Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 48 (1975)
Heft: 3

Artikel: Relativistische Gleichungen für Teilchen mit beliebigem Spin
Autor: Giesen, Reinhard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114675

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

© 1975 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Société Suisse de Physique – Società Fisica Svizzera
Nachdruck verboten – Tous droits réservés – Printed in Switzerland

Helvetica Physica Acta
Vol. 48, 1975.

Birkhäuser Verlag Basel

Relativistische Gleichungen für Teilchen mit beliebigem Spin

von **Reinhard Giesen**

Lydiastr. 6, D-43 Essen 1, Deutschland

(28. X. 74)

Abstract. Relativistic equations for particles with arbitrary spin are constructed, which admit the introduction of interactions. The equations fulfil the conditions proposed by M. Fierz and W. Pauli in 1939.

1. Einleitung

Relativistische Gleichungen für kräftefreie Teilchen mit beliebigem Spin wurden zuerst 1936 von Dirac [1] aufgestellt. Fierz [2] führte dann die Quantisierung dieser Wellenfelder durch und bewies den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik. Gemäß der Formulierung in [2] kann ein freies Teilchen der Masse m mit *ganzzahligem Spin* f durch einen symmetrischen Tensor $\psi^{i_1 i_2 \ldots i_f}$ mit verschwindender Spur dargestellt werden. Die Tensorindizes nehmen die Werte 0, 1, 2 oder 3 an. Dieser Tensor der Stufe f genüge den Gleichungen

$$(\Box + m^2)\,\psi^{i_1 i_2 \ldots i_f} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_{i_1} \psi^{i_1 i_2 \ldots i_f} = 0. \tag{2}$$

Dabei ist $\Box = \partial_i \partial^i = g_{ik}\,\partial^i \partial^k$ mit $\partial_i = \partial/\partial x^i$ und dem metrischen Tensor g^{ik}. Es ist $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ und $g_{ik} = 0$ sonst für $i,k = 0, 1, 2, 3$. Wie üblich soll über gleichnamige obere und untere Indizes summiert werden.

Ein freies Teilchen der Masse m mit *halbzahligem* Spin $f = (2n-1)/2$ für $n = 1, 2, \ldots$ wird beschrieben durch die symmetrischen Spinoren $a^{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ und $b^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ mit $\mu, \nu = 1, 2$. Diese genügen den Gleichungen

$$n \cdot m a^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n} - p_{\nu_1 \dot\mu_n}\, b^{\dot\mu_n \dot\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}_{\nu_2 \ldots \nu_n} - \ldots - p_{\nu_n \dot\mu_n}\, b^{\dot\mu_n \dot\mu_1 \ldots \dot\mu_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = 0, \tag{3a}$$

$$n \cdot m b^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} - p^{\dot\mu_1 \nu_n}\, a^{\dot\mu_2 \ldots \dot\mu_n}_{\nu_n \nu_1 \ldots \nu_{n-1}} - \ldots - p^{\dot\mu_n \nu_n}\, a^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_{n-1}}_{\nu_n \nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = 0, \tag{3b}$$

$$p^{\nu_1}_{\dot\mu_1}\, a^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = 0, \tag{4a}$$

$$p^{\nu_1}_{\dot\mu_1}\, b^{\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = 0. \tag{4b}$$

Der Spinor $p^{\dot\mu\nu}$ ist mit Hilfe des Differentialoperators ∂_i und der Pauli'schen Spinmatrizen erklärt. Näheres dazu findet sich unten im Abschnitt 5.

Fierz und Pauli [3] zeigten schon 1939, daß die Gleichungen (1) und (2) bzw. (3) und (4) nach Einführung einer *Wechselwirkung* im allgemeinen nicht mehr miteinander verträglich sind. Diese Schwierigkeit tritt schon beim Spin $\frac{3}{2}$ auf, wenn man eine elektromagnetische Wechselwirkung durch die Ersetzungsvorschrift $\partial_i \to \partial_i + ieA_i$ mit dem Viererpotential A_i einführt. Als Ausweg schlugen sie dann vor, alle Gleichungen aus einem Variationsprinzip folgen zu lassen. Dazu muß man vorübergehend gewisse Hilfsfelder von niedrigerem Rang als dem des betrachteten Teilchenfeldes zulassen. Aus den Eulerschen Gleichungen sollen sich dann im kräftefreien Fall die Gleichungen (1) und (2) bzw. (3) und (4) und das Verschwinden der Hilfsfelder ableiten lassen. Für Spin $\frac{3}{2}$ und Spin 2 konnten solche Gleichungen mit Lagrange-Dichte angegeben werden, und für Spin $f > 2$ wurde bewiesen, daß die Aufgabe lösbar sei. Anscheinend konnten diese Gleichungen für höheren Spin bisher nicht gefunden werden. Neuerdings hat Minkowski [4] ausgehend von den Fierz-Pauli-Gleichungen eine Theorie eines Spin-2-Mesons entwickelt.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst ein Konstruktionsverfahren für Gleichungen der genannten Eigenschaften vorgeführt. Dann werden als Hauptergebnis die Gleichungssysteme für beliebigen ganzzahligen und halbzahligen Spin bewiesen. Es zeigt sich, daß verschiedene Formen des Gleichungssystems möglich sind.

