

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 8 (1935)
Heft: II

Artikel: Untersuchung über Strukturänderung der Kristalle im elektrischen Feld :
Kompensationsapparatur und Quantenschwankungen
Autor: Német, Anton
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110522>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Untersuchung über Strukturänderung der Kristalle im elektrischen Feld

Kompensationsapparat und Quantenschwankungen

von Anton Némethy.

(30. X. 34.)

V. Beschreibung und Berechnung der Apparatur.

1. Röntgenröhre.

Es wurde eine technische Röntgenröhre mit Kupferantikathode verwendet, wie sie SIEMENS für Materialuntersuchungen herstellt. Die Hochspannung wird einem üblichen Röntgentransformator entnommen, wobei nur eine Halbwelle durch eine Ventilröhre gleichgerichtet wird. Die Heizung der Ventilröhre geschieht durch einen Heiztransformator 110/12 Volt, und zwar erdseitig, so dass dieser nicht speziell isoliert zu sein braucht. Der Hochspannungstransformator besitzt vier Stufen, durch welche man die Grobregulierung vornehmen kann. Die Feinregulierung geschieht durch einen Vorschaltwiderstand im Primärkreis. Dadurch wird erreicht, dass bei einer Belastung von 10—25 mAmp. eine hinreichend stetige Spannungsregulierung von 5 bis 50 KV erzielt werden kann. Die Heizung der Röntgenröhre geschieht durch eine Akkumulatorbatterie von einer Kapazität von 64 Ah mit Grossoberflächenplatten. Es hat sich gezeigt, dass diese Batterie eine sehr konstante Spannung gewährleistete. Der Transformator wurde bei verschiedenen Belastungen geeicht, so dass man im Betrieb aus der Primärspannung auf die Hochspannung schliessen konnte. Da die Antikathode geerdet und die Ventilröhre erdseitig geheizt wird, würde sich die Kathode der Röntgenröhre in der Sperrperiode auf eine unbekannte Spannung gegenüber Erde aufladen. Dadurch ginge einerseits die Schutzwirkung der Ventilröhre verloren, andererseits wäre es wegen Unkenntnis der Spannungskurve nicht möglich, die Arbeitsspannung zu berechnen. Ist aber der Kriechwiderstand der Röntgenröhre wesentlich kleiner als der der Ventilröhre, so ist die Sperrspannung an der Röntgenröhre praktisch zu vernachlässigen. Nötigenfalls kann man einen grossen Flüssigkeitswiderstand der Röhre parallelschalten. Messungen haben gezeigt, dass dies im vorliegenden Fall überflüssig war. Die Röntgenröhre wurde meistens mit 40 KV Scheitelspannung bei 17 mAmp. Belastung betrieben. Sie war den Spannungsschwankungen des Netzes ausgesetzt.

2. Die Messapparatur.

Zur Untersuchung wurde ein Ionisationsspektrometer gebaut, bei dessen Konstruktion es hauptsächlich folgende Anforderungen zu verwirklichen galt:

1. Grosse Empfindlichkeit.
2. Grösstmögliche Stabilität des Nullpunktes.
3. Bequeme Ablesung und Registrierung.

Aus letzterem Grunde wurde eine Anordnung mit einem Galvanometer und Röhrenverstärker einem Elektrometer vorgezogen.

a) Beschreibung der Ionisationskammer.

α . Lichtausbeute.

Es ist wichtig, dass möglichst die ganze, in die Kammer einfallende Strahlungsenergie zur Messung gelangt, und zwar nicht nur wegen der Empfindlichkeit der Apparatur, sondern wie wir weiter unten sehen werden, wegen der Konstanz des Nullpunktes. Als Füllgas wurde Argon gewählt wegen seiner chemischen Trägheit und relativ hohen Ordnungszahl ($Z = 18$). Die benützte K_α -Linie von Kupfer hat die Wellenlänge $1,54 \text{ \AA}$ (die Absorptionsgrenze der K -Serie von Argon ist $3,86 \text{ \AA}$, so dass die Absorption im K -Zweig zu berechnen ist). Der Massenabsorptionskoeffizient ist:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\sigma}{\varrho},$$

wobei $\frac{\sigma}{\varrho}$ für Elemente von $Z = 15 - 20$ bei der in Frage stehenden Wellenlänge gleich $0,2$ gesetzt werden kann (Streuung). Aus der allgemeinen Absorptionskurve (nach JÖNSSON¹⁾) entnehmen wir den Ausdruck $\log \left\{ \frac{\tau}{\varrho} \cdot \frac{A}{Z} \right\}$ in Funktion von $\log \{Z\lambda\}$, wobei $A = \text{Atomgewicht von Argon} = 39,88$; ϱ die Dichte $= 1,656 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ bei 760 mm Hg und 20° C und τ der Koeffizient der wahren Absorption ist. Daraus berechnet sich das $\mu_{AR} = 1,88 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Aus dem Absorptionsgesetz berechnet sich das Verhältnis ξ der in der Kammer pro cm^2 zur Messung gelangenden Energie zur einfallenden:

$$\frac{J_0 - J}{J_0} = \xi = (1 - e^{-\mu x}) \frac{\tau}{\mu},$$

¹⁾ JÖNSSON, Diss. Upsala 1928.

wobei x die Schichtdicke des absorbierenden Mediums, J_0 die einfallende Flächenintensität und J die austretende Flächenintensität bedeuten. Bei den getroffenen konstruktiven Annahmen (Kammerlänge $x = 13,6$ cm, Druck $= 5,5$ Atm.) wird 99,8% der einfallenden Strahlung, also praktisch alles absorbiert.

Als Fenster wurde ein von der Gelatine befreiter photographischer Film verwendet, die Dicke war 0,07 mm, die Absorption (bei $\lambda = 1,54$ Å) 16%. Er entspricht einer Aluminiumfolie von 0,015 mm und die Festigkeitseigenschaften sind wesentlich besser.

β . Schaltung.

Wegen der Stabilität des Nullpunktes ist es erwünscht, dass nur die eintretende Strahlungsenergie gemessen wird. In verschiedenen Arbeiten¹⁾ wurde bereits die Ionisationskammer mit isoliertem Käfig beschrieben. Sie hat den Vorteil, dass die — durch die radioaktive Wandstrahlung verursachte — und störend wirkende Ionisation nicht mit zur Messung gelangt.

Um die Reichweite der im Gas primär emittierten Elektronen zu berechnen, können wir das WHIDDINGTON'sche Gesetz: $V_{KV} = k \sqrt{R_{cm}}$ benutzen. (V = Anfangsenergie der Elektronen in e KV., k eine Konstante, die nur vom Gas abhängt, für Argon ist $k = 24,8$; R die Reichweite in cm.)

Das Quantengesetz gibt den Zusammenhang: $h\nu = \frac{mv^2}{2} + A$, wobei A die jeweilige Ablösungsarbeit der Photoelektronen bedeutet. Nehmen wir an, dass die schnellsten Photoelektronen die Energie $h\nu_{cu} = 8050$ eV besitzen, so ergibt sich aus obiger Formel: $R = 0,106$ cm bei Atmosphärendruck und $R = 0,19$ mm bei 5,5 Atm. Der Käfigdurchmesser müsste demnach nicht viel grösser sein als die Länge des Eintrittsspalt. Dabei wird die Divergenz des Bündels ausschlaggebend sein.

Dimensionen der Kammer.

Die Länge der Kammer wird durch die Bedingung festgelegt, dass möglichst die gesamte eintretende Energie absorbiert werden soll. Das ist, wie oben erwähnt, gut verwirklicht. Die Querdimensionen werden durch verschiedene Anforderungen bedingt. Erstens müssen die Primärelektronen ihre volle Ionisation entfalten, müssen also bis zum Käfig absorbiert sein. Das ist ebenfalls

¹⁾ HOFFMANN, Ann. d. Phys. **80**, 779, 1926; HERZOG, Helv. Phys. Acta VI, 513, 1933.

erfüllt. Zweitens muss der Abstand der Wand vom Käfig festgesetzt werden.

Wir nehmen an, dass die Kammerwand mit verschiedenen radioaktiven Substanzen verunreinigt ist. Wenn wir die störende Strahlung hauptsächlich α -Teilchen zuschreiben, stellen wir fest, dass ihre Reichweiten im Argon von Atmosphärendruck sämtlich unterhalb 6,5 cm sind. Bei 5,5 Atm. entspricht das einem Abstand von 1,2 cm der Wand vom Käfig. Der Druck wird hauptsächlich durch die Bedingung gegeben, dass keine α -Teilchen von der Wand zum Käfig gelangen dürfen. Die Käfigdrähte und die Nadel verursachen durch ihre Radioaktivität natürlich auch Störungen, aber ihre Oberfläche ist nur etwa 4% derjenigen der Wand. Immerhin zeigte die Erfahrung, dass die Nadel sauber gehalten werden muss.

Die Richtung des Ionisationsstromes wurde so gewählt, dass bei Ionisation das Gitter positiver wurde. Das hat den Vorteil, dass die Röhren ohne Strahlung mit minimalem Anodenstrom arbeiten. Der Käfig erhält eine Spannung von + 150 Volt gegenüber der Nadel, das entspricht 95% der Sättigungsspannung. Diese Potentialdifferenz ändert sich im Betrieb nur unwesentlich durch den Spannungsabfall am Widerstand. Das Hilfsfeld zwischen Käfig und Wand hat den Zweck die durch die α -Teilchen gebildeten Ionenpaare in einen Hilfskreis herauszuziehen und nicht zur Messung gelangen zu lassen. Es ist dem Hauptfeld entgegengesetzt gerichtet, um Störeinflüsse der in der Nähe des Käfigs gebildeten Ionenpaare zu vermeiden. Aus praktischen Gründen ist das Hilfsfeld v gleich dem Messfeld, indem die Wand und ein Pol des Widerstandes geerdet sind und der Käfig durch eine Trockenbatterie + 150 Volt erhält.

Gitterableitwiderstand.

Als solche wurden KRÜGER'sche Hochohmwiderstände gewählt. Der Widerstand in der Messanordnung R_1 hatte den Wert $7,31 \cdot 10^{11}$ Ohm, der in der Kompensationshälfte R_2 war $4,77 \cdot 10^{11}$ Ohm. Die Widerstände sind metallbestäubte Bernsteinröhrchen; sie sind bequem zum Einbauen und wurden gut konstant befunden.

γ . Konstruktion.

Die Ionisationskammer besteht aus einem Messingzylinder mit einseitig angelötetem Deckel und auf der anderen Seite aufgezogenem Flansch. Der Deckel hat einen rechteckigen Ausschnitt für den Strahleintritt. Er trägt eine runde Eindrehung. In diese

passt eine runde Scheibe, die einen gleichen Ausschnitt hat. Zwischen Scheibe und Deckel wird nun das Fenster, eine Zelluloidfolie, mit einer ringförmigen Gummidichtung eingelegt. Die Scheibe steht nun um einen halben Millimeter über den Flansch des Deckels hinaus. Auf diesen Flansch wird endlich ein verstellbarer Bleispalt aufgeschraubt, der die Scheibe gegen den Deckel presst. Da der Gummiring wegen der Scheibe nicht ausweichen kann, gibt diese Anordnung eine vorzügliche Dichtung. An der Rückseite der Kammer ist ein zweiter Deckel aufgeschraubt. Dieser besitzt einen konischen Schliff, in welchen ein passendes Isolationsstück aus Naturbernstein eingelegt ist. Dieses wiederum enthält einen Metallschliff, auf den die Stahlnadel angelötet ist. Die Kammer besitzt dicht am Flansch noch eine zweite konische Ausführung (Hartgummi), welche die Käfigzuführung enthält. Letztere ist mit Pizein abgedichtet. Der Käfig besteht aus 12 Stahldrähten von 0,1 mm Durchmesser; diese sind zwischen zwei Mikanitringen gespannt. Käfig und Nadel stellen die zwei Elektroden dar und sind beide von der Kammerwand isoliert. Die eine, mit dem Gitter verbundene Elektrode (Nadel) muss hochisoliert sein (Bernsteindurchführung), während der Isolationswiderstand der anderen bloss eine zusätzliche Belastung der Trockenbatterie bedeutet. Messungen ergaben, dass der Bernsteinschliff eine Isolation von $\sim 10^{14}$ Ohm gewährleistet, während die Hartgummidurchführung mit 10^9 Ohm hinreichend isoliert ist. Die Wandung ist geerdet und mit dem Spektrographen und mit der Antikathode der Röntgenröhre verbunden. Die Gitterleitung ist ausserordentlich empfindlich gegen Kapazitätsänderungen im Innern der Kammer. Aus diesem Grunde und auch deshalb, weil die dünnen Kupferdrähte rasch erschlaffen würden, hat es sich als vorteilhaft erwiesen, Stahldrähte zu verwenden; die Schwankungen infolge Erschütterungen wurden dadurch erheblich reduziert. Der hintere Deckel trägt einen Messingzylinder mit dem Hochohmwiderstand und der Verstärkerröhre. Letztere steht auf einer Hartgummiplatte, die Anoden- und Heizleitungen sind mit Pizein gedichtet ausgeführt. Der Zylinder ist auf einen Unterdruck von 2 mm Hg ausgepumpt, dadurch wird eine Ionisation in der Nähe der Röhre vermieden und ein Feuchtigkeitsniederschlag auf die Verstärkerröhre verhindert, somit eine dauernd gute Isolation erreicht. Die Ionisationskammer und das Röhrengefäß besitzen kleine Zeigermanometer, sodass man den Gasdruck bzw. das Vakuum dauernd kontrollieren kann. Das ganze System wird durch einen Pressbügel, der auf der Ionisationskammer angebracht ist, am Spektrographen befestigt. Das Gehäuse der Verstärkerröhre trägt einen

Rohrstutzen, der mit einem Flansch und einer Überwurfmutter am Deckel der Kammer befestigt wird. Hier wurde Bleidichtung verwendet; alle aufgeschraubten Deckel sind mit Gummidichtungen versehen.

