirée de (1) on obtient:

$$\varrho = \frac{k}{4 \pi^2 \alpha} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \left[1 + \frac{k}{8 \pi \alpha} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \right] d\varphi_0. \tag{6}$$

Dans cette expression φ_1 doit être considéré comme une fonction de φ_0 définie par (2). Si le rendement ainsi calculé est négatif, les électrons cèdent de l'énergie au champ.

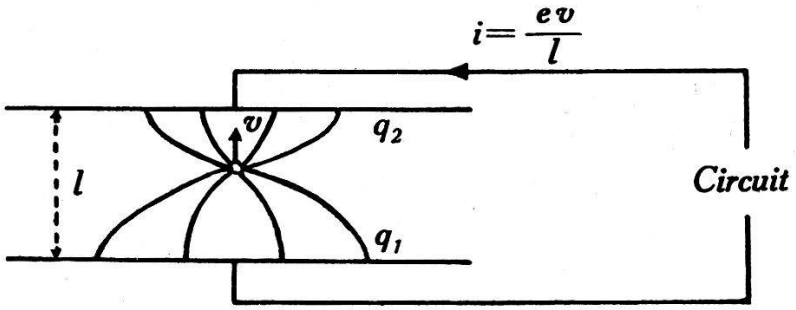

Fig. 3.

Energie déwattée.

L'expression (4) du travail élémentaire est susceptible d'une interprétation différente de celle que nous avons donnée. Lorsqu'un électron se déplace entre 2 plans conducteurs reliés par un circuit (Fig. 3), il passe dans ce circuit un courant

$$i = \frac{ev}{l}$$

dû à la variation des charges d'influence q_1, q_2 qui apparaissent sur les 2 plans en raison de la présence de l'électron. Nous avons supposé qu'il existait entre les deux plans une tension $V \sin \omega t$. La source qui crée cette tension, c'est-à-dire le circuit, devra donc céder dans le temps dt une énergie wattée

$$i V \sin wt\, dt \qquad \text{ou} \qquad \frac{ev}{l} V \sin \omega t\, dt$$

qui n'est autre que l'expression (4), et une énergie déwattée

$$\frac{ev}{l} V \cos \omega t\, dt$$

qui se déduit de (4) en changeant $\sin \omega t$ en $\cos \omega t$. On a donc le moyen de calculer l'énergie déwattée abandonnée par le circuit. La méthode est identique à celle qui a été employée pour l'énergie wattée. On calcule l'énergie déwattée correspondant au déplacement d'un électron de P_1 à P_2, puis on fait la somme des énergies relatives aux électrons nés dans un intervalle T. Si on appelle rendement déwatté ϱ_d le rapport de la puissance moyenne déwattée abandonnée au faisceau à la puissance fournie par la source continue on trouve:

$$\varrho_d = \frac{k}{4\pi^2 \alpha} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{k}{8\pi\alpha} (\varphi_0 - \varphi_1) + \sin \varphi_1 \left[1 + \frac{k}{8\pi\alpha} (2 \cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \right] \right\} d\varphi_0. \quad (6a)$$

On pourrait effectuer ces calculs d'énergies en faisant la somme $I(t) = \Sigma i$ des courants i circulant à l'instant t et intégrant dans une période les expressions $IV \sin \omega t$ et $IV \cos \omega t$. Mais il est plus simple et il revient au même de considérer les courants élémentaires relatifs à chaque électron, et de calculer séparément les travaux relatifs à chacun de ces courants. Remarquons que le courant $I(t)$ contient des harmoniques mais que la tension reste sinusoidale, le circuit oscillant étant supposé très sélectif.