2. Konstruktionsverfahren und Spin-2-Gleichung

Gesucht wird für das symmetrische Tensorfeld ψ^{ik} mit $\psi^i_i = 0$ ein Differentialgleichungssystem, das aus einer Lorentz-invarianten Lagrange-Dichte ableitbar ist. Dies Gleichungssystem soll die Eigenschaft besitzen, daß aus ihm $(\Box + m^2)\psi^{ik} = 0$ und $\partial_i \psi^{ik} = 0$ folgt.

Wählt man als Ausgangsgleichung

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} - \partial^i \partial_l \psi^{lk} = 0, \tag{1}$$

und wendet man darauf ∂_i an, so erhält man

$$\partial_r \psi^{rk} = 0. \tag{a}$$

Damit folgt aus Gleichung (1) auch

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} = 0. \tag{b}$$

Das Ziel ist nun, Gleichung (1) unter Erhaltung dieser Eigenschaft zu symmetrisieren und auf eine aus einer Lagrange-Dichte ableitbare Form zu transformieren.

Dazu wird Gleichung (1) um $-\partial^k \partial_l \psi^{li} + \partial^k \partial_l \psi^{li}$ erweitert. Dann wird $+\partial^k \partial_l \psi^{li}$ durch $g^{ik} \partial_l \partial_r \psi^{lr}$ ersetzt. Dabei bleibt die gezeigte Eigenschaft von Gleichung (1) erhalten, denn die beiden Ausdrücke sind äquivalent hinsichtlich der Operation ∂_i, d.h. $\partial_i (\partial^k \partial_l \psi^{li}) = \partial_i (g^{ik} \partial_l \partial_r \psi^{lr})$, und (a) und (b) folgten ja erst nach Anwendung von ∂_i auf (1).

Damit ist die Symmetrie schon erreicht. Will man in der Lagrange-Dichte nur Ableitungen des Feldes von höchstens 1. Ordnung zulassen, so gelangt man dazu durch Einführung eines skalaren Hilfsfeldes φ:

$$\partial_l \partial_r \psi^{lr} = m^2 \varphi. \tag{2}$$

Gleichung (1) ist schließlich:

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} - \partial^i \partial_l \psi^{lk} - \partial^k \partial_l \psi^{li} + m^2 g^{ik} \varphi = 0. \tag{1}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt nun außer (a) und (b) auch

$$\varphi = 0. \tag{c}$$

Um eine invariante Lagrange-Dichte zu dem Gleichungssystem bilden zu können, formt man es weiter um durch die Substitution $\psi^{ik} = \psi^{ik'} - g^{ik}\varphi$. Aus dem neuen System folgt wieder (a), (b) und (c). Zunächst folgt nämlich (a) und (b) für $(\psi^{ik'} - g^{ik}\varphi)$ und wie bisher folgt (c), d.h. $\varphi = 0$. Wegen $\varphi = 0$ gilt dann (a) und (b) auch für das neue Feld $\psi^{ik'}$.

Durch diese Substitution entsteht in (1) auch der Ausdruck $g^{ik}\Box\varphi$, der durch den hinsichtlich ∂_i äquivalenten Ausdruck $\partial^i\partial^k\varphi$ ersetzt wird. Schließlich läßt man an der neuen Größe $\psi^{ik'}$ den Strich wieder weg, und das Gleichungssystem lautet nun

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} - \partial^i\partial_l\psi^{lk} - \partial^k\partial_l\psi^{li} + \partial^i\partial^k\varphi = 0, \tag{A.1}$$

$$-\partial_l\partial_r\psi^{lr} + (\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{A.2}$$

Für die Behandlung der Spurbedingung $\psi^i_i = 0$ bieten sich 2 *Möglichkeiten*:

A. Man definiert $\psi^i_i := \varphi$. Dann folgt die Spurbedingung schon aus dem Gleichungssystem.

Vergessen wir nun für einen Augenblick die Spurbedingung, und fassen wir φ noch als unabhängig von ψ^{ik} auf! Dann läßt sich folgende Lagrange-Dichte konstruieren:

$$\begin{aligned} L = {} & m^2\psi^*_{ik}\psi^{ik} - \partial_r\psi^*_{ik}\partial^r\psi^{ik} + 2\partial^r\psi^*_{rk}\partial_s\psi^{sk} \\ & - (\partial^r\psi^*_{rk}\partial^k\varphi + \partial_k\varphi^*\partial_r\psi^{rk}) - m^2\varphi^*\varphi + \partial_r\varphi^*\partial^r\varphi. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Aus ihr lassen sich die Gleichungen (A.1) und (A.2) herleiten. Beim Variieren ist als Nebenbedingung nur die Symmetrie $\psi^{ik} = \psi^{ki}$ zu beachten. Ferner sind ψ^{ik}, ψ^*_{ik}, φ, φ^* unabhängig von einander zu variieren. Der Stern $*$ bezeichnet das konjugiert-komplexe Feld, bzw. in einer quantisierten Theorie den hermetisch adjungierten Feldoperator.