Die Anordnung verwirklicht auf konstruktiv einfache Weise die Anforderung, eine kleine Gitterkapazität zu bekommen, diese während den Messungen konstant zu halten und die Gitterisolation dauernd hoch zu halten. Bei einer Trennung der Verstärkerröhre von der Ionisationskammer würde die Erfüllung dieser Forderungen bei der notwendigen Beweglichkeit grosse Schwierigkeiten bereiten. Dabei erlaubt die Anordnung — wie aus der Konstruktion des Spektrographen (unten) ersichtlich — eine sehr gute Abschirmung aller empfindlichen Leitungen.

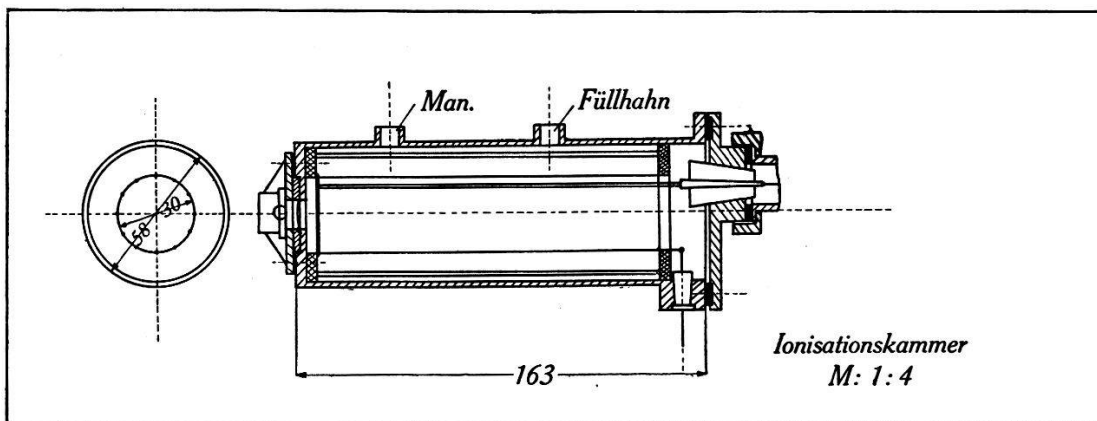


Fig. 3.
Ionisationskammer.

b) Konstruktion des Spektrographen.

Der Spektrograph trägt zwei der oben beschriebenen Systeme, bestehend aus Ionisationskammer und angebauter Verstärkerröhre; ein räumlich festes und ein um die Achse schwenkbares.

Ersteres dient zur Kompensation, das zweite zur Messung. Es führen je sechs isolierte Leitungen von den Verstärkerröhren in den — sich unter dem Spektrograph befindenden — Metallbehälter, der die Widerstände und die Batterien des Verstärkers enthält. Bei der Konstruktion wurde darauf geachtet, diese Leitungen abgeschirmt zu führen. Da das eine System beweglich ist, wurden sie in der als Rohr ausgebildeten Achse geführt.

Der Teilkreis für die Messkammer hat einen Durchmesser von 300 mm und besitzt eine Teilung von 20 zu 20 Minuten. Mit einer Feinstellung durch eine Mikrometerschraube ist diese noch in 100 Teile teilbar, so dass 12 Sekunden noch einstellbar sind. Der Teilkreis für den Kristallhalter hat eine Teilung von Minute

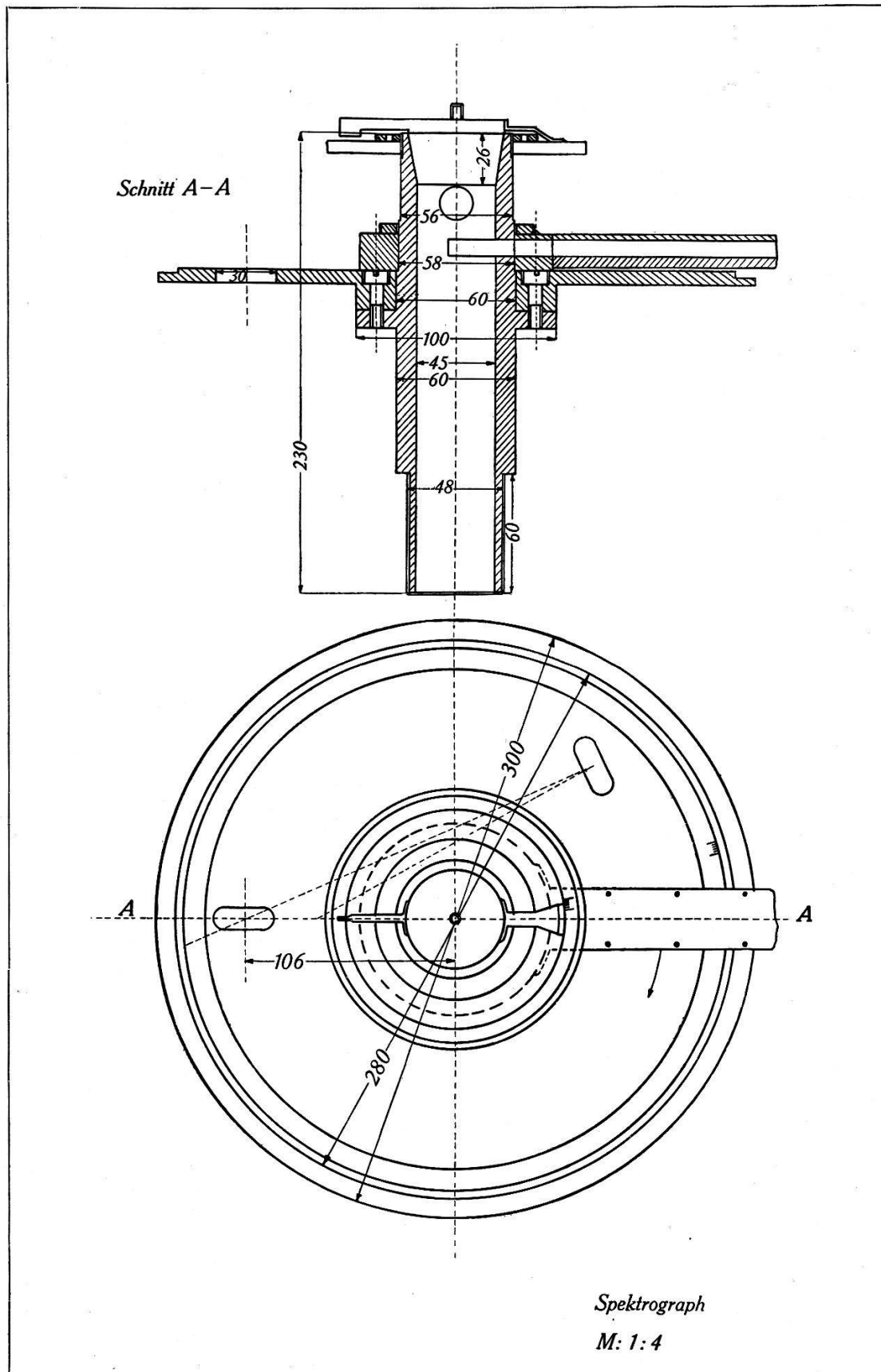


Fig. 4.
Spektrograph.

zu Minute. Der Messkristall ist auf einem Goniometerkopf in der Mitte des Spektrographen drehbar angebracht; der Monochromatorkristall (Kalkspat) ist auf einem Tellerchen, das ein für allemal eingestellt wird, vor dem Spaltsystem befestigt in der Weise, dass die untere Hälfte des ausgeblendeten Strahles durch ihn in die feste Kammer reflektiert wird, während die Oberhälfte des Strahles ungehindert bis zur Mitte des Spektrographen zum Messkristall gelangen kann. Auf dem Messteller ist die feste Kammer befestigt, und zwar so, dass die Kammer im richtigen Reflexionswinkel zum einfallenden Strahl steht.

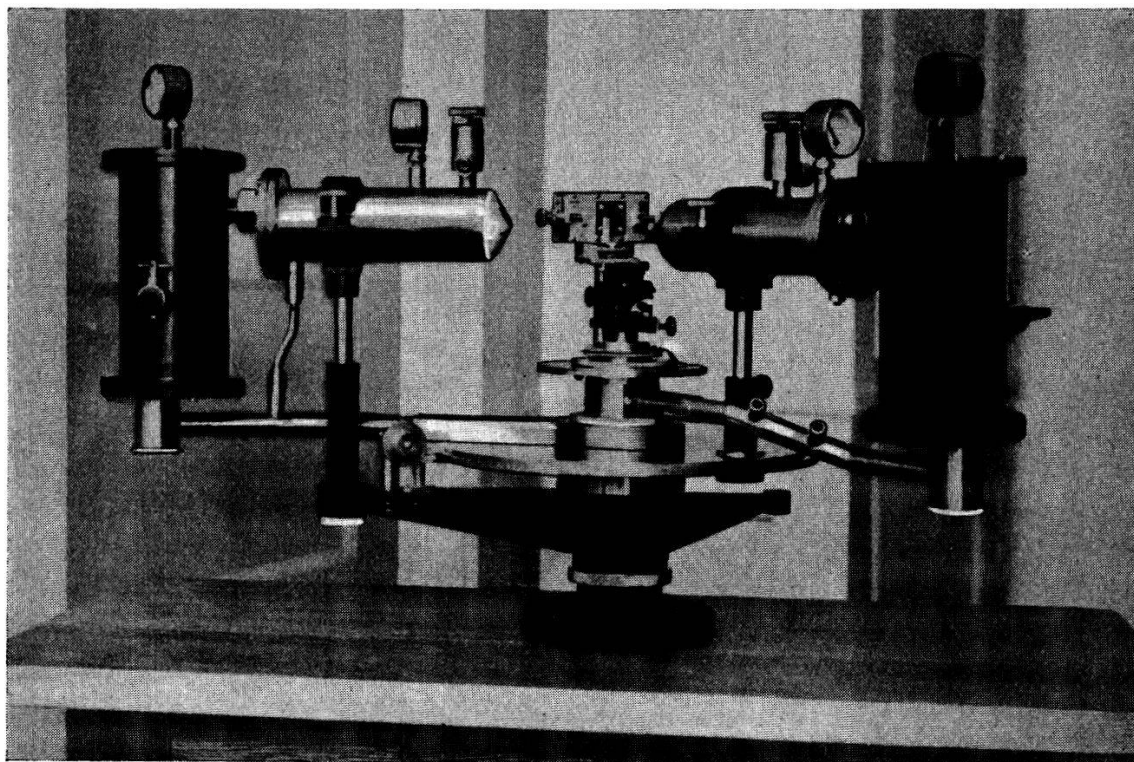


Fig. 5.

Spektrograph mit Ionisationskammern und Behälter der Verstärkerröhren.

(Kalkspat $100:14^{\circ} 35'$.) Die bewegliche Kammer ist mit einem Dreharm auf der Achse befestigt. Die Galvanometerzuführung ist ein zweiadriges Bleikabel.

Die Röntgenröhre ist horizontal aufgestellt; dadurch wird erreicht, dass ihr Fenster dicht an den Spalt herankommt und der Hochspannungsteil doch genügend weit vom Spektrographen entfernt ist. Der Strahl gelangt durch zwei verstellbare Bleispalte zum Kristall, der Reflexionsstrahl durch den Kammerspalt in die Ionisationskammer.