3. Solution et convergence.

L'étude du problème est ramenée à la résolution des équations (2) et (6) par rapport à φ_1 et ϱ. On va montrer que le rendement peut être donné sous la forme d'un développement en série par rapport au paramètre

$$\eta = \frac{k}{4\pi\alpha} \qquad (7)$$

qui est mis en évidence dans l'équation (2). η est infiniment petit dans deux cas, soit pour de petites amplitudes ($k \to 0$), soit pour de grands angles de transit ($\alpha \to \infty$). Au lieu de calculer directement φ_1 il est logique d'étudier la différence entre l'angle de transit $\varphi_1 - \varphi_0$ et l'angle de transit $2\pi\alpha$ calculé en l'absence d'oscillation. Cette différence apparaît dans l'équation (2) transformée ainsi:

$$(\varphi_1 - \varphi_0 - 2\pi\alpha)\left(1 + \frac{k}{4\pi\alpha}\cos\varphi_0\right) + \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + \frac{k}{4\pi\alpha}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1) = 0$$

et elle prend pour $\eta = 0$ la valeur $-k/2\cos\varphi_0$. On est donc conduit à considérer une inconnue $\mathfrak{J}$ définie par

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 2\pi\alpha - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + \mathfrak{J}. \tag{8}$$

En introduisant η et $\mathfrak{J}$ dans les équations (2) et (6) il vient:

$$\mathfrak{J} = \eta\left[\frac{k}{2}\cos^2\varphi_0 - \sin\varphi_0 - \mathfrak{J}\cos\varphi_0 + \sin\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha + \mathfrak{J}\right)\right] \tag{9}$$

$$\varrho = -\frac{\eta}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha + \mathfrak{J}\right)d\varphi_0 + \frac{\eta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\varphi_0 - \cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha + \mathfrak{J}\right)\right]^2 d\varphi_0. \tag{10}$$

Il s'agit de tirer $\mathfrak{J}$ de (9) et de le porter dans (10). L'équation implicite (9) est de la forme

$$\mathfrak{J} = f(\eta, \mathfrak{J})$$

avec $\mathfrak{J} = 0$ pour $\eta = 0$. La fonction f est développable par rapport à η et $\mathfrak{J}$ en une série de Taylor absolument convergente quels que soient η et $\mathfrak{J}$. Il suffit en effet de faire apparaître $\sin\mathfrak{J}$ et $\cos\mathfrak{J}$ dans (9) d'où le développement:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} = \eta\Big\{&\frac{k}{2}\cos^2\varphi_0 - \sin\varphi_0 + \sin\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\\ &+ \mathfrak{J}\left[-\cos\varphi_0 + \cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\right]\\ &- \frac{\mathfrak{J}^2}{2!}\sin\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\\ &- \frac{\mathfrak{J}^3}{\mathfrak{J}!}\cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right) + \cdots\Big\}\end{aligned} \tag{11}$$

De plus, la dérivée

$$\frac{\delta f(\eta, \mathfrak{J})}{\partial \mathfrak{J}} = \eta \left[-\cos\varphi_0 + \cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\right]$$

est en valeur absolue inférieure à 1. Cela résulte de l'hypothèse faite sur η dans l'équation (3) qui peut s'écrire $\eta < \frac{1}{2}$. Dans ces conditions on sait que l'équation (9) a une solution $\mathfrak{J}$ unique, développable en une série de Taylor absolument convergente à l'intérieur d'un intervalle non nul. Le rayon de convergence R_c sera précisé (15). On est donc en droit de poser

$$\mathfrak{J} = a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots \tag{12}$$

de porter (12) dans (11) et d'identifier terme à terme. Il vient ainsi:

$$a_1 = \frac{k}{2}\cos^2\varphi_0 - \sin\varphi_0 + \sin\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right).$$

$$a_2 = -a_1\left[\cos\varphi_0 - \cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\right]$$

Pour porter $\mathfrak{J}$ dans (10) on transforme cette équation. Elle peut s'écrire

$$\varrho = \frac{\eta}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi_0, \eta, \mathfrak{J})\, d\varphi_0.$$

La fonction g ne contient $\mathfrak{J}$ que par le sinus et le cosinus. Elle est donc développable par rapport à η et $\mathfrak{J}$ en une série absolument convergente à rayon de convergence infini. Dans cette série on est en droit de substituer à $\mathfrak{J}$ le développement absolument convergent (12) et le rayon de convergence de la série obtenue est égal à celui de (12). On obtient ainsi

$$g[\varphi_0, \eta, \mathfrak{J}(\eta)] = b_1 + b_2\eta + b_3\eta^2 + \cdots \tag{13}$$

avec

$$b_1 = -\cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)$$

$$b_2 = a_1\sin\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right) + \tfrac{1}{2}\left[\cos\varphi_0 - \cos\left(\varphi_0 - \frac{k}{2}\cos\varphi_0 + 2\pi\alpha\right)\right]^2.$$