Erinnern wir uns jetzt wieder an die Definition $\psi^i_i := \varphi$ und berücksichtigen dies beim Variieren von (A.3), so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \Box\psi^{ik} - \partial^i\partial_r\psi^{rk} - \partial^k\partial_r\psi^{ri} + g^{ik}\partial_r\partial_l\psi^{rl} \\ & + \partial^i\partial^k\varphi - g^{ik}\Box\varphi + m^2(\psi^{ik} - g^{ik}\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Dies ist die Form des Gleichungssystems, die z.B. in der Theorie des Spin-2-Mesons von Minkowski [4] verwendet wird. Es lassen sich durch Verjüngen und Differenzieren die gewünschten Eigenschaften für (A.4) nachweisen.

Der Übergang von (A.1) und (A.2) nach (A.4) ist überraschend, aber wohl nicht rein zufällig. Systematisch gelangt man zu (A.4) indem man L mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt und daraus (A.4) ableitet. Hieraus erhält man durch Verjüngung eine Gleichung (A.5). Man kann dann mit ähnlichen Schritten wie oben von (A.4) und (A.5) zur Ausgangsgleichung (1) zurückkehren. Dadurch werden die Koeffizienten bestimmt.

B. Man setzt $\psi^i_i = 0$ *von Anfang an voraus.* Dann muß dies als Nebenbedingung bei der Variation der Lagrange-Dichte berücksichtigt werden. Das führt zu etwas komplizierteren Gleichungen. Dazu formt man (A.1) und (A.2) weiter um. Der Ausdruck $\partial^i\partial^k\varphi$ in (A.1) ist hinsichtlich ∂_i äquivalent zu $\frac{1}{2}\partial^i\partial^k\varphi + \frac{1}{2}g_{ik}\Box\varphi$. Ersetzt man

hier $\Box\varphi$ aus (A.2), so erhält man für (A.1)

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} - (\partial^i\partial_l\psi^{lk} + \partial^k\partial_l\psi^{li} - \tfrac{1}{2}g^{ik}\partial_r\partial_l\psi^{rl}) + \tfrac{1}{2}\partial^i\partial^k\varphi - \tfrac{1}{2}g^{ik}m^2\varphi = 0.$$

Nun substituiert man $\psi^{ik} = \psi^{ik'} + \frac{1}{2}g^{ik}\varphi$. Das führt zu

$$(\Box + m^2)\psi^{ik'} - (\partial^i\partial_l\psi^{lk'} + \partial^k\partial_l\psi^{li'} - \tfrac{1}{2}g^{ik}\partial_l\partial_r\psi^{lr'}) - \tfrac{1}{2}\partial^i\partial^k\varphi - \tfrac{3}{4}g^{ik}\Box\varphi = 0, \quad (1)$$

$$-\partial_l\partial_r\psi^{lr'} + (\tfrac{1}{2}\Box + m^2)\varphi = 0. \quad (2)$$

Setzt man jetzt in (1) für $-\frac{1}{2}\partial^i\partial^k\varphi + \frac{3}{4}g^{ik}\Box\varphi$ den hinsichtlich ∂_i äquivalenten Ausdruck $+\frac{1}{3}\partial^i\partial^k\varphi - \frac{1}{12}g^{ik}\Box\varphi$ ein, substituiert $\varphi = -\frac{3}{2}\varphi'$ und läßt zum Schluß den Strich an den neuen Feldern wieder fort, dann hat man das neue Gleichungssystem

$$(\Box + m^2)\psi^{ik} - (\partial^i\partial_l\psi^{lk} + \partial^k\partial_r\psi^{ri} - \tfrac{1}{2}g^{ik}\partial_r\partial_l\psi^{rl}) - \tfrac{1}{2}\partial^i\partial^k\varphi + \tfrac{1}{8}g^{ik}\Box\varphi = 0, \quad (B.1)$$

$$\partial_l\partial_r\psi^{lr} + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}\Box + m^2)\varphi = 0. \quad (B.2)$$

Dies kann man durch Variation unter den Nebenbedingungen $\psi^i_i = 0$ und $\psi^{ik} = \psi^{ki}$ aus der folgenden Lagrange-Dichte herleiten:

$$L = m^2\psi^*_{ik}\psi^{ik} - \partial_r\psi^*_{ik}\partial^r\psi^{ik} + 2\partial^r\psi^*_{rk}\partial_s\psi^{sk}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\partial^r\psi^*_{rk}\partial^k\varphi + \partial_k\varphi^*\partial_r\psi^{rk}) - \tfrac{3}{4}m^2\varphi^*\varphi + \tfrac{3}{8}\partial_l\varphi^*\partial^l\varphi. \quad (B.3)$$

Das ist die Form der Gleichungen für Spin-2-Teilchen, die von Fierz und Pauli 1939 [3] aufgestellt wurde.