3. Verstärker und Galvanometer.

a) Wahl der Verstärkeranordnung.

Als Verstärkerröhren wurden die sog. Elektrometerröhren der General Electric Co., „Pliotron FP 54“ verwendet. Beschreibung der Röhren und Betriebsdaten sind bei METCALF¹⁾ zu finden. Die Röhren besitzen einen extrem grossen ($\sim 10^{15}$ Ohm) Kriechwiderstand zwischen dem Steuergitter und den übrigen Elektroden und eine Steilheit von ungefähr $30 \mu\text{Amp/Volt}$ bei einer normalen Gittervorspannung von $-4,5$ Volt; der Gitterstrom hat dabei die Grössenordnung von 10^{-15} Amp. Die Röhre gäbe also bei einem Gitterableitwiderstand von $\sim 10^{13}$ Ohm (1% vom Kriechwiderstand als Grenze angesetzt) ihren maximalen Stromverstärkungsfaktor, nämlich $\sim 10^8$. Es hat aber zur Folge, dass bei so hohen Gitterableitwiderständen die Registrierung sehr langsam wird und eine direkte Ablesung praktisch nicht in Frage kommt. Der Vorteil gegenüber einer Messanordnung mit einem Elektrometer ginge also verloren. Es wurde daher mit Gitterableitwiderständen von $\sim 10^{11}$ Ohm gearbeitet. Demgemäss wird der Stromverstärkungsfaktor von der Grössenordnung von 10^6 . Die Röhren müssen allerdings in evakuiertem Messingzylinder vor Licht, Feuchtigkeit und Fremdionen geschützt aufgestellt werden, um lichtelektrische Störungen zu vermeiden bzw. den Kriechwiderstand hoch zu erhalten. Die ganze elektrische Anordnung, besonders die Steuergitterleitung und die Käfigzuführung, muss gegen induktive Störungen (hauptsächlich von der eigenen Röntgenröhre herrührend) gut abgeschirmt werden.

Da der Empfindlichkeit der Messung, wie oben bemerkt, durch die Einstelldauer eine Grenze gesetzt ist, musste hauptsächlich dafür gesorgt werden, dass diese bei der Verwirklichung einer raschen Registrierung (möglichst trägheitsfreie Verstärkung) am besten angenähert wird. Wie wir nämlich sehen werden, wird die Empfindlichkeit auch durch die Instabilität des Nullpunktes begrenzt. Wir wollen nun die möglichen Schwankungsursachen aufzählen und werden bestrebt sein, diese nach Möglichkeit zu beseitigen.

Folgende Schwankungsursachen können auftreten:

1. Intensitätsschwankungen des einfallenden Röntgenstrahles:
 - a) verursacht durch die Spannungsschwankungen im Netz,
 - b) durch Inkonstanz der Heizbatterie der Röntgenröhre.

¹⁾ METCALF, Phys. Rev. **36**, 1489, 1930.

2. Schwankungen, die in der Ionisationskammer entstehen:

- a) durch Fremddionisation (radioaktive Strahlung),
- b) durch die Quantennatur der Strahlung,
- c) durch quantenhafte Absorption,
- d) durch Kapazitätsänderungen infolge Erschütterungen.

3. Schwankungen im Verstärker:

- a) Batterieschwankungen,
- b) Isolationsfehler,
- c) schlechte Kontakte.

Punkte 2a und 2d haben wir bereits behandelt. Zu 2c ist zu bemerken, dass sie bei einem Absorptionsgrad von 99,8% keine Rolle spielt. Auf 3b und 3c brauchen wir nicht näher einzugehen. Wir wollen zunächst Punkt 1 und 3a, später 2b ausführlich behandeln.

Die Intensitätsschwankungen des einfallenden Strahles wurden durch eine zweite Ionisations- und Verstärkeranordnung kompensiert, die mit der Messanordnung eine WHEATSTONE'sche Brückenschaltung bildet.

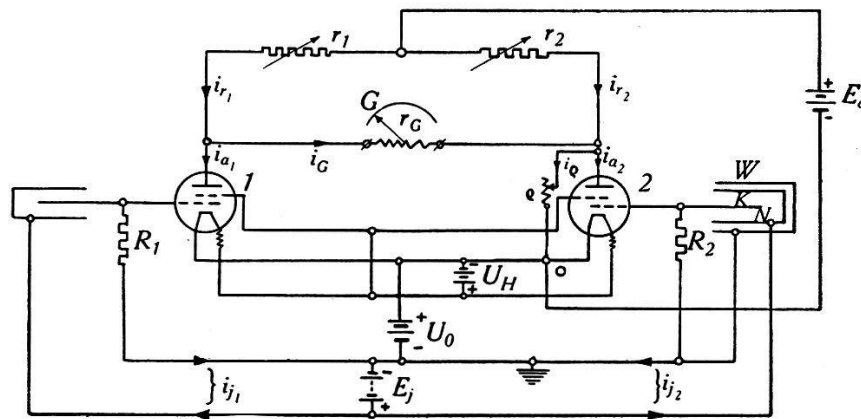


Fig. 6.

Zweiröhren-Verstärker.

Diese Schaltung erlaubt gleichzeitig eine Kompensation der Batterieschwankungen bis auf diejenigen der Heizbatterie. Da die Belastung dieser 64 Amph-Batterie nur 0,2 Amp betrug, wurden keine merklichen Schwankungen dieser Batterie registriert. Etwaige Schwankungen der Käfigspannung E_j hatten auf die Messung keinen Einfluss, da bei Sättigung gearbeitet wurde. Wie wir sehen werden, lassen sich die Ungleichheiten der beiden Verstärkerröhren ebenfalls kompensieren.

b) Berechnung der Kompensation und der
Apparaturempfindlichkeit.

Es wurde monochromatische Kompensation verwendet, d. h. ein Teil des einfallenden Strahles wurde durch einen Kalkspatkristall in die Kompensationskammer reflektiert, welche somit nur eine Wellenlänge erhielt, deren Intensität in gleicher Weise von der Spannung der Röntgenröhre abhängt wie die des in die Messkammer gelangenden Strahles.

Wir nennen die Intensität der aus dem Spaltsystem austretenden Röntgenstrahlung J ; die in die Kammer 1 (Messkammer) einfallende Strahlungsintensität J_1 , die in die Kammer 2 einfallende J_2 . Die Intensitäten mögen in willkürlichen Einheiten gemessen werden. Index 1 bezieht sich stets auf die zur Messung dienende Hälfte des Verstärkersystems (Kammer, Verstärker-röhre, Widerstände); Index 2 auf die zur Kompensation dienende Hälfte; i_j soll den Ionisationsstrom bedeuten.

Dann gilt bei Sättigung:

$$\begin{aligned} i_{j1} &= \alpha_1 \cdot J_1 \quad \text{und} \\ i_{j2} &= \alpha_2 \cdot J_2, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei α_1 und α_2 die von den Einheiten, dem Eintrittsspalt, der Kammerkonstruktion usw. abhängende Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Nennen wir das Verhältnis von reflektierter und primärer Intensität γ , so können wir weiter schreiben:

$$\begin{aligned} i_{j1} &= \alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot J \quad \text{und} \\ i_{j2} &= \alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot J. \end{aligned} \tag{2}$$

Den Raumladungsteil der Charakteristik der Verstärker-röhren können wir nach LANGMUIR-SCHOTTKY darstellen:

$$i_a = s \cdot U^{3/2},$$

wenn i_a den Anodenstrom, s die Steilheit und U die Steuerspannung $U = U_g + D \cdot U_a$ zusammengesetzt aus der Gitterspannung und aus der mit dem Durchgriff multiplizierten Anoden-spannung bedeuten. Für die folgenden Berechnungen werden wir jedoch eine Proportionalität zwischen Anodenstrom und Steuerspannung annehmen, indem wir voraussetzen, dass wir uns im geradlinigen Teil der Charakteristik befinden, was wir als erste Annäherung betrachten können. Wir schreiben also:

$$i_a = s \cdot (U_g + D \cdot U_a).$$

Dabei bezieht sich g stets auf das Steuergitter, die Wirkung des Raumladungsgitters soll im Durchgriff D berücksichtigt sein. Die hochohmigen Gitterableitwiderstände bezeichnen wir mit R_1 und R_2 . Dann gilt für die Gitterspannung

$$\begin{aligned} U_{g1} &= U_{01} + R_1 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot J \quad \text{und} \\ U_{g2} &= U_{02} + R_2 \cdot \alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot J. \end{aligned} \quad 3)$$

Als Abkürzung werden wir $R \cdot \alpha \cdot \gamma = c$ setzen. Mit U_0 bezeichnen wir die konstante Gittervorspannung und wählen sie bei beiden Röhren gleich. $c \cdot J$ bedeutet die Änderung des Gitterpotentials bei eingeschalteter Röntgenstrahlung. (Die Vorzeichen der Spannungen werden vorläufig nicht berücksichtigt.) Die Faktoren c betrachten wir zunächst als konstant. Somit ergeben sich die Anodenströme zu

$$\begin{aligned} i_{a1} &= s_1 \cdot U_0 + s_1 \cdot c_1 \cdot J + s_1 \cdot D_1 \cdot U_{a1} \quad \text{und} \\ i_{a2} &= s_2 \cdot U_0 + s_2 \cdot c_2 \cdot J + s_2 \cdot D_2 \cdot U_{a2}. \end{aligned} \quad 4)$$

Wie aus der Schaltung ersichtlich ist, liegt am Galvanometer die Differenz der beiden Anodenspannungen $U_{a1} - U_{a2}$. Die Kompensationsbedingungen, d. h. die Bedingungen für die Unabhängigkeit des Galvanometerstromes von der einfallenden Strahlungsintensität bzw. den Batteriespannungen, lassen sich dann folgendermassen formulieren:

$$\frac{\partial i_G}{\partial J} = 0; \quad \frac{\partial i_G}{\partial E_a} = 0; \quad \frac{\partial i_G}{\partial U_0} = 0. \quad 5)$$

Wenn wir bei der obigen Schaltung für die Stromverzweigungen die KIRCHHOFF'schen Gesetze anwenden, und die unter 4. angeführten Röhrgleichungen hinzunehmen, erhalten wir folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \text{a) } i_{r1} &= i_{a1} + i_G & \text{b) } i_{r2} + i_G &= i_{a2} + \frac{U_{a2}}{q} \\ \text{c) } i_G &= \frac{U_{a1} - U_{a2}}{r_G} & \text{d) } U_{a1} &= \frac{i_{a1} - s_1 U_0 - s_1 c_1 J}{s_1 D_1} \\ \text{e) } U_{a2} &= \frac{i_{a2} - s_2 U_0 - s_2 c_2 J}{s_2 D_2} \\ \text{f) } \frac{E_a - U_{a1}}{r_1} &= i_{r1} & \text{g) } \frac{E_a - U_{a2}}{r_2} &= i_{r2}. \end{aligned} \quad 6)$$

In diesen Gleichungen bedeutet i_G den Galvanometerstrom, r_1 und r_2 sind Widerstände im Anodenkreis und ϱ ein Parallelwiderstand zur Röhre 2. Wir sehen: der Kreis ist vollständig definiert (7 Unbekannte: U_{a1} , U_{a2} , i_{a1} , i_{a2} , i_{r1} , i_{r2} , i_G). Drücken wir i_G als Funktion der als bekannt vorausgesetzten Grössen aus, so erhalten wir:

$$i_G = \frac{E_a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) - U_0 \left(\frac{s_1 \cdot r_1}{n} - \frac{s_2 \cdot r_2}{N} \right) + J \left(\frac{s_2 \cdot c_2 \cdot r_2}{N} - \frac{s_1 \cdot c_1 \cdot r_1}{n} \right)}{\frac{r_1}{n} + r_G + \frac{r_2}{N}} \quad 7)$$

wobei n an Stelle von $1 + r_1 \cdot s_1 \cdot D_1$ und N für $1 + r_2 s_2 D_2 + \frac{r_2}{\varrho}$ gesetzt ist. Wenn wir die Bedingungen 5) zunächst für die Kompensation der Anodenbatterie E_a und der Batterie für die Gittervorspannung U_0 auf diesen Ausdruck anwenden, so verlangen diese, dass die Koeffizienten von E_a und U_0 verschwinden, d. h.:

$$s_1 \cdot r_1 \cdot D_1 = s_2 \cdot r_2 \cdot D_2 + \frac{r_2}{\varrho} = s_1 r_{10} D_1 \text{ und } s_1 \cdot r_1 = s_2 \cdot r_2 = s_1 \cdot r_{10}. \quad 8)$$

Wir sehen jetzt, dass der Widerstand ϱ zum Ausgleich der verschiedenen Durchgriffe dient, während r_1 und r_2 die Ungleichheit der Steilheiten kompensieren. Die Kompensationsbedingungen bestimmen also das Verhältnis der beiden Anodenwiderstände r_1/r_2 und das Verhältnis r_2/ϱ . Bei der gleichen Röhrentype wird das erste Verhältnis nahezu gleich 1 und das zweite ung. $\pm 0,1$. Im kompensierten Zustand lautet also die Empfindlichkeitsformel 7):

$$i_G = \frac{(\alpha_2 \cdot R_2 \gamma_2 - \alpha_1 R_1 \gamma_1) \cdot s_1 \cdot J}{\left(\frac{r_G}{r_{10}} + \frac{r_{20}}{r_{10}} + 1 \right) + s_1 \cdot D_1 \cdot r_G} \quad 9)$$

Die Indizes $_0$ weisen auf den kompensierten Zustand hin.