La convergence de la série (13) dans l'intervalle $0 < \eta < R_c$ est établie quel que soit φ_0. Si on considère alors cette série comme

une série de fonctions de φ_0 il y a convergence uniforme, et l'on est en droit d'intégrer terme à terme. Toutes ces intégrales conduisent à des fonctions de Bessel. On a par exemple pour le premier terme:

$$\int_0^{2\pi} b_1 d\varphi_0 = -2\pi \sin 2\pi\alpha I_1\left(\frac{k}{2}\right).$$

On obtient ainsi la solution sous la forme:

$$\varrho = c_1\eta + c_2\eta^2 + \cdots \tag{14}$$

avec

$$c_1 = -2\sin 2\pi\alpha I_1\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$c_2 = 2 + \tfrac{1}{2}\cos 4\pi\alpha I_2(k)$$
$$- \cos 2\pi\alpha\left[2 I_0\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{3k}{4} I_1\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{k}{4} I_3\left(\frac{k}{2}\right)\right]$$

$I_n(\xi)$ désignant la fonction de Bessel d'ordre n et d'argument ξ, et η étant défini par (7).

Convergence de la solution.

Les séries (12) et (14) ont même rayon de convergence. Nous appliquons à (12) la méthode des majorantes de Cauchy. On remplace la série qui est au second membre de (11) par une série dont chaque terme est supérieur à la valeur absolue du terme correspondant de (11). On peut vérifier que pour $k > 1$ une majorante de (11) est:

$$h(\eta, \mathfrak{J}) = \eta\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2k} + 1 + 2\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{J}^3}{3!} + \cdots\right)$$

et une autre, qui majore encore h:

$$r(\eta, \mathfrak{J}) = \eta\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2k} + 1 + 2\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}^2}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{J}}{3}}\right)$$

à condition que $\mathfrak{J} < 3$. Si on considère alors la fonction y de η définie par

$$y = r(\eta, y)$$

cette fonction y est une majorante de $\mathfrak{J}$. Si y converge, a fortiori $\mathfrak{J}$ converge. Or y se calcule sous forme explicite par une

équation du second degré, pourvu que cette équation ait des racines réelles, d'où la condition suivante pour η:

$$\eta < R_c$$

avec

$$R_c = \frac{\mathfrak{J}(6+\beta) - 9\sqrt{2\beta}}{\beta^2 - 6\beta + 36} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \beta = \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2k} + 1 & \text{pour } k > 1 \\ \beta = 2 & \text{pour } k < 1 \end{array} \tag{15}$$

Donc, lorsque α est donné, la série converge si k est inférieur à une valeur donnée par (15). Si on porte cette valeur en fonction de α dans le plan des α, k (Fig. 5), on obtient une courbe C et la série converge dans le domaine compris entre la courbe C et l'axe des α, c'est-à-dire sensiblement dans tout le domaine intéressant.

4. Cas des amplitudes infiniment petites. Condition de démarrage.

Si k est infiniment petit ϱ est infiniment petit, et sa partie principale se déduit de la série (14) en remplaçant

$$I_1\left(\frac{k}{2}\right) \text{ par } \frac{k}{4}, \quad I_0\left(\frac{k}{2}\right)$$

par 1 et négligeant les autres termes, d'où:

$$\varrho = -\frac{k^2}{4}\left(\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha} - \frac{\sin^2 \pi\alpha}{\pi^2\alpha^2}\right). \tag{16}$$