Bemerkung. Das Konstruktionsverfahren, das hier an den bekannten Spin-2-Gleichungen demonstriert wurde, läßt sich nun anwenden zur Gewinnung von Gleichungen für beliebigen ganzzahligen Spin. Für beliebigen Spin f wählt man als Ausgangsgleichung $(\Box + m^2)\psi^{i_1 i_2 \ldots i_f} - \partial^{i_1}\partial_{i_r}\psi^{i_r i_2 i_3 \ldots i_f} = 0$.

3. Gleichungen zum Spin 3

ψ^{ikl} ist nun ein symmetrischer Tensor 3. Stufe. Wieder hat man für die Behandlung der Spurbedingung 2 Möglichkeiten:

A. Man definiert $\psi^{il}_i := \varphi^l$, wobei φ^l das in den Gleichungen auftretende vektorielle Hilfsfeld ist. Dann kann das Verschwinden der Spuren aus dem Gleichungssystem gefolgert werden. Die Feldgleichungen lassen sich aus der Lagrange-Dichte

$$L = m^2\psi^*_{ikl}\psi^{ikl} - \partial_r\psi^*_{ikl}\partial^r\psi^{ikl} + 3\partial^r\psi^*_{rkl}\partial_s\psi^{skl}$$
$$- 3(\partial^r\psi^*_{rkl}\partial^k\varphi^l + \partial_k\varphi^*_l\partial_r\psi^{rkl})$$
$$-3(m^2\varphi^*_l\varphi^l - \partial_r\varphi^*_l\partial^r\varphi^l - \tfrac{1}{2}\partial^r\varphi^*_r\partial_s\varphi^s) - \tfrac{1}{2}m^2(\varphi^*_l\partial^l\chi + \partial_l\chi^*\varphi^l)$$
$$+ \tfrac{1}{2}m^2(4m^2\chi^*\chi - \partial_r\chi^*\partial^r\chi)$$

herleiten. Beim Variieren muß als Nebenbedingung die Symmetrie des Tensorfeldes ψ^{ikl} berücksichtigt werden. Ferner ist zu beachten, daß φ^l durch ψ^{il}_i definiert ist,

während χ ein unabhängiges skalares Hilfsfeld ist. Die Gleichungen lauten

$$(\Box + m^2)\psi^{ikl} - (\partial^i\partial_s\psi^{skl} + \partial^k\partial_s\psi^{sil} + \partial^l\partial_s\psi^{sik}) + \partial^i\partial^k\varphi^l + \partial^k\partial^l\varphi^i$$
$$+ \partial^l\partial^i\varphi^k + g^{ik}\{\partial_r\partial_s\psi^{rsl} - (\Box + m^2)\varphi^l - \tfrac{1}{2}\partial^l\partial_s\varphi^s - \tfrac{1}{6}m^2\partial^l\chi\}$$
$$+ g^{kl}\{\partial_r\partial_s\psi^{rsi} - \ldots\} + g^{li}\{\partial_r\partial_s\psi^{rsk} - \ldots\} = 0, \tag{A.1}$$

$$\partial_l\varphi^l + (\Box + 4m^2)\chi = 0. \tag{A.3}$$

Verjüngen der Gleichung (A.1) gibt

$$-\partial_r\partial_s\psi^{rsl} + (\Box + \tfrac{5}{4}m^2)\varphi^l + \tfrac{1}{2}\partial^l\partial_s\varphi^s + \tfrac{1}{4}m^2\partial^l\chi = 0. \tag{A.2}$$

Wendet man ∂_i auf Gleichung (A.1) an und substituiert aus (A.2), so erhält man

$$\partial_r\psi^{rkl} - (\partial^k\varphi^l + \partial^l\varphi^k) - \tfrac{1}{3}\partial^k\partial^l\chi + g^{kl}(\tfrac{1}{4}\partial_r\varphi^r + \tfrac{1}{12}\Box\chi) = 0. \tag{*}$$

Hierauf wendet man ∂_k an, und man bekommt mit Hilfe von (A.2) und (A.3)

$$\varphi^l + \partial^l\chi = 0. \tag{**}$$

Mit (**) folgt aus (A.3) $\chi = 0$. Wegen (**), (*) und (A.1) gilt dann $\psi_i^{il} \equiv \varphi^l = 0$, $\partial_r\psi^{rkl} = 0$ und $(\Box + m^2)\psi^{ikl} = 0$.