Diskussion der Empfindlichkeitsformel.

Obiger Ausdruck i_G in Funktion von r aufgetragen stellt eine monoton gegen einen Grenzwert strebende Kurve dar. Es ist klar, dass sie für sehr grosse r nicht der Wirklichkeit entspricht, würde das doch bedeuten, dass für $r = \infty$ (keine Anodenspannung) die maximale Empfindlichkeit vorhanden wäre. Die Grenze der Gültigkeit unserer Formel ist offenbar dadurch gegeben, dass bei kleinen Steuerspannungen ($V_{st} = U_g + D \cdot U_a$) die Steilheit rapid abfällt und bei $V_{st} = 0$ verschwindet.

Um die maximal erreichbare Empfindlichkeit der Apparatur zu bekommen, untersuchen wir die Gültigkeitsgrenze des oben

gefundenen Ausdruckes für beide Verstärkerhälften. Da die Gitterspannung U_g nicht vom Anodenwiderstand abhängt, drücken wir zunächst die Anodenspannung U_{a1} in Funktion des äusseren Anodenwiderstandes r aus. Für die folgenden Rechnungen setzen wir den kompensierten Zustand voraus und setzen, da bei dieser Betrachtung kleine Ungleichheiten keine Rolle spielen, die Steilheiten, Durchgriffe und Anodenwiderstände gleich:

$$s_1 = s_2 = s; \quad D_1 = D_2 = D; \quad r_1 = r_2 = r; \quad \varrho = \infty.$$

Nach Formel 4) berechnen sich die Anodenströme

$$\begin{aligned} i_{a1} &= s (U_0 + U_{x1} + D U_{a1}) \\ i_{a2} &= s (U_0 + U_{x2} + D U_{a2}) \end{aligned}$$

wobei U_{x1} und U_{x2} für die von der Röntgenstrahlung hervorgerufenen Spannungsabfälle $c_1 J$ und $c_2 J$ gesetzt ist.

Die Formeln 6) liefern etwas umgeformt:

$$\begin{aligned} U_{a1} &= E_a - r (i_{a1} + i_G) \\ U_{a2} &= E_a - r (i_{a2} - i_G) \end{aligned} \quad \text{und c) } \frac{U_{a1} - U_{a2}}{r_G} = i_G.$$

Nach Auflösung erhält man:

$$U_{a1} = \frac{\frac{E_a}{r} - i_G - s U_0 - s U_{x1}}{\frac{1}{r} + s D}$$

und

$$U_{a2} = \frac{\frac{E_a}{r} + i_G - s U_0 - s U_{x2}}{\frac{1}{r} + s D}.$$

Setzen wir in diese Ausdrücke die vereinfachte Formel 9):

$$i_G = \frac{s (U_{x2} - U_{x1})}{\frac{r_G}{r} + s D r_G + 2} \quad 9a)$$

so erhalten wir schliesslich nach passender Ordnung:

$$\begin{aligned} U_{a1} &= \frac{r (-r_G s^2 D U_0 - 2 s U_0 - r_G s^2 D U_{x1} - U_{x1} s - U_{x2} s)}{r (r_G s^2 D^2 + 2 s D) + \frac{1}{r} (r_G) + (2 r_G s D + 2)} + \\ &+ \frac{\frac{1}{r} (E_a r_G) + (E_a r_G s D + 2 E_a - r_G s U_0 - r_G s U_{x1})}{r () + \frac{1}{r} () + ()} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$U_{a2} = \frac{r(-r_G s^2 D U_0 - 2s U_0 - r_G s^2 D U_{x2} - s U_{x1} - s U_{x2})}{r(r_G s^2 D^2 + 2s D) + \frac{1}{r}(r_G) + (2r_G s D + 2)} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{r}(E_a r_G) + (E_a r_G s D + 2E_a - r_G s U_0 - r_G s U_{x2})}{r(\quad) + \frac{1}{r}(\quad) + (\quad)}. \quad 10)$$

Wie ersichtlich, unterscheiden sich die beiden Ausdrücke lediglich dadurch voneinander, dass die U_{x1} mit den U_{x2} vertauscht sind.

Die Kurve hat folgenden Charakter:

$$U_a = \frac{r \cdot A + 1/r \cdot B + C}{r \cdot M + 1/r \cdot N + O} = \frac{r^2 A + r C + B}{r^2 M + r O + N}.$$

Uns interessiert der Kurvenzweig für positive r . Setzen wir $D = 1$; $s = 3 \cdot 10^{-5}$ A/V; $E_a = 6$ V; $U_0 = -4,5$ V; $r_G = 10^4$ V/A; $U_{x1} = 0,4$ V; $U_{x2} = 0,2$ V, so erhalten wir für die Konstanten: $A = 29,34$ Amp.; $B = 6 \cdot 10^4$ V²/A; $C = 15$ V; $M = 7 \cdot 10^{-5}$ A/V; $N = 10^4$ V/A; $O = 2,6$.

Die Steuerspannung setzt sich aus der so berechneten Anodenspannung und der Gitterspannung zusammen $U_{st1} = U_0 + U_{x1} + D_1 U_{a1}$. Wir stellen nun die Bedingung, dass die Steuerspannung den Wert 0,5 Volt nicht unterschreiten darf, in der Annahme, dass bei niedrigen Spannungen die Steilheit nicht mehr konstant bleibt. Mathematisch:

$$U_{st} \geq 0,5 \text{ Volt}$$

Grenzfall: $U_0 + U_{x1} + D \cdot U_{a1} = 0,5$ Volt; bei $D = 1$:

$$U_{a1} = -U_0 - U_{x1} + 0,5 = 4,5 - 0,4 + 0,5 = 4,6 \text{ V.}$$

Dieser Wert wird nun in die oben gefundene Gleichung 10) eingesetzt und der Grenzwiderstand $r_{\max}$ errechnet. Es ergibt sich,

$$r_{\max} = 1,23 \cdot 10^5 \text{ Ohm.}$$

Wir haben gesehen, dass sich die Formeln 10) für die beiden Verstärkerteile nur in den U_x unterscheiden; wir nehmen den ungünstigsten Fall und setzen $U_{x2} = 0$ und $U_{x1} = 0,4$, setzen wie vorhin $U_{st} = 0,5$ Volt, U_{a2} wird dann $-U_0 + 0,5 = 5$ Volt.

Die Konstanten werden

$A' = 30,3$ Amp; $C' = 15,12$ Volt; N, B, M, O bleiben unverändert.

Es berechnet sich

$$\underline{r_{\max} = 9,05 \cdot 10^4 \text{ Ohm}} \quad r_G = 10^4 \text{ Ohm.}$$

Dieser letztere Wert von r ist massgebend für das Abbrechen der Empfindlichkeitskurve. Wir wollen noch einen zweiten Fall untersuchen, nämlich den, wo das Galvanometer allein ohne Vorschaltwiderstand benützt wird:

$$r_G = 50 \text{ Ohm.}$$

Dann werden die Konstanten im Falle $U_{x1} = 0,4$; $U_{x2} = 0$;

$$A'' = 25,8 \cdot 10^{-5} \text{ Amp. } B'' = 300 \text{ V}^2/\text{A, } C'' = 12,02 \text{ Volt,}$$

$$M'' = 6 \cdot 10^{-5}, \text{ A/V, } N'' = 50 \text{ V/A, } O'' = 2,0.$$

Wir finden:

$$\underline{r_{\max} = 4,925 \cdot 10^4 \text{ Ohm}} \quad r_G = 50 \text{ Ohm.}$$

Der Übersicht halber wird jetzt der wirkliche Verlauf der Verstärkerempfindlichkeit in Funktion des Anodenwiderstandes aufgetragen.

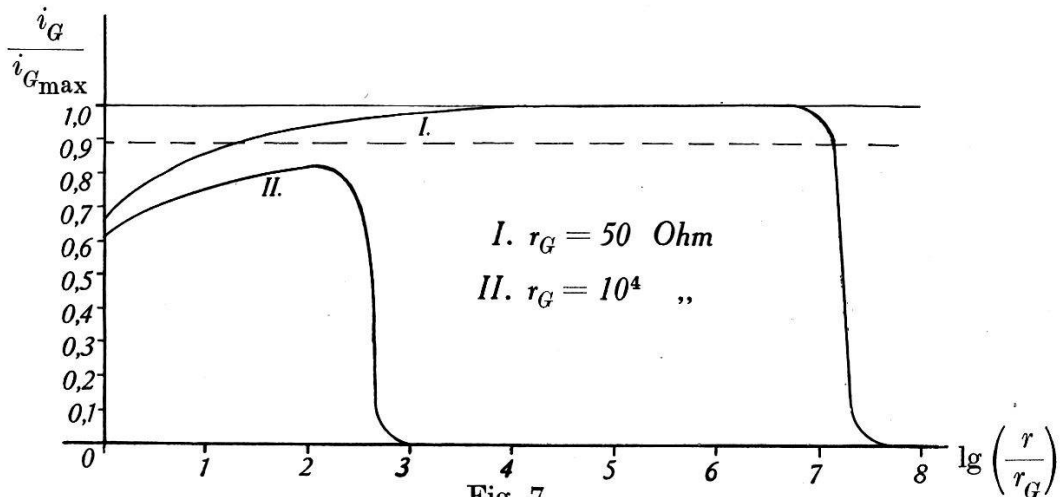


Fig. 7.

Verstärkerempfindlichkeit in Funktion des Anodenwiderstandes
für $r_G = 10^4 \text{ Ohm}$ und $r_G = 50 \text{ Ohm}$.

Wir sehen, dass die maximale Empfindlichkeit, nämlich

$$i_{G \max} = \frac{s (U_{x2} - U_{x1})}{2} = s' (U_{x2} - U_{x1})$$

im Falle $r_G = 50 \text{ Ohm}$ praktisch vollständig herausgeholt werden kann und mit einem Vorschaltwiderstand von $10\,000 \text{ Ohm}$ auch bis 84% erreichbar ist. Der Nenner 2 rührt von der Brückenschaltung von zwei gleichen Elementen her, und ist unvermeidlich.

Wie oben bemerkt bestimmen die Kompensationsbedingungen das *Verhältnis* der in der Apparatur verwendeten Widerstände. Ihre *Grösse* bestimmt man je nach der erforderlichen Empfind-

lichkeit bis zur angegebenen Grenze. Dabei ist folgendes zu beachten: Es ist angenehm, wenn mit Variation der Widerstände der jeweilige Empfindlichkeitsgrad den Messbedingungen (Registrierapparatur, Grösse des zu messenden Effektes, usw.) angepasst werden kann. Ausserdem erweist sich als zweckmässig, wegen der unvermeidlichen Quantenschwankungen die Empfindlichkeit einzuschränken.

Aus diesen Gründen wird nicht im horizontalen Teil, sondern im ansteigenden Teil der Empfindlichkeitskurve gearbeitet. So wurden für die Anodenwiderstände 5000 Ohm Radio-Drehwiderstände verwendet und der Galvanometervorschaltwiderstand zu 10 000 Ohm bestimmt. ϱ ergab sich zu 1 Megohm. Dadurch wird die Apparaturempfindlichkeit

$$i_G \approx \frac{s (U_{x2} - U_{x1})}{4,3}.$$

Kompensation der Röntgenstrahlschwankungen.