Pour qu'il y ait oscillation, ϱ doit être négatif. Ceci détermine les domaines suivants pour α (fig. 5):

$$1 < \alpha < \alpha_1 < 1 + \tfrac{1}{2},\ 2 < \alpha < \alpha_2 < 2 + \tfrac{1}{2}, \cdots,\ p < \alpha < \alpha_p < p + \tfrac{1}{2}, \cdots$$

les $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p$ étant des nombres voisins de $1 + \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{2}, \cdots$ $p + \frac{1}{2} \cdots$ Lorsqu'en outre α est très grand le rendement se réduit à:

$$\varrho = -\frac{k^2}{4}\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha} \tag{17}$$

d'où il résulte que α_p tend vers $p + \frac{1}{2}$ quand p croît indéfiniment. Nous appellerons le nombre p l'ordre de l'oscillation. On peut remarquer que ces domaines sont identiques à ceux que l'on obtient dans l'étude de la diode aux tensions infiniment petites[1]).

La formule (16) indique que la puissance fournie au faisceau est proportionnelle à k^2, c'est-à-dire à V^2. Du point de vue éner-

[1]) A. G. Clavier, ibid.

gétique on peut donc dire que le faisceau se comporte pour la tension V comme une résistance définie par $\frac{V^2}{2 R_D} = \varrho I_0 V_0$ où I_0 désigne le courant continu débité par le faisceau. Cette équation s'écrit en introduisant k et $R_0 = \frac{V_0}{I_0}$ qui est la résistance continue du faisceau

$$R_D = R_0 \frac{k^2}{2 \varrho} \tag{18}$$

Mais ϱ est donné par (16), donc

$$\frac{1}{R_D} = -\frac{1}{2 R_0} \left(\frac{\sin 2 \pi \alpha}{2 \pi \alpha} - \frac{\sin^2 \pi \alpha}{\pi^2 \alpha^2} \right) \tag{19}$$

R sera désigné sous le nom de résistance de démarrage ou résistance équivalente au faisceau. Pour que le système oscille il faut que R soit négatif. En outre la puissance $\frac{V^2}{2 R_D}$ que le faisceau peut céder au circuit oscillant doit être supérieure à la puissance $\frac{V^2}{2 S}$ absorbée par le circuit. D'où la condition

$$| R_D | < S \tag{20}$$

La résistance de démarrage doit être en valeur absolue inférieure à la résistance shunt S du circuit.

Dans chaque domaine d'excitation il existe un minimum de R_D atteint pour une valeur de α voisine de $p + 1/4$, comme le montre la formule (19). Pour les trois premiers ordres les valeurs successives des minimas sont:

$$\begin{aligned} R_{D_1} &= 19{,}6\ R_0 & \alpha &= 1{,}20 \\ R_{D_2} &= 33\ R_0 & \alpha &= 2{,}24 \\ R_{D_3} &= 44{,}5\ R_0 & \alpha &= 3{,}25 \end{aligned}$$

La plus faible valeur de R s'obtient pour l'ordre 1 et la résistance de démarrage croît si l'ordre croît. Pour un circuit d'impédance donnée S, il faudra choisir R_D assez faible pour que (20) soit réalisé. On a par là un moyen de mesurer l'impédance d'un résonateur de volume.

Le calcul donné ici montre que, en ce qui concerne l'énergie wattée, le faisceau est équivalent à une résistance R_D. On peut effectuer un calcul analogue pour l'énergie déwattée. En éliminant

φ_1 entre les équations (2) et (6a) on obtient le rendement déwatté sous forme d'une série dont la partie principale pour $k \to 0$ est

$$\varrho_d = -\frac{k^2}{4\pi\alpha}\left(\cos^2 \pi\alpha - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right).$$

La puissance déwattée est donc elle aussi proportionnelle à k^2, et le faisceau se comporte en ce qui concerne l'énergie déwattée comme une capacité définie par

$$\omega C \frac{V^2}{2} = \varrho_d I_0 V_0$$

ou

$$C = -\frac{1}{\omega R_0}\frac{1}{2\pi\alpha}\left(\cos^2 \pi\alpha - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right).$$

En résumé le faisceau est équivalent pour les échanges d'énergie aux amplitudes infiniment petites à une résistance R_D et une capacité C en parallèle (fig. 4).