B. Man setzt $\psi_i^{il} = 0$ von Anfang an voraus. Zur Konstruktion des Gleichungssystems geht man aus von der Gleichung

$$(\Box + m^2)\psi^{ikl} - \partial^i\partial_r\psi^{rkl} = 0. \tag{1}$$

Man erweitert sie um

$$-\partial^k\partial_r\psi^{ril} - \partial^l\partial_r\psi^{rik} + \tfrac{1}{3}g^{ik}\partial_r\partial_s\psi^{rsl} + \tfrac{1}{3}g^{il}\partial_r\partial_s\psi^{rsk} + \tfrac{1}{3}g^{kl}\partial_r\partial_s\psi^{rsi}$$
$$- \tfrac{1}{3}g^{ik}\partial_r\partial_s\psi^{rsl} - \tfrac{1}{3}g^{il}\partial_r\partial_s\psi^{rsk} - \tfrac{1}{3}g^{kl}\partial_r\partial_s\psi^{rsi} + \partial^k\partial_r\psi^{ril} + \partial^l\partial_r\psi^{rik}.$$

Die Glieder $\tfrac{1}{3}g^{ik}\partial_r\partial_s\psi^{rsl} + \tfrac{1}{3}g^{il}\partial_r\partial_s\psi^{rsk} + \tfrac{1}{3}g^{kl}\partial_r\partial_s\psi^{rsi}$ müssen in diesem Fall wegen des komplizierteren Variationsverfahrens (Spurbedingung) eingeführt werden. Die letzten 5 Glieder der Erweiterung sind hinsichtlich ∂_i äquivalent zu

$$\tfrac{2}{3}g^{ik}\partial_r\partial_s\psi^{rsl} + \tfrac{2}{3}g^{il}\partial_r\partial_s\psi^{rsk} - \tfrac{1}{3}g^{kl}\partial_r\partial_s\psi^{rsi}.$$

Man führt nun das Hilfsfeld φ^l ein durch

$$\partial_r\partial_s\psi^{rsl} = m^2\varphi^l. \tag{2}$$

Damit wird Gleichung (1) zu

$$(\Box + m^2)\psi^{ikl} - \partial^i\partial_r\psi^{rkl} - \partial^k\partial_r\psi^{ril} - \partial^l\partial_r\psi^{rik} + \tfrac{1}{3}g^{ik}\partial_r\partial_s\psi^{rsl} + \tfrac{1}{3}g^{il}\partial_r\partial_s\psi^{rsk}$$
$$+ \tfrac{1}{3}g^{kl}\partial_r\partial_s\psi^{rsi} + \tfrac{2}{3}m^2g^{ik}\varphi^l + \tfrac{2}{3}m^2g^{il}\varphi^k - \tfrac{1}{3}m^2g^{kl}\varphi^i = 0.$$

Für den das Feld ψ^{ikl} enthaltenden Teil dieser Gleichung kann man die Abkürzung $(H\psi)^{ikl}$ einführen. Sie sieht dann so aus:

$$(H\psi)^{ikl} + \tfrac{2}{3}m^2g^{ik}\varphi^l + \tfrac{2}{3}m^2g^{il}\varphi^k - \tfrac{1}{3}m^2g^{kl}\varphi^i = 0.$$

Die Substitution

$$\psi^{ikl} = \psi^{ikl'} - \tfrac{2}{3} g^{ik} \varphi^l - \tfrac{2}{3} g^{il} \varphi^k + \tfrac{1}{3} g^{kl} \varphi^i$$

führt dan zu den Gleichungen

$$\partial_r \partial_s \psi^{rsl} = (\tfrac{2}{3} \Box + m^2) \varphi^l + \tfrac{1}{3} \partial^l \partial_r \varphi^r, \tag{2}$$

$$(H\psi)^{ikl} + \tfrac{4}{3} \partial^i \partial^k \varphi^l + \tfrac{4}{3} \partial^i \partial^l \varphi^k - \tfrac{2}{3} \partial^k \partial^l \varphi^i + g^{ik}(-\tfrac{8}{9} \Box \varphi^l + \tfrac{5}{9} \partial^l \partial_r \varphi^r)$$
$$+ g^{il}(-\tfrac{8}{9} \Box \varphi^k + \tfrac{5}{9} \partial^k \partial_r \varphi^r) + g^{kl}(+\tfrac{4}{9} \Box \varphi^i - \tfrac{7}{9} \partial^i \partial_r \varphi^r) = 0. \tag{1}$$

Das Verhältnis von $\partial^i \partial^k \varphi^l$ zu $g^{ik} \Box \varphi^l$ soll wegen der Nebenbedingungen beim Variationsverfahren –6, das Verhältnis von $g^{ik} \Box \varphi^l$ zu $g^{ik} \partial^l \partial_r \varphi^r$ soll $\frac{1}{2}$ betragen. Darum ersetzt man

$$\tfrac{36}{45} \partial^i \partial^k \varphi^l + \tfrac{36}{45} \partial^i \partial^l \varphi^k - \tfrac{54}{45} \partial^k \partial^l \varphi^i$$

durch den hinsichtlich ∂_i äquivalenten Ausdruck

$$\tfrac{36}{45} g^{ik} \Box \varphi^l + \tfrac{36}{45} g^{il} \Box \varphi^k - \tfrac{27}{45} g^{ik} \partial^l \partial_r \varphi^r - \tfrac{27}{45} g^{il} \partial^k \partial_r \varphi^r.$$