Wir sehen aus der Formel für den Galvanometerstrom Nr. 9), dass der Ausschlag des Instrumentes proportional dem Ausdruck $(\alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot R_2 - \alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot R_1) J$ ist. Hier sind α_1 und α_2 durch Verstellung der Kammerspalte regulierbar. Für eine bestimmte, zu untersuchende Reflexion γ_1 kann man nun (γ_2 ist durch die Reflexion am Monochromatorkristall konstant) die Kammerspalte so einstellen, dass der Klammerausdruck zu 0 wird: $\alpha_{10} \cdot \gamma_1 \cdot R_1 = \alpha_{20} \cdot \gamma_2 \cdot R_2$; die Indices 0 weisen wiederum auf den kompensierten Zustand hin. Dadurch ist für diese Reflexion die Kompensation des einfallenden Röntgenstrahles erreicht, das Galvanometer ist dauernd stromlos. Tritt am Messkristall nun eine Änderung des Reflexionsvermögens um $\Delta \gamma_1 = \gamma_1' - \gamma_1$; (γ_1' = das neue Reflexionsvermögen) auf, so zeigt sich diese als Ausschlag proportional zu:

$$i_G \sim \Delta \gamma_1 \cdot \alpha_{10} \cdot R_1 \cdot J.$$

Wir sehen, dass es nicht gelungen ist die Schwankungen des einfallenden Röntgenstrahles ΔJ auch in diesem, veränderten Reflexionszustande auszuschalten, vielmehr treten sie proportional dem Ausschlag zum Vorschein. Nun ist aber in Wirklichkeit dieser Ausschlag im Vergleich zum Gesamtausschlag klein (einige%), so dass die Apparatur die von der Spannungsschwankung herührenden Strahlschwankungen in diesem Verhältnis herabsetzt, wie aus den Registrierungen deutlich ersichtlich ist. Es ist noch

zu bemerken, dass die Kompensation der Schwankungen noch die Gleichheit der beiden Zeitkonstanten $R_1 \cdot c_{01} = R_2 \cdot c_{02}$ erfordert. c_0 ist die Kapazität der Gitterleitung gegen die Kathode. c_{02} wurde durch ein verstellbares Scheibchen im Röhrengefäß variiert.

Die Tatsache, dass wir mit der oben beschriebenen Subtraktionsmethode jeweils nur für *einen* Reflektionspunkt kompensieren können, bedeutet also für die vorliegenden Messungen keinen Mangel. Es ist aber denkbar, dass Probleme auftreten, bei welchen es erwünscht ist, dass wir für die gesamte Reflektionskala die Strahlschwankungen ausschalten. Deshalb, obwohl hier nicht verwendet, wollen wir die Kompensation mit der Quotientenmethode kurz veranschaulichen.

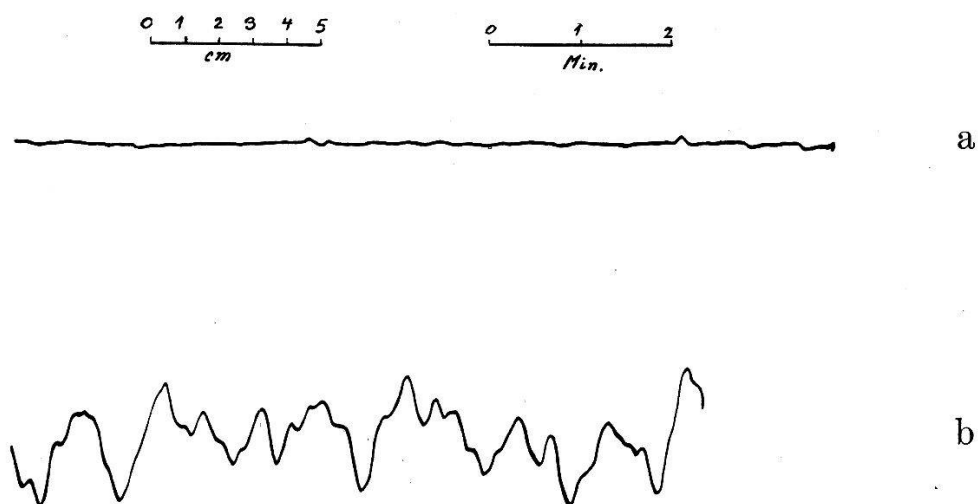


Fig. 8.

Registrierung a) Verstärker allein, ohne Röntgenstrahlung. Die kleinen Stöße sind durch radioaktive Wandstrahlung verursacht.

b) mit Röntgenstrahlung (Reflexionsintensität 100 cm) unkompensiert
Schwankungen bis 3,5%.

(Eine Registrierung im kompensierten Zustand ist aus dem Diagramm der Intensitätsänderung an Eis Nr. V. ersichtlich. Dort ist die Reflexionsintensität 150 cm, es sind nur Quantenschwankungen vorhanden.)

Vollständige Kompensation.

Erreichen wir, dass die beiden Ionisationsströme proportional verstärkt werden, so gibt ihr Quotient einen Ausdruck, der für *alle* Reflexionsintensitäten unabhängig vom einfallenden Röntgenstrahl J ist. Als Quotientenmesser lassen sich Kreuzspulinstrumente verwenden. Nachstehende Schaltung verwirklicht so eine proportionale Verstärkung.

Bei dieser Schaltung sehen wir von einer Kompensation der Batterien ab. Sie ergibt sich nicht ohne weiteres aus der

Schaltung für die Kompensation der Röntgenstrahlen, wie es bei der vorhergehenden Schaltung der Fall war. Würde sich eine solche in praxi als nötig erweisen, liesse sich die vorliegende Schaltung leicht erweitern¹⁾.

Für das Ersatzschema können wir wieder die KIRCHHOFF'schen Gesetze anwenden, dabei fassen wir die Verstärkerröhre als Widerstand auf und definieren ihn $1/sD$. Der Strom i_5 bedeutet den von der Anodenspannung unabhängigen Anteil des Anodenstromes,

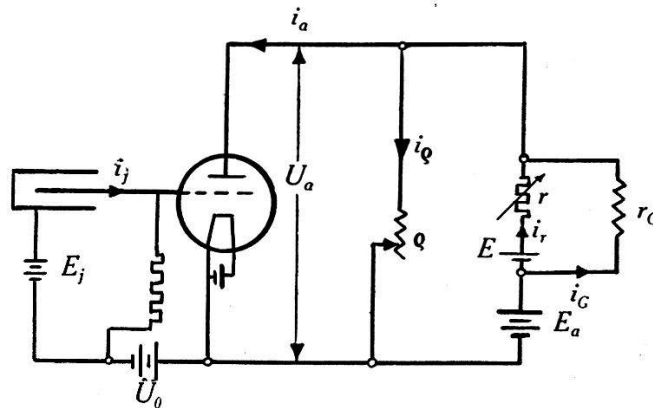


Fig. 9.

Einröhrenverstärker.

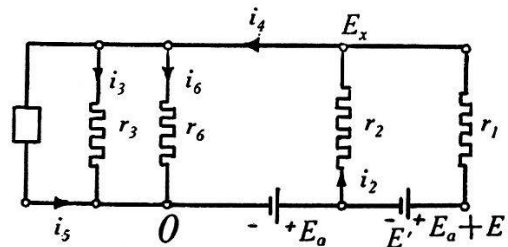


Fig. 10.

Ersatzschema.

$$i_a = i_5 + i_3; \quad i_g = i_6; \quad i_G = i_2; \quad i_r = i_1.$$

er ist gleich $i_5 = s \cdot U_0 + s \cdot c \cdot J$. Es ergeben sich folgende sechs Gleichungen:

- 1) $E_a + E' - E_x = r_1 \cdot i_1$
- 2) $E_a - E_x = r_2 \cdot i_2$
- 3) $E_x = r_3 \cdot i_3$
- 4) $E_x = r_6 \cdot i_6$
- 5) $i_4 = i_5 + i_3 + i_6$
- 6) $i_4 = i_1 + i_2$

Unbekannt sind $i_1, i_2, i_3, i_4, i_6, E_x$

Bekannt sind $r_1, r_2, r_3, r_6, E_a, E', i_5$.

¹⁾ Siehe: Batteriekompensation bei FP Plotron-Röhren von TURNER und SIEGELIN, Rev. Sci. Instr. 4, 429, 1933.

Uns interessiert der Galvanometerstrom i_2 . Lösen wir die Gleichungen nach diesem auf, und setzen die im Schaltungs-
schema geltenden Beziehungen wieder ein, so folgt:

$$i_G = \frac{E_a \left(s D + \frac{1}{\varrho} \right) - E' \frac{1}{r} + s \cdot U_0 + s \cdot c \cdot J}{1 + \frac{r_G}{r} + s \cdot D \cdot r_G + \frac{r_G}{\varrho}}.$$

Die Bedingung für proportionale Verstärkung ($i_G \sim J$) lautet

$$r = \frac{E'}{s \left(E_a \cdot D + \frac{E_a}{s \varrho} + U_0 \right)}.$$

Im Gegensatz zur vorhergehenden Schaltung ist hier der Widerstand ϱ zur Kompensation nicht notwendig, er gestattet nur, dass der Abgleichwiderstand r je nach der Gittervorspannung und dem Durchgriff innerhalb praktischer Grenzen bleibt. So wird z. B. bei einer Anodenspannung $E_a = 6$ V, $D = 1$, $U_0 = -4,5$ V, $s = 3 \cdot 10^{-5}$ Amp/V, $\varrho = 10^4$ V, der Regulierwiderstand $r = 3100$ Ohm. Sorgen wir dafür, dass r und ϱ gross sind gegen r_G (Widerstand der Spule des Kreuzspulinstrumentes), dann wird der Nenner annähernd gleich 1 und es ergibt sich schliesslich für den Instrumentenstrom:

$$\underline{i_G} = s \cdot c \cdot J = \underline{s \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot R \cdot J}$$

also ist er dem einfallenden Strahl proportional. Der Ausschlag des Kreuzspulinstrumentes ist dem Quotienten der Spulenströme proportional.

$$Q = \frac{i_{G1}}{i_{G2}} = \frac{s_1 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot R_1}{s_2 \cdot \alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot R_2} \text{ unabhängig von } J.$$

α_1 und α_2 , R_1 und R_2 lassen sich so einstellen, dass im stationären Falle $Q = 1$ ist. Erfährt γ_1 eine Änderung um $\frac{\gamma_1' - \gamma_1}{\gamma_1} = X$ Prozent, so zeigt das Instrument $Q = 1 + \frac{X}{100}$. Die Ströme sind von der Grössenordnung 10^{-4} Amp.

Sollte es sich praktischer erweisen, eine grössere Quotientenänderung (Empfindlichkeit) zu bekommen, so lässt sich eine solche erreichen, jedoch auf Kosten der Ströme, die dann rund 100-mal kleiner werden. Die Kombination der beiden behandelten Schaltungen in der folgenden Dreiröhren-Schaltung verwirklicht diese Forderung.

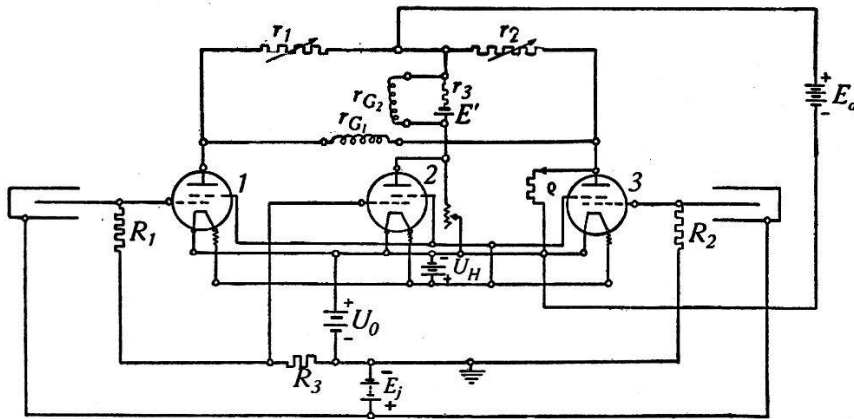


Fig. 11.

Dreiröhren-Schaltung.

Der Quotient wird im kompensierten Zustand $Q \sim \frac{R_1(\gamma_1' - \gamma_{10})}{R_3(\gamma_{10})}$: es ist nun möglich diesen Ausschlag durch die Wahl des Faktors R_1/R_3 zu vergrössern, indem man z. B. den Gitterableitwiderstand der dritten Röhre R_3 100-mal kleiner als R_1 macht. Bei all diesen Rechnungen ist natürlich wieder von Fall zu Fall zu berücksichtigen, wie weit es — wegen der Quantenschwankungen — zweckmässig ist die Empfindlichkeit zu steigern. Auch muss abgewogen werden, ob das Kreuzspulinstrument mit relativ grossen Strömen und hoher Quotientenempfindlichkeit leichter herzustellen ist, oder ein solches mit kleinerer Quotientenempfindlichkeit, dafür aber mit geringeren Strömen.