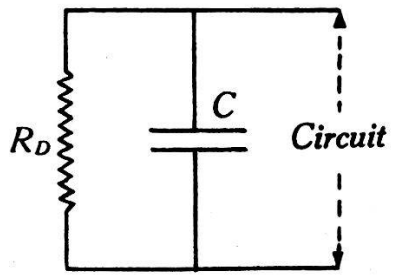

Fig. 4.

5. Cas des amplitudes finies. Résultats numériques.

La série (14) s'applique au cas des amplitudes finies. Elle permet de délimiter dans le plan des α, k (fig. 5) un ensemble de régions hachurées à l'intérieur desquelles ϱ est négatif et l'oscillation possible. Ce diagramme présente l'aspect d'un carrelage. On se rend compte qu'il doit en être ainsi en considérant l'expression de ϱ pour les grandes valeurs de α, fournie par le premier terme de la série (14):

$$\varrho = -\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha} k I_1\left(\frac{k}{2}\right). \tag{21}$$

Cette expression est négative dans deux cas; soit pour $p < \alpha < p + \frac{1}{2}$ et $I_1\left(\frac{k}{2}\right) > 0$; soit pour $p + \frac{1}{2} < \alpha < p$ et $I_1\left(\frac{k}{2}\right) < 0$. Ceci définit une suite de rectangles délimités par les verticales $\alpha = p$, $p + \frac{1}{2}$, $p + 1, \cdots$ et par les horizontales correspondant aux racines de $I_1\left(\frac{k}{2}\right)$, soit $\frac{k}{2} = 3{,}83$; $7{,}01; \cdots$. Aux petites valeurs de α le dia-

gramme garde approximativement la même allure, avec cette différence que $p + \frac{1}{2}$ est remplacé par α_p. Les domaines contigus à l'axe $k = 0$ sont limités sur cet axe aux régions $p < \alpha < \alpha_p$, où la condition de démarrage est vérifiée: les régimes correspondant aux différents points de ces domaines sont donc réalisables à partir d'oscillations infiniment petites. Les autres domaines n'ont aucun point commun avec l'axe, ils correspondent à des régimes de fonctionnement qu'il est impossible d'atteindre à partir d'une oscillation infiniment petite. De tels régimes peuvent présenter un intérêt pratique.

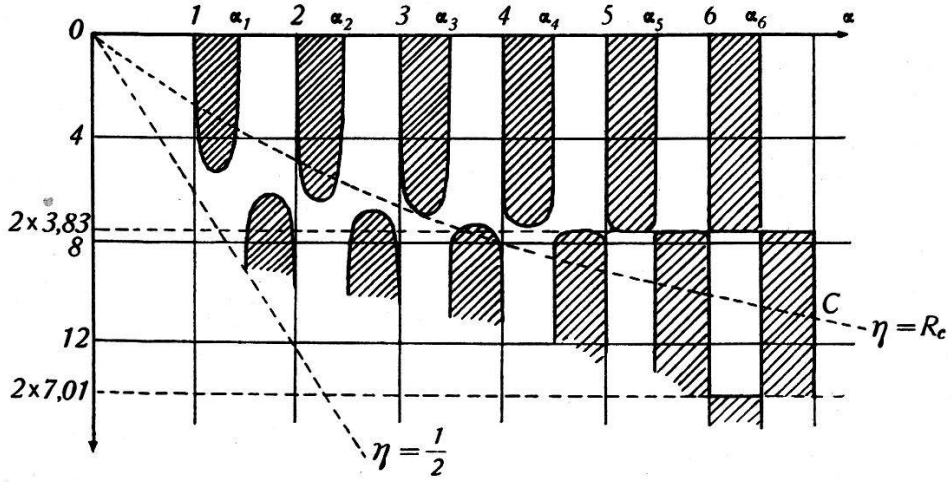

Fig. 5.

La formule (21) montre qu'aux grandes valeurs de α le rendement atteint un maximum dans chaque domaine pour α voisin de $p + {}^1/_4$. Ce résultat reste sensiblement vrai aux valeurs faibles de α, et en outre le rendement croît si α décroît. C'est pourquoi nous donnons (fig. 6) les courbes du rendement en fonction de l'amplitude pour les oscillations d'ordre 1, 2, 3 et les valeurs $\alpha = 1 + \frac{1}{4}$, $2 + \frac{1}{4}$, $3 + \frac{1}{4}$. Le calcul est effectué au moyen des trois premiers termes de la série (14) qui converge rapidement. Pour les ordres 1 et 2 on a calculé quelques points directement par approximations successives dans les régions extérieures au domaine de convergence de la série.