Beachtet man ferner, daß $(\frac{4}{9} \Box \varphi^i - \frac{7}{9} \partial^i \partial_r \varphi^r)$ hinsichtlich ∂_i äquivalent ist zu $(-\frac{4}{45} \Box \varphi^i - \frac{11}{45} \partial^i \partial_r \varphi^r)$, so erhält man

$$(H\psi)^{ikl} + \tfrac{24}{45} (\partial^i \partial^k \varphi^l + \partial^i \partial^l \varphi^k + \partial^k \partial^l \varphi^i) + g^{ik}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^l - \tfrac{2}{45} \partial^l \partial_r \varphi^r)$$
$$+ g^{il}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^k - \tfrac{2}{45} \partial^k \partial_r \varphi^r) + g^{kl}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^i - \tfrac{11}{45} \partial^i \partial_r \varphi^r) = 0. \tag{1}$$

Führt man nun das skalare Hilfsfeld χ ein durch

$$\partial_r \varphi^r = m^2 \chi, \tag{3}$$

erweitert man Gleichung (1) um

$$-\tfrac{6}{45} g^{ik} \partial^l \partial_r \varphi^r - \tfrac{6}{45} g^{il} \partial^k \partial_r \varphi^r + \tfrac{3}{45} g^{kl} \partial^i \partial_r \varphi^r$$
$$+ \tfrac{6}{45} m^2 g^{ik} \partial^l \chi + \tfrac{6}{45} m^2 g^{il} \partial^k \chi - \tfrac{3}{45} m^2 g^{kl} \partial^i \chi$$

und substituiert schließlich

$$\psi^{ikl} = \psi^{ikl'} - \tfrac{2}{15} g^{ik} \partial^l \chi - \tfrac{2}{15} g^{il} \partial^k \chi + \tfrac{1}{15} g^{kl} \partial^i \chi,$$

so erhält man

$$(H\psi)^{ikl} + \tfrac{24}{45} (\partial^i \partial^k \varphi^l + \partial^i \partial^l \varphi^k + \partial^k \partial^l \varphi^i) + g^{ik}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^l - \tfrac{8}{45} \partial^l \partial_r \varphi^r)$$
$$+ g^{il}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^k - \tfrac{8}{45} \partial^k \partial_r \varphi^r) + g^{kl}(-\tfrac{4}{45} \Box \varphi^i - \tfrac{8}{45} \partial^i \partial_r \varphi^r)$$
$$+ \tfrac{18}{45} \partial^i \partial^k \partial^l \chi - \tfrac{3}{45} g^{ik} \Box \partial^l \chi - \tfrac{3}{45} g^{il} \Box \partial^k \chi - \tfrac{3}{45} g^{kl} \Box \partial^i \chi = 0, \tag{1}$$

$$\partial_r \partial_s \psi^{rsl} = (\tfrac{2}{3} \Box + m^2) \varphi^l + \tfrac{1}{3} \partial^l \partial_r \varphi^r + \tfrac{1}{5} \Box \partial^l \chi, \tag{2}$$

$$\partial_r \varphi^r = m^2 \chi. \tag{3}$$

Die Substitution $\varphi^l = \varphi^{l'} - \frac{1}{4}\partial^l \chi$ läßt χ aus Gleichung (1) ganz verschwinden. Gleichungen (2) und (3) werden zu

$$\partial_r \partial_s \psi^{rsl} = (\tfrac{2}{3}\Box + m^2)\varphi^l + \tfrac{2}{15}\partial^l \partial_r \varphi^r - \tfrac{1}{20} m^2 \partial^l \chi, \tag{2}$$

$$\partial_r \varphi^r = (\tfrac{1}{4}\Box + m^2)\chi. \tag{3}$$

Durch die Substitution $\varphi = -\frac{5}{2}\varphi'$ und $\chi = 5\chi'$ können etwas bequemere Koeffizienten erhalten werden, und man hat endlich

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\psi^{ikl} - (\partial^i \partial_r \psi^{rkl} + \partial^k \partial_r \psi^{ril} + \partial^l \partial_r \psi^{rik} - \tfrac{1}{3} g^{ik} \partial_r \partial_s \psi^{rsl} \\
&\quad - \tfrac{1}{3} g^{il} \partial_r \partial_s \psi^{rsk} - \tfrac{1}{3} g^{kl} \partial_r \partial_s \psi^{rsi}) - \tfrac{4}{3}(\partial^i \partial^k \varphi^l + \partial^i \partial^l \varphi^k + \partial^k \partial^l \varphi^i) \\
&\quad + \tfrac{4}{9} g^{ik}(\tfrac{1}{2}\Box \varphi^l + \partial^l \partial_r \varphi^r) + \tfrac{4}{9} g^{il}(\tfrac{1}{2}\Box \varphi^k + \partial^k \partial_r \varphi^r) \\
&\quad + \tfrac{4}{9} g^{kl}(\tfrac{1}{2}\Box \varphi^i + \partial^i \partial_r \varphi^r) = 0,
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\partial_r \partial_s \psi^{rsl} + \tfrac{5}{2}(\tfrac{2}{3}\Box + m^2)\varphi^l + \tfrac{1}{3}\partial^l \partial_r \varphi^r + \tfrac{1}{4} m^2 \partial^l \chi = 0, \tag{B.2}$$