Eichung des Galvanometers.

Sie ergab für die Stromempfindlichkeit des benützten Galvanometers im offenen Zustand

$$\lambda_0 = 484,3 \text{ mm}/\mu \text{ Amp}$$

$$\lambda_{ap} = 467 \text{ mm}/\mu \text{ Amp}$$

mit aperiodischem Shunt (1090 Ohm)

bei einem Skalenabstand $s = 166 \text{ cm}$.

VI. Berechnung der Quantenschwankungen.

Ausser den oben behandelten Schwankungen, die sich praktisch fast vollständig beseitigen lassen, treten solche auf, die von der quantenhaften Absorption der Röntgenstrahlung herühren. Diese wurden von WASASTJERNA¹⁾ zum ersten Mal eingehend untersucht, sie ermöglichten ihm die Errechnung des PLANCK'schen Wirkungsquantums. Sie lassen sich ihrem Wesen

¹⁾ Natur d. Röntgenstrahlung, Helsingfors 1928.

nach nicht kompensieren, denn es handelt sich in beiden Ionisationskammern um unabhängige statistische Vorgänge. Ähnliche Probleme stellen sich vor allem im Zusammenhang mit der BROWN'schen Bewegung und dem Schroteffekt. Von verschiedenen Autoren wurde die mittlere quadratische Schwankung errechnet bei verschiedenen Voraussetzungen bezüglich der Dämpfung. ORNSTEIN¹⁾, DE HAAS-LORENZ²⁾ haben die BROWN'sche Bewegung, SCHOTTKY³⁾, ORNSTEIN-BURGER⁴⁾ haben den Schroteffekt untersucht; ZERNIKE⁵⁾ hat die Galvanometerschwankungen als natürliche Beobachtungsgrenze der Stromstärke ermittelt. STAUB⁶⁾ hat die Quantenschwankungen von Röntgenstrahlen im Falle der Galvanometerdämpfung allein errechnet.

Wir wollen nun diese für unsere obige Schaltung errechnen.

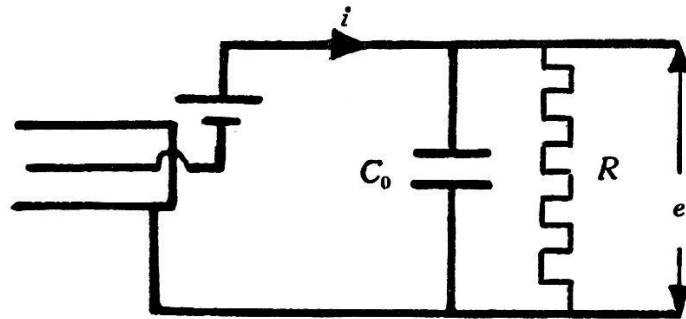


Fig. 12.
Ersatzschema.

Zur Bildung eines Ionenpaares wird im Argon nach GAERTNER⁷⁾ 29,6 Voltelektronen Energie verbraucht; dem entspricht $47 \cdot 10^{-12}$ erg. Ein Ionenpaar führt die Ladung: $2 \cdot 1,59 \cdot 10^{-19} = 3,18 \cdot 10^{-19}$ Coulb.

Ein Lichtquant der Kupfer K_{α} -Strahlung

$$\lambda = 1,54 \text{ \AA}, \quad \nu = 1,95 \cdot 10^{18} \text{ sek}^{-1}$$

hat die Energie

$$h \cdot \nu = 1,28 \cdot 10^{-8} \text{ erg},$$

bei vollständiger Photoabsorption macht also ein Photon

$$\frac{1,28 \cdot 10^{-8}}{47 \cdot 10^{-12}} = 272 \text{ Ionenpaare oder}$$

$$1 h \nu_{\text{Cu}K_{\alpha}} \therefore 8,55 \cdot 10^{-17} \text{ Coulomb.}$$

¹⁾ ORNSTEIN, Proc. Amsterdam **21**, 96, 1919.

²⁾ DE HAAS-LORENZ, Diss., Die Brown'sche Bewegung 1913.

³⁾ SCHOTTKY, Ann. de Phys. **57**, 541, 1918.

⁴⁾ ORNSTEIN-BURGER, Ann. de Phys. **70**, 622, 1923.

⁵⁾ ZERNIKE, Zeitschr. f. Phys. **60**, 628, 1927.

⁶⁾ STAUB, Helv. Phys. Acta **7**, 1, 1934.

⁷⁾ GAERTNER, Ann. d. Phys. **2**, 94, 1929.

Wir wollen das mittlere Schwankungsquadrat zunächst für den oben dargestellten aperiodischen Kreis ermitteln, wir setzen also das Galvanometer vorläufig trägheitslos voraus. Da wir die Steilheit der Röhre konstant angenommen haben, können wir einfach die Schwankungen am Gitter berechnen. Obwohl es offenbar keinen Sinn hat von einer definierten Schwankung des Primärstromes (Ionisationsstromes) zu reden, ist es bei einem gedämpften Kreis nun möglich das mittlere Schwankungsquadrat anzugeben. Die Stromschwankungen entstehen dadurch, dass in gleichen Zeitabschnitten verschiedene Anzahl Ionenpaare zur Messung gelangen. Ein gedämpfter Kreis siebt nun, wie wir sehen werden, nach seiner Zeitkonstante eine bestimmte mittlere Anzahl dieser Quanten aus dem Strom, und nach der Statistik ist das mittlere Schwankungsquadrat dieser Anzahl jetzt festgelegt.

Der Kreis ist definiert durch die Gleichung

$$c_0 \cdot \dot{e} + \frac{1}{R} e = i,$$

wobei R den Gitterableitwiderstand, c_0 die Ersatzkapazität der Gitterleitung, Nadel und des Gitters gegen die Kathode; i den Ionisationsstrom und e die Spannung am Widerstand bedeuten. Wir multiplizieren diese Gleichung mit e und schreiben dabei für $e\dot{e} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2)$

$$c_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2) + \frac{1}{R} e^2 = i \cdot e.$$

Wenn wir das zeitliche Mittel dieser Gleichung bilden und beachten, dass dieser Mittelwert bei einem zeitlichen Differentialquotienten einer endlichen und stetigen Funktion der Zeit verschwindet, erhalten wir:

$$\frac{1}{R} \overline{e^2} = \overline{i \cdot e}.$$

Der Strom i kommt dadurch zustande, dass im Mittel n Lichtquanten in der Zeiteinheit in der Kammer absorbiert werden. Es gilt also:

$$\bar{i} = n \cdot q \text{ und } \bar{e} = R \cdot \bar{i} = R \cdot n \cdot q,$$

wenn q die durch ein Lichtquant ausgelöste Elektrizitätsmenge bedeutet. Um den Wert $\overline{i \cdot e}$ auszurechnen, machen wir die Voraussetzung, dass keine Koinzidenzen stattfinden. Wir integrieren

dann die Gleichung zwischen der Zeit 0 (Anfang eines Stosses) und t (zwischen 0 und Δ), wenn Δ die Dauer eines Stosses ist.

$$c_0 \cdot e = \int_0^t i \cdot dt + c_0 \cdot e_0.$$

Da wir Koinzidenzen ausgeschlossen haben, dürfen wir die zeitliche Mittelung so ausführen, dass wir zunächst über einen Stoss integrieren und dann alle n -Stösse addieren. Die Gleichung wiederum mit i multipliziert und über die Stossdauer integriert ergibt:

$$c_0 \int_0^\Delta i \cdot e \cdot dt = \int_0^\Delta i \cdot dt \int_0^t i \cdot dt + c_0 e_0 \int_0^\Delta i \cdot dt = q^2 + c_0 \cdot e_0 \cdot q.$$

Der zeitliche Mittelwert wird schliesslich

$$c_0 \frac{1}{T} \sum_n \int_0^\Delta i \cdot e \cdot dt = \overline{i \cdot e} \cdot c_0 = q^2 \cdot n + c_0 \cdot n^2 \cdot q^2 \cdot R$$

oder mit den obigen Bezeichnungen

$$\overline{i \cdot e} = \frac{q \cdot \bar{i}}{c_0} + \bar{i}^2 \cdot R$$

und

$$\underline{\overline{e^2} = q \cdot \frac{R}{c_0} \bar{i} + \bar{e}^2.}$$

Nach der gefundenen Formel lässt sich der Momentanwert der Spannung in zwei Teile zerlegen:

$$e = \bar{e} + \delta e,$$

wobei δe den Momentanwert der Schwankung bedeutet. ($\overline{\delta e} = 0$), dann ist

$$\overline{e^2} = \overline{(\bar{e} + \delta e)^2} = \bar{e}^2 + 2 \cdot \bar{e} \cdot \overline{\delta e} + \overline{\delta e^2} = \bar{e}^2 + \overline{\delta e^2}.$$

Der quadratische Mittelwert der Spannungsschwankungen ist also

$$\underline{\overline{\delta e^2} = q \cdot \frac{R}{c_0} \cdot \bar{i}.}$$

Wir definieren als relative Schwankung den Wert $\frac{\sqrt{\overline{\delta e^2}}}{\bar{e}}$. Dieser wird

$$\underline{\frac{\sqrt{\overline{\delta e^2}}}{\bar{e}} = \sqrt{\frac{q}{\bar{i} \cdot R \cdot c_0}}.}$$

Zu diesem Resultat sind wir gelangt ohne den Ausdruck: „Stromschwankungen“ definiert zu haben. Nun lässt sich diesem nach der Statistik ein Sinn zuteilen.

Es gilt ganz allgemein:

$$\overline{\delta m^2} = \overline{m},$$

wenn $\overline{m}$ die mittlere Stosszahl in einem bestimmten Zeitintervall bedeutet. Wir haben gesehen, dass die mittlere Stosszahl pro Sekunde $\overline{n} = \frac{\bar{i}}{q}$ ist. Führen wir die Mittelung statt für eine, für $R \cdot c_0$ Sekunden aus, so ist $\overline{m} = R \cdot c_0 \cdot \overline{n} = R \cdot c_0 \cdot \frac{\bar{i}}{q}$, daher

$$\frac{\sqrt{\overline{\delta m^2}}}{\overline{m}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}} = \sqrt{\frac{q}{\bar{i} \cdot R \cdot c_0}}$$

unser obiges Resultat. Der Kreis führt quasi eine Mittelung alle $R \cdot c_0$ Sekunden aus, womit die oben angeführte Behauptung bestätigt ist.

Wir führen die numerische Rechnung zunächst für den Kreis 1 durch. Die Integration der Grundgleichung ergibt für den Einschaltvorgang:

$$e = i_{\infty} \cdot R \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot c_0}} \right).$$

Durch Messung zusammengehörender Werte e und t , lässt sich die Zeitkonstante $R \cdot c_0 = 19,6$ Sek. bestimmen. Dadurch ist, da R_1 bekannt, c_{01} bestimmt

$$R_1 = 7,31 \cdot 10^{11} \text{ Ohm} = 8,05 \cdot 10^{-1} \text{ s/cm}$$

$$c_{01} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 24,3 \text{ cm.}$$

Die Schwankungen werden für 100 cm Galvanometerauschlag berechnet. Dieser entspricht gemäss Eichung:

$$i_G = 2,145 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 2,145 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$$

Aus der Empfindlichkeitsformel Nr. 9) folgt für $r_G = 10^4 \text{ Ohm}$ $r_1 \sim r_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Ohm}$, $s_1 \sim s_2 = 27 \cdot 10^{-6} \text{ Amp/V}$, $D_1 \sim D_2 = 1$; die Gitterspannung U_{x1} :

$$U_{x1} = \frac{\overline{e_1}}{s_1'} = \frac{i_G \cdot 4,27}{s_1} = \underline{\underline{0,337 \text{ Volt}}}$$

der Ionisationsstrom

$$\overline{i_1} = \frac{\overline{e_1}}{R_1} = 4,6 \cdot 10^{-13} \text{ Amp.} = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3/2 \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2}.$$

Der Stromverstärkungsfaktor ist also $\frac{i_G}{i_1} = 4,66 \cdot 10^6$. Das mittlere Schwankungsquadrat wird somit, wenn die Stossladung

$$q = 8,55 \cdot 10^{-17} \text{ Coulb} = 2,57 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$$

$$\overline{\delta e_1^2} = q \cdot \frac{R_1}{c_{01}} \cdot \bar{i}_1 = \underline{1,065 \cdot 10^{-6} \text{ Volt}^2}.$$

Zu diesem müssen wir das mittlere Schwankungsquadrat der zweiten Verstärkerhälfte addieren.

c_{02} ergibt sich aus der Bedingung, dass die beiden Zeitkonstanten im kompensierten Zustand gleich sind, $R_1 \cdot c_{10} = R_2 \cdot c_{20}$;

$$R_2 = 4,77 \cdot 10^{11} \text{ Ohm} = 5,25 \cdot 10^{-1} \text{ s/cm}$$

$$c_{02} = 4,13 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 37,25 \text{ cm}.$$

Wenn das Galvanometer stromlos ist und $s_1 \sim s_2$, so ist

$$\begin{aligned} \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \text{ und } \bar{i}_2 &= \frac{\bar{e}_2}{R_2} = 7,06 \cdot 10^{-13} \text{ Amp} \\ &= 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

und das mittlere Schwankungsquadrat

$$\overline{\delta e_2^2} = \underline{6,96 \cdot 10^{-7} \text{ Volt}^2}$$

das totale Schwankungsquadrat:

$$\overline{\delta e_{\text{tot}}^2} = \overline{\delta e_1^2} + \overline{\delta e_2^2} = \underline{1,76 \cdot 10^{-6} \text{ Volt}^2}.$$

Die relative Schwankung wird somit

$$\underline{\frac{\sqrt{\overline{\delta e_{\text{tot}}^2}}}{\bar{e}_1} = 3,95\% .}$$

Das ist die prozentuale Schwankung an den Steuergittern der Röhren. Bei linearer Verstärkung ist sie zugleich die Schwankung am Galvanometer.