Le maximum de rendement est 14,5%. Il est atteint pour l'oscillation d'ordre 1 avec $k = 4$. La tension alternative est donc bien supérieure à la tension continue. Cela ne présente pas d'inconvénient puisque d'après l'équation (3) les électrons ne font pas demi-tour.

On peut toujours associer à ϱ une résistance définie par la formule

$$R = R_0 \frac{k^2}{2\,\varrho}$$

semblable à la formule (18) mais valable pour la tension finie V. R permet de représenter le faisceau du point de vue énergétique. Nous l'appelons la résistance du faisceau pour l'amplitude V. On peut porter en regard de la courbe de rendement une courbe (fig. 7):

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{R_0} \frac{2\,|\varrho|}{k^2}.$$

Elle part d'un point D représentant la résistance de démarrage $1/R_D$ et s'arrête au point de rendement nul. Ce diagramme permet de déterminer le régime de fonctionnement optimum et de

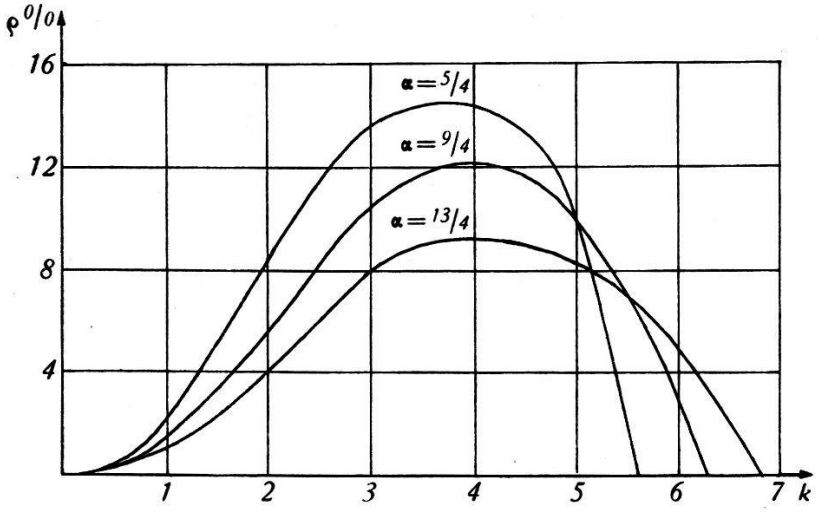

Fig. 6.

résoudre le problème de l'adaptation (Anpassung). Supposons un circuit donné, d'impédance shunt S. Pour que le système oscille il faut

$$S > |R_D|$$

et l'amplitude de l'oscillation qui s'établit est donnée par

$$S = |R|$$

c'est-à-dire par l'intersection F de l'horizontale $1/S$ avec la courbe $1/R$. Pour que le rendement au point de fonctionnement soit maximum: il faut que le k correspondant à F soit de 4, ce qui donne $S \cong 50\,R_0$. Inversement s'il s'agit de tirer d'un générateur le maximum de puissance, c'est S qu'il faut varier pour amener F au point d'abscisse $k = 4$. Cela est possible pour un circuit oscillant donné en variant le couplage entre ce circuit et le circuit de charge.

On peut élever le rendement à 22% en récupérant l'énergie des électrons sortant du résonateur au moyen d'une tension de freinage égale à la vitesse en volts du plus lent des électrons sortants.

6. Discussion.

Le choix des paramètres α, k, R_0, S, dépend du problème à résoudre.