$$\partial_r \varphi^r + 2(\tfrac{1}{4}\Box + m^2)\chi = 0. \tag{B.3}$$

Die zugehörige Lagrange-Dichte ist

$$\begin{aligned}
L = {} & m^2 \psi^*_{ikl} \psi^{ikl} - \partial_r \psi^*_{ikl} \partial^r \psi^{ikl} + 3\partial^r \psi^*_{rkl} \partial_s \psi^{skl} \\
& + 4(\partial^r \psi^*_{rkl} \partial^k \varphi^l + \partial_k \varphi^*_l \partial_r \psi^{rkl}) - 10 \cdot m^2 \varphi^*_l \varphi^l + \tfrac{20}{3} \partial_r \varphi^*_l \partial^r \varphi^l \\
& + \tfrac{4}{3} \partial^r \varphi^*_r \partial_s \varphi^s - m^2(\varphi^*_l \partial^l \chi + \partial_l \chi^* \varphi^l) + 2 \cdot m^4 \chi^* \chi - \tfrac{1}{2} m^2 \partial_r \chi^* \partial^r \chi.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Bei der Variation muß die Symmetrie von ψ^{ikl} und das Verschwinden der Spur als Nebenbedingung berücksichtigt werden.

Von den Eigenschaften des Gleichungssystems kann man sich nachträglich noch einmal überzeugen:

Anwendung von ∂_i auf (B.1) gibt

$$\begin{aligned}
& m^2 \partial_r \psi^{rkl} - \tfrac{2}{3} \partial^k \partial_r \partial_s \psi^{rsl} - \tfrac{2}{3} \partial^l \partial_r \partial_s \psi^{rsk} + \tfrac{1}{3} g^{kl} \partial_r \partial_s \partial_t \psi^{rst} \\
& \quad - \tfrac{4}{9} \partial^k \partial^l \partial_r \varphi^r - \tfrac{10}{9} \Box \partial^k \varphi^l - \tfrac{10}{9} \Box \partial^l \varphi^k + \tfrac{6}{9} g^{kl} \Box \partial_r \varphi^r = 0.
\end{aligned}$$

Man ersetzt $\partial_r \partial_s \psi^{rsl}$ aus Gleichung (B.2) und erhält

$$\partial_r \psi^{rkl} + \tfrac{5}{3} \partial^k \varphi^l + \tfrac{5}{3} \partial^l \varphi^k - \tfrac{5}{6} g^{kl} \partial_r \varphi^r + \tfrac{1}{3} \partial^k \partial^l \chi - \tfrac{1}{12} g^{kl} \Box \chi = 0. \tag{$*$}$$

Dann wendet man ∂_k auf Gleichung ($*$) an, ersetzt $\partial_r \partial_s \psi^{rkl}$ und $\partial_r \varphi^r$ durch Gleichung (B.2) und (B.3) und gelangt schließlich zu

$$\varphi^l + \tfrac{1}{2} \partial^l \chi = 0. \tag{$**$}$$

Anwendung von ∂_l auf Gleichung ($**$) gibt $\partial_r \varphi^r = -\frac{1}{2}\Box \chi$. Damit folgt nun aus (B.3), daß $\chi = 0$.

Wegen ($**$) ist dann auch $\varphi^l = 0$, wegen ($*$) ist $\partial_r \psi^{rkl} = 0$, und (B.1) wird zur Klein-Gordon-Gleichung.

4. Allgemeines Gleichungssystem zu ganzzahligem Spin f

Sei f eine ganze Zahl größer als 1 und $\psi^{i_1 i_2 \ldots i_f}$ ein symmetrischer Tensor der Stufe f. Die Hilfsfelder $\chi_n^{i_{n+1} i_{n+2} \ldots i_f}$ seien symmetrische Tensoren der Stufe $(f-n)$ für $n = 2, 3, \ldots, f$. Die Spuren aller betrachteten Felder seien gleich Null. Die Tensorindizes i_k nehmen die Werte 0, 1, 2 und 3 an für $k = 1, 2, \ldots, f$. Dann lassen sich aus der Lagrange-Dichte