Der ganze Kreis.

Wir haben nun statt dem oben berechneten aperiodischen Kreis mit einer im folgenden Ersatzschema dargestellten Schaltung zu tun. Da die Differentialgleichungen gleich sind, können wir das Galvanometer durch einen gedämpften elektrischen Schwingungskreis darstellen.

Gleichung des Schwingungskreises:

$$\frac{1}{R} \ddot{e} + \frac{1}{L} \dot{e} + \frac{\omega^2}{R} e = \omega^2 i \quad \frac{1}{\omega^2} = L \cdot C = \text{Frequenz des Schwingungskreises.}$$

Gleichung des Galvanometers:

$$\Theta \ddot{x} + p \cdot \dot{x} + f \cdot x = m \cdot i_G;$$

hier ist x der Ausschlagwinkel im Bogenmass gemessen, i_G der Strom, Θ das achsiale Trägheitsmoment, p die Dämpfungskon-

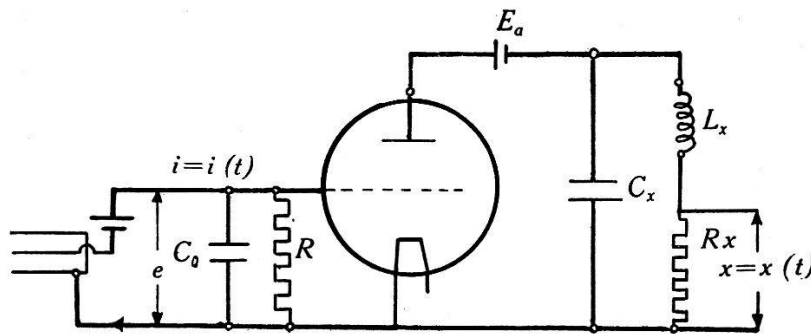


Fig. 13.

Schaltungshälfte mit Galvanometer.

stante, f die Direktionskraft und m die dynamische Galvanometerkonstante, d. h. das Drehmoment für die Stromeinheit. Beide Kreise lassen sich also durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wiedergeben.

Bei der nachfolgenden Rechnung machen wir zwei Voraussetzungen. 1. Die Steilheit der Röhren nehmen wir als konstant an. 2. Wir nehmen an, dass von der Anodenseite keinerlei Rückwirkung auf die Gitterspannung stattfindet. Da der Gitterstrom etwa 100-mal kleiner ist als der Ionisationsstrom, sind wir zu dieser Annahme berechtigt.

Für den Gesamtkreis gelten folgende Zusammenhänge:

1. Galvanometergleichung, wie oben.
2. $c_0 \cdot \dot{e} + \frac{1}{R} e = i$ Aperiodischer Kreis
3. $i_G = e \cdot s'$ Röhrengleichung

Wir können schreiben:

$$\frac{1}{R} e = \frac{i_G}{R \cdot s'} = \frac{1}{m s' \cdot R} (\Theta \cdot \ddot{x} + p \cdot \dot{x} + f \cdot x)$$

$$c_0 \cdot \dot{e} = \frac{i_G \cdot c_0}{s'} = \frac{c_0}{m \cdot s'} (\Theta \cdot \ddot{x} + p \cdot \dot{x} + f \cdot x),$$

somit wird:

$$i = \frac{1}{m \cdot s'} \left[\Theta \cdot c_0 \cdot \ddot{x} + \left(p \cdot c_0 + \Theta \cdot \frac{1}{R} \right) \ddot{x} + \left(f \cdot c_0 + p \cdot \frac{1}{R} \right) \dot{x} + f \frac{1}{R} x \right]$$

Die Gleichung hat die Form:

$$\text{I. } \underline{i = a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x + d \cdot x.}$$

Wir wenden die oben verfolgte Methode zur Ermittlung des mittleren Schwankungsquadrates nun auf diese lineare Differentialgleichung dritten Grades an.

Wir beachten vorher folgende Beziehungen:

$$1. \ x \cdot \ddot{x} = \frac{d}{dt} (x \cdot \dot{x}) - \dot{x} \cdot \dot{x} \quad 2. \ \dot{x} \cdot \ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2)$$

$$3. \ \dot{x} \cdot \ddot{x} = \frac{d}{dt} (\dot{x} \cdot \ddot{x}) - \ddot{x}^2 \quad 4. \ \ddot{x} \cdot \ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ddot{x}^2)$$

$$5. \ x \cdot \ddot{x} = \frac{d}{dt} (x \cdot \dot{x}) - \dot{x}^2 \quad 6. \ x \cdot \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2)$$

$$7. \ \overline{\frac{d}{dt} [f(x)]} = 0.$$

Die Gleichung I. wird nacheinander mit x , mit $\dot{x}$ und mit $\ddot{x}$ multipliziert, die obigen Beziehungen werden passend eingesetzt und dann wird der zeitliche Mittelwert des Ausdruckes gebildet.

Mit x multipliziert ergibt I.

$$a \cdot \ddot{x} \cdot x + b \cdot \dot{x} \cdot x + c \cdot \dot{x} \cdot x + d \cdot x^2 = i \cdot x,$$

anders geschrieben:

$$a \left[\frac{d}{dt} (x \cdot \dot{x}) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) \right] + b \left[\frac{d}{dt} (x \cdot \dot{x}) - \dot{x}^2 \right] + c \frac{d}{dt} (x^2) + d \cdot x^2 = i \cdot x$$

gemittelt:

$$\text{a) } \underline{-b \cdot \overline{\dot{x}^2} + d \cdot \overline{x^2} = \overline{i \cdot x}.}$$

Mit $\dot{x}$ multipliziert:

$$a \left[\frac{d}{dt} (\dot{x} \cdot \ddot{x}) - \ddot{x}^2 \right] + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) + c \cdot \dot{x}^2 + \frac{d}{2} \frac{d}{dt} (x^2) = i \cdot \dot{x}$$

gemittelt:

$$\text{b) } \underline{-a \cdot \overline{\ddot{x}^2} + c \cdot \overline{\dot{x}^2} = \overline{i \cdot \dot{x}}.}$$

Mit $\ddot{x}$ multipliziert:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) + b \cdot \ddot{x}^2 + \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) + d \frac{d}{dt} (x \cdot \dot{x}) - \bar{d} \cdot \dot{x}^2 = i \cdot \ddot{x}$$

gemittelt:

$$c) \quad \underline{b \cdot \overline{\ddot{x}^2} - \bar{d} \cdot \overline{\dot{x}^2} = \overline{i \cdot \ddot{x}}.}$$

Wir integrieren die Ausgangsgleichung (I) analog wie bei dem aperiodischen Kreis über eine Zeit 0 bis t , wo 0 den Anfang eines Stosses und t eine Zeit zwischen 0 und Δ (Stossdauer) ist. Wir erhalten, wenn t klein ist:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = a \cdot \ddot{x}_0 + b \cdot \dot{x}_0 + c \cdot x_0 + \int_0^t i \cdot dt,$$

wo x_0 , $\dot{x}_0$ und $\ddot{x}_0$ den Galvanometerausschlag und seine Ableitungen nach der Zeit am Anfang eines Stosses bedeuten.

Wir multiplizieren mit i und integrieren über einen Stoss

$$\begin{aligned} & a \int_0^{\Delta} \ddot{x} \cdot i \cdot dt + b \int_0^{\Delta} \dot{x} \cdot i \cdot dt + c \int_0^{\Delta} x \cdot i \cdot dt = \\ & = a \ddot{x}_0 \int_0^{\Delta} i \cdot dt + b \cdot \dot{x}_0 \int_0^{\Delta} i \cdot dt + c \cdot x_0 \int_0^{\Delta} i \cdot dt + \int_0^{\Delta} i \cdot dt \int_0^t i \cdot dt = \\ & = a \cdot \ddot{x}_0 \cdot q + b \cdot \dot{x}_0 \cdot q + c \cdot x_0 \cdot q + q^2, \end{aligned}$$

wenn t gegen Δ geht und $\int_0^{\Delta} i \cdot dt = q$ wiederum die durch einen Stoss beförderte Ladung bedeutet.

Wir bilden jetzt den zeitlichen Mittelwert, indem wir über alle n -Stösse der Zeiteinheit summieren. Wenn wir bedenken, dass $\overline{\ddot{x}_0} = \overline{\dot{x}_0} = 0$ und gemäss Gleichung (I) $\overline{x_0} = \frac{\overline{i}}{d} = \frac{n \cdot q}{d}$, so erhalten wir:

$$a \cdot \overline{\ddot{x} \cdot i} + b \cdot \overline{\dot{x} \cdot i} + c \cdot \overline{x \cdot i} = c \cdot \frac{n^2 \cdot q^2}{d} + q^2 \cdot n,$$

oder wenn wir die unter a, b, c gefundenen Beziehungen einsetzen:

$$c \cdot d \cdot \overline{x^2} - a \cdot d \cdot \overline{\dot{x}^2} = c \cdot d \cdot \overline{x^2} + q \cdot \overline{i}.$$

Wir können diesen Ausdruck noch etwas umformen mit Hilfe der Beziehungen:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \overline{\delta x^2} + \overline{x^2} \quad \text{und} \\ \overline{\dot{x}^2} &= \overline{\delta \dot{x}^2}, \quad \text{da} \quad \dot{x} = \delta \dot{x}. \end{aligned}$$

Es wird dann:

$$c \cdot d (\overline{x^2} - \bar{x}^2) - a \cdot d \cdot \overline{\dot{x}^2} = q \cdot \bar{i} \quad \text{oder}$$

$$\text{II. } \underline{c \cdot d \cdot \overline{\delta x^2} - a \cdot d \cdot \overline{\delta \dot{x}^2} = q \cdot \bar{i}.}$$

Folgende Überlegung hilft uns weiter: Wenn wir die Grundgleichung (I) betrachten, die den Zusammenhang zwischen dem totalen Ausschlag und dem *totalen* Ionisationsstrom angibt, bemerken wir, dass für die *Schwankungen* des Galvanometerausschlages und des Stromes völlig die gleiche Beziehung gilt, d. h. wenn wir $x = \delta x + \bar{x}$ und $i = \delta i + \bar{i}$ schreiben. Es gilt also:

$$I') \quad a \cdot \delta \ddot{x} + b \cdot \delta \ddot{x} + c \cdot \delta \dot{x} + d \cdot \delta x = \delta i,$$

δi ist dabei eine statistisch schwankende Grösse, ihr zeitliches Mittel ist Null.

Mme DE HAAS-LORENTZ hat bei der Behandlung der BROWN'schen Bewegung¹⁾ ganz allgemein gezeigt, dass für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung obiger Art die kinetische Energie im Mittel gleich der potentiellen ist, wenn δi eine statistisch schwankende Kraft (Zusammenstösse der Moleküle) und δx die Verschiebung bedeuten. Allgemein gilt also:

$$d) \quad b \cdot \overline{\delta \dot{x}^2} = d \cdot \overline{\delta x^2}.$$

Hier spielt das Dämpfungsglied erster Ordnung keine Rolle. Wir können nun leicht einsehen, dass diese Beziehung auch für unsere Differentialgleichung dritter Ordnung gilt.