Si l'on veut obtenir un maximum de puissance il faudra choisir l'oscillation d'ordre 1 avec

$$\alpha = 5/4, \quad k = 4, \quad S = 50\, R_0$$

Cela conduit pour des rhumbatrons ordinaires à des valeurs relativement faibles, mais acceptables de R. Par exemple:

$$S = 2{,}10^6\,\Omega\,; \quad R = 4{,}10^4\,\Omega; \quad V = 4000 \text{ Volts}; \quad I_0 = 100 \text{ mA}.$$

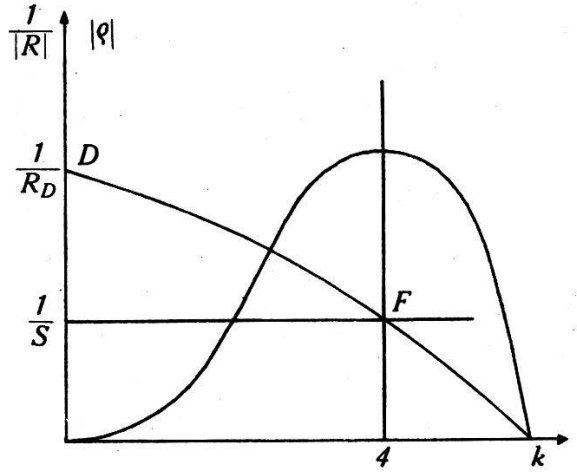

Fig. 7.

Si l'on veut obtenir des ondes aussi courtes que possible, on peut avoir intérêt à choisir une oscillation d'ordre supérieur à 1, malgré l'augmentation de la résistance de démarrage que cela entraîne — parce que dans certaines limites l'impédance du circuit croît plus vite avec α que la résistance de démarrage. On peut s'en rendre compte par exemple pour un résonateur en forme de cylindre circulaire de rayon a et de hauteur l. La formule qui donne l'impédance shunt s'écrit[1])

$$S = \mu \frac{l}{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}}$$

où μ désigne un facteur numérique. Or on a $\frac{l}{\lambda} = \alpha \frac{v_0}{c}$ avec $\lambda = 2{,}61\, a$, λ étant la longueur d'onde et c la vitesse de la lumière. Prenons par ex. $v_0/c = 1/10$. Si l'on passe de l'ordre 1 à l'ordre 2, α passe de 5/4 à 9/4, la résistance de démarrage croît dans le rapport $33/19{,}6 = 1{,}7$, et la résistance shunt croit dans le rapport $S_2/S_1 = 2{,}46$.

[1]) J. Hansen, Journal of applied Physics, Oct. 1938, p. 655.

Les impédances croîtraient-elles proportionnellement qu'il y aurait encore avantage à choisir une oscillation d'ordre supérieur parce que la construction du circuit devient plus facile avec des α croîssants.

L'avantage de l'oscillateur considéré ici par rapport à la diode est que le rhumbatron peut être construit d'une seule pièce puisque le champ d'accélération continue est rejeté à l'extérieur. Cela permet d'obtenir de meilleurs facteurs de surtension et de meilleures impédances.

Les avantages par rapport aux oscillateurs du genre Klystron sont les suivants: On est libéré des difficultés d'accord, puisqu'il n'y a qu'un circuit. En outre on est libéré de la condition imposée au temps de transit d'être voisin de $T/4$ qui limite les circuits acceptables pour le Klystron à $\alpha \leqq 1/4$. Cela permet d'améliorer notablement le facteur de surtension et la résistance shunt. On pourrait par exemple utiliser comme circuit une sphère ou un cube, chose impossible dans le Klystron[1]). Pour le cube la condition d'excitation se déduirait de la relation $\frac{v_0}{c} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$. Puisque α doit être compris dans les domaines $p < \alpha < \alpha_p$ on conclut que l'excitation du cube ou de la sphère est possible pour des domaines de tension bien déterminés, indépendants des dimensions des oscillateurs.

Nous remercions Monsieur Clavier (Les Laboratoires L.M.T., Paris) des critiques fort utiles qu'il a formulées à propos de ce travail, et Monsieur Tank, Professeur à l'E.P.F. Zurich, qui a donné à l'un de nous l'occasion d'étudier ces questions.

Paris/Lyon, juin/septembre 1940.

---

[1]) Hansen and Richtmyer, Resonators suitable for Klystron oscillators Journal of applied Physics, Mars 1939, p. 189.