Denken wir uns das Glied mit der dritten Ableitung weg, multiplizieren wir die Gleichung I') mit δx und nehmen das zeitliche Mittel, so erhalten wir:

$$-b \cdot \overline{\delta \dot{x}^2} + d \cdot \overline{\delta x^2} = \overline{\delta x \cdot \delta i} = 0$$

nach DE HAAS-LORENTZ. Machen wir dasselbe mit der ganzen Gleichung I'), so erhalten wir (analog Gleichung a) Seite 144) denselben Ausdruck, da das erste Glied bei der Mittelung wegfällt.

Nun setzen wir diese Beziehung d) in die Gleichung II) ein, und erhalten schliesslich für das mittlere Schwankungsquadrat:

$$\overline{\delta x^2} = \frac{q \cdot \bar{i}}{c \cdot d - a \cdot \frac{d^2}{b}}$$

¹⁾ Deutsche Ausgabe S. 83.

und für die relativen Schwankungen im Mittel:

$$\frac{\sqrt{\delta x^2}}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{q}{i \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right)}}.$$

Die Konstanten berechnen sich aus den Daten des aperiodischen Kreises und des Galvanometers, wie folgt:

$$a = \frac{\Theta \cdot c_0}{m \cdot s'} = [cm^{3/2} g^{1/2} s^1]; \quad b = \frac{p \cdot c_0 + \Theta \cdot \frac{1}{R}}{m \cdot s'} = [cm^{3/2} g^{1/2} s^0]$$

$$c = \frac{f \cdot c_0 + p \cdot \frac{1}{R}}{m \cdot s'} = [cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}]; \quad d = \frac{f \cdot \frac{1}{R}}{m \cdot s'} = [cm^{3/2} g^{1/2} s^{-2}].$$

Diskussion des Ergebnisses.

Wir können, wie beim aperiodischen Kreis, auch hier die Schwankungen als, in Zeitabschnitten Z gemittelte, statistische Schwankungen interpretieren. Die Zeitkonstante Z des zusammengesetzten Kreises wird:

$$Z = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{Z_0^2}{Z_0 + \frac{\Theta}{p}} + \frac{p}{f},$$

wo $Z_0 = R \cdot c_0$ die Zeitkonstante des aperiodischen Kreises ist. Um die Schwankungen niedrig zu halten, muss man danach trachten, möglichst grosse Strahlungsintensität in die Kammern zu bekommen und mit einer weichen Strahlung zu arbeiten (i gross, q klein). Wir bemerken ferner, dass die dynamische Galvanometerkonstante m keinen Einfluss auf die relativen Schwankungen hat; dass der Ausdruck für ein trägheits- und dämpfungsloses Galvanometer ($\Theta = 0$, $p = 0$) in den, für den aperiodischen Kreis gefundenen übergeht. Für $c_0 = 0$ (Galvanometerdämpfung allein) erhalten wir den von STAUB (l.c.) angegebenen Ausdruck.

Numerische Rechnung.

a) Berechnung der Galvanometerkonstanten.

Es gelten folgende Zusammenhänge (JÄGER: Elektr. Messtechnik usw.).

$$1. \alpha = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{A_0}{\pi^2 + A_0^2}}} \quad 2. m = \frac{\alpha^2 \cdot R_{ap} \cdot C \cdot T_0}{\pi}$$

$$\begin{array}{ll}
3. \quad f = C \cdot m & 4. \quad \Theta = \frac{T_0^2 \cdot f}{4 \cdot \pi^2} \\
5. \quad p_0 = \frac{4 \cdot \Theta \cdot A_0}{T_0} & 6. \quad p = p_0 + \frac{m^2}{R_{ap}}
\end{array}$$

R_{ap} ist der Totalwiderstand des Kreises im aperiodischen Grenzfall, er ist die Summe des aperiodischen Shuntwiderstandes und des Eigenwiderstandes vom Galvanometer; A_0 ist das logarithmische Dekrement und T_0 die ganze Schwingungsdauer des offenen Galvanometers; α ist bloss eine Rechnungsgrösse, p_0 ist die Dämpfung des offenen Galvanometers. C ist der sogenannte Reduktionsfaktor, gleich der reziproken Galvanometerempfindlichkeit, also

$$R_{ap} = 1090 + 50 = 1140 \text{ Ohm} = \underline{1,25 \cdot 10^{-9} \text{ s/cm}}$$

$$C = 1/\lambda = 2,145 \cdot 10^{-9} \text{ Amp/mm; in Bogenmass umgerechnet: (Skalenabstand} = 166 \text{ cm)}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\lambda} \frac{166}{0,1} = 3,45 \cdot 10^{-6} \text{ Amp/Bogeneinheit} \\
&= \underline{1,07 \cdot 10^4 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2}}
\end{aligned}$$

T_0 und A_0 wurden durch Messungen bestimmt zu:

$$\begin{aligned}
T_0 &= 9,13 \text{ Sek} \\
A_0 &= 0,117 \text{ ,,}
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 1—6 lassen sich die Konstanten berechnen:

$$\begin{aligned}
\Theta &= 0,789 \text{ cm}^2 \text{ g}^1 \\
p &= 1,083 \text{ cm}^2 \text{ g}^1 \text{ s}^{-1} \\
f &= 0,373 \text{ cm}^2 \text{ g}^1 \text{ s}^{-2} \\
m &= 3,63 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2}
\end{aligned}$$

Damit werden für den Messkreis 1 (R_1 , s' , c_{01} wie oben) Seite 141.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 9,32 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^1 \\
b_1 &= 1,32 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \\
c_1 &= 5,1 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \\
d_1 &= 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2}
\end{aligned}$$

und das mittlere Schwankungsquadrat:

$$\underline{\overline{\delta x_1^2} = 3,19 \cdot 10^{-6}}$$

für den Kompensationskreis 2 (R_2 , c_{02} berechnet auf Seite 142)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 0,142 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^1 \\
 b_2 &= 0,203 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \\
 c_2 &= 7,74 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \\
 d_2 &= 3,45 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2}
 \end{aligned}$$

das mittlere Schwankungsquadrat:

$$\overline{\delta x_2^2} = 2,10 \cdot 10^{-6}.$$

Die relative Schwankung ergibt sich endlich, wenn

$$\overline{x_1} = \frac{d_1}{c^1} \cdot \overline{i_1} = 0,615$$

$$\frac{\sqrt{\overline{\delta x_1^2} + \overline{\delta x_2^2}}}{\overline{x_1}} = 3,74\%.$$

Wir sehen, dass im vorliegenden Fall die Dämpfung des aperiodischen Kreises ausschlaggebend ist und die Galvanometerdämpfung keine wesentliche Rolle spielt.

Experimentelle Prüfung.

Wir haben auf Seite 141 gesehen, dass das mittlere Schwankungsquadrat von $\overline{m}$ in der Zeiteinheit durchschnittlich eintreffenden Teilchen $\overline{\delta m^2} = \overline{m}$. Dieser Wert oder dessen Quadratwurzel ist dem Experiment nicht direkt zugänglich, vielmehr lässt sich aus einer Registrierung des Verlaufes $m = m(t)$ das Mittel der Absolutwerte $|\delta \overline{m}|$ leicht entnehmen. Man kann zeigen, dass zwischen den beiden Ausdrücken im Falle der statistischen Schwankungen ein vom gewählten Zeitintervall unabhängiges, konstantes Verhältnis besteht, das wir im folgenden berechnen:

Haben wir im Mittel $\overline{m}$ eintreffende Teilchen pro Zeiteinheit, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Zeiteinheit k Teilchen eintreffen:

$$W_k = \frac{\overline{m}^k}{k!} e^{-\overline{m}};$$

Der Mittelwert der Absolutwerte ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller k -Werte, wobei k die ganzen Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft.

$$|\overline{m} - \overline{m}| = \sum_{k=0}^{\infty} |k - \overline{m}| \frac{\overline{m}^k}{k!} e^{-\overline{m}}.$$

Zu diesem Ausdruck können wir das algebraische Mittel der Schwankungen addieren, da dieses bekanntlich Null ist. Wir bekommen:

$$|\overline{m} - \overline{m}| = \sum_{k=0}^{\infty} |k - \overline{m}| \frac{\overline{m}^k}{k!} e^{-\overline{m}} + \sum_{k=0}^{\infty} (k - \overline{m}) \frac{\overline{m}^k}{k!} e^{-\overline{m}}.$$

Wir bemerken, dass solange $k \leq [\overline{m}]$ (ganzer Teil von $\overline{m}$) ist, die beiden Summanden sich aufheben, nachher addieren. Es wird also:

$$|\overline{m} - \overline{m}| = 2 \sum_{k=[\overline{m}]+1}^{\infty} (k - \overline{m}) \frac{\overline{m}^k}{k!} e^{-\overline{m}},$$

oder nach Multiplikation:

$$= 2 \sum_{k=[\overline{m}]+1}^{\infty} \frac{\overline{m}^k}{(k-1)!} e^{-\overline{m}} - 2 \sum_{k=[\overline{m}]+1}^{\infty} \frac{\overline{m}^{k+1}}{k!} e^{-\overline{m}}.$$

Der Ausdruck unter dem ersten Summenzeichen wird gleich dem entsprechenden Ausdruck des zweiten Gliedes, wenn wir k um 1 vermehren. Dementsprechend haben wir die Summation von $k = [\overline{m}]$ bis $k = \infty$ auszuführen. Bei der Differenzbildung bleibt dann nur das Glied mit $k = [\overline{m}]$ übrig, d. h. wir erhalten das Resultat:

$$|\overline{m} - \overline{m}| = 2 \frac{\overline{m}^{[\overline{m}]+1}}{[\overline{m}]!} e^{-\overline{m}}.$$

Diesen Ausdruck können wir mit Hilfe der STIRLING'schen Formel noch etwas umformen. Die Bedingung dafür ist allein, dass $\overline{m}$ gross ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit $e^{-\overline{m}}$ dafür das in einem Zeitintervall zufällig kein Teilchen eintrifft, verschwindet. Wir haben gesehen, dass die Verstärkung eine Zeitkonstante von ungefähr 19 Sekunden besitzt, somit wird $\overline{m} \sim 10^5$. Diese Bedingung ist also gut erfüllt. Die STIRLING'sche Formel sagt aus:

$$g! \approx \sqrt{2\pi} \cdot g^{g+\frac{1}{2}} \cdot e^{-g},$$

die obige Gleichung wird:

$$|\overline{m} - \overline{m}| = \frac{2 \cdot \overline{m}^{[\overline{m}]+1} \cdot e^{-\overline{m}}}{\sqrt{2\pi} [\overline{m}]^{[\overline{m}]+\frac{1}{2}} \cdot e^{-[\overline{m}]}}$$

oder anders geschrieben:

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\overline{m}} \left[1 + \frac{\overline{m} - [\overline{m}]}{[\overline{m}]} \right]^{[\overline{m}]+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e^{\overline{m}-[\overline{m}]}}.$$

Da hier das zweite Glied des Klammerausdruckes klein ist, wird die Potenz annähernd gleich $e^{\overline{m}-[\overline{m}]}$ und es bleibt:

$$|\overline{m} - \overline{m}| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\overline{m}}.$$

Wenn $\sqrt{(m - \bar{m})^2} = \sqrt{\bar{m}}$, wird endlich ihr Quotient:

$$\frac{\sqrt{(m - \bar{m})^2}}{|m - \bar{m}|} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Derselbe Zusammenhang gilt auch für die Schwankungen des Galvanometerausschlages, da $\bar{m}$ im Faktor nicht vorkommt. Die Herleitung gilt allgemein, für statistische Schwankungen, solange $\bar{m}$ gross ist. Sie ermöglicht ihre Bestimmung durch einfache Planimetrierung der aufgezeichneten Zeitfunktion.

Im vorliegenden Falle ergaben die Messungen im Mittel 4,3‰, mit einem auf $\pm 0,5‰$ geschätzten Fehler für die relative Schwankung. Im Verlauf der Messungen wurde so öfters eine Kontrolle der Spannungskompensation vorgenommen. Da es nicht möglich scheint die radioaktiven Störungen vollständig zu beseitigen, ist der gefundene, etwas höhere Wert erklärbar.

Vorliegende Arbeit ist im Physikalischen Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule ausgeführt worden. Ich möchte meinem verehrten Professor, Herrn Dr. P. SCHERRER, für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für sein ständiges Interesse und die wertvollen Winke und Ratschläge bei ihrer Ausführung herzlichst danken.