$$
\begin{aligned}
L = {} & m^2 \psi^*_{i_1 \ldots i_f} \psi^{i_1 \ldots i_f} - \partial_{i_r} \psi^*_{i_1 \ldots i_f} \partial^{i_r} \psi^{i_1 \ldots i_f} + f \partial^{i_r} \psi^*_{i_r i_2 \ldots i_f} \partial_{i_s} \psi^{i_s i_2 \ldots i_f} \\
& + \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{f} (-1)^n \cdot m^{2(n-2)} \cdot n! \binom{f}{n} \cdot \{ (\chi^*_{n-1 i_n \ldots i_f} \partial^{i_n} \chi_n^{i_{n+1} \ldots i_f} + \partial_{i_n} \chi^*_{n i_{n+1} \ldots i_f} \chi_{n-1}^{i_n \ldots i_f}) \\
& + a_n \partial_{i_r} \chi^*_{n i_{n+1} \ldots i_f} \partial^{i_r} \chi_n^{i_{n+1} \ldots i_f} - b_n m^2 \chi^*_{n i_{n+1} \ldots i_f} \chi_n^{i_{n+1} \ldots i_f} \\
& + (f-n) c_n \partial^{i_r} \chi^*_{n i_r i_{n+2} \ldots i_f} \partial_{i_s} \chi_n^{i_s i_{n+2} \ldots i_f} \}
\end{aligned}
$$

Gleichungen für ein freies Teilchen mit der Mass m und dem Spin f ableiten. Beim Variieren müssen als Nebenbedingungen das Verschwinden aller Spuren und die Symmetrie der Tensorfelder berücksichtigt werden. Die Gleichungen lauten

$$
\begin{aligned}
& (\Box + m^2) \psi^{i_1 \ldots i_f} - \sum_{k=1}^{f} \partial^{i_k} \partial_{i_r} \psi^{i_r i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_f} - \sum_{l>k=1}^{f} \partial^{i_k} \partial^{i_l} \chi_2^{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} \\
& + \frac{1}{f} \sum_{l>k=1}^{f} g^{i_k i_l} \cdot \Bigg\{ \partial_{i_r} \partial_{i_s} \psi^{i_r i_s i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} + \tfrac{1}{2} \Box \chi_2^{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} \\
& + \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq k,l}}^{f} \partial^{i_u} \partial_{i_r} \chi_2^{i_r i_1 \ldots i_{u-1} i_{u+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} \\
& - \frac{1}{2(f-1)} \sum_{\substack{v>u=1 \\ u,v \neq k,l}}^{f} g^{i_u i_v} \partial_{i_r} \partial_{i_s} \chi_2^{i_r i_s i_1 \ldots i_{u-1} i_{u+1} \ldots i_{v-1} i_{v+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} \Bigg\} = 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& \partial_{i_n} \chi_{n-1}^{i_n i_{n+1} \ldots i_f} + (a_n \Box + b_n m^2) \chi_n^{i_{n+1} \ldots i_f} + c_n \sum_{k=n+1}^{f} \partial^{i_k} \partial_{i_r} \chi_n^{i_r i_{n+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_f} \\
& - \frac{c_n}{f-n} \cdot \sum_{l>k=n+1}^{f} g^{i_k i_l} \partial_{i_r} \partial_{i_s} \chi_n^{i_r i_s i_{n+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} + m^2 \sum_{k=n+1}^{f} \partial^{i_k} \chi_{n+1}^{i_{n+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_f} \\
& - \frac{m^2}{f-n} \cdot \sum_{l>k=n+1}^{f} g^{i_k i_l} \partial_{i_r} \chi_{n+1}^{i_r i_{n+1} \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_f} = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots, f. \qquad (n)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\chi_1^{i_2 \ldots i_f} \equiv \partial_{i_1} \psi^{i_1 i_2 \ldots i_f}$ und $\chi_{f+1} \equiv 0$.

Die Konstanten sind rekursiv gegeben durch

$$a_2 = \frac{2f-1}{2(f-1)}, \quad b_n = \frac{n(f-n+2)(2f-n+1)}{(2f-2n+2)(2f-2n+3)} \cdot a_n,$$

$$c_n = \frac{(f-n)}{(2f-2n+3)} \cdot a_n \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots,$$

$$a_n = \frac{2(n-1)(2f-2n+3)(2f-n+2)}{(n-2)(2f-2n+2)(2f-n+3)} \cdot \frac{1}{b_{n-1}} \quad \text{für n} > 2.$$

Insbesondere ist $c_f = 0$.

Es ist zu beachten, daß Ausdrücke wie $\partial_{i_r} \chi_f^{i_r \cdots}$ und $\partial_{i_r} \partial_{i_s} \chi_{f-1}^{i_r i_s \cdots}$ sinnlos sind und in den Gleichungen nicht auftreten. So kommt z.B. Gleichung (1) erst für Spin $f > 3$ in voller Länge vor.

Beweis

Zuerst wird eine kürzere Schreibweise eingeführt. Sei $\psi := \psi^{i_1 \cdots i_f} = \varphi_0^{i_1 \cdots i_f}$. Sei allgemein $\varphi_k := \varphi_k^{i_{k+1} \cdots i_f}$ ein beliebiger symmetrischer Tensor der Stufe $(f-k)$ für $k = 0, 1, \ldots, f$. Dann definiert man die Operatoren P, S und g durch

$$P\varphi_k := \sum_{l=k}^{f} \partial^{i_l} \varphi_k^{i_k \cdots i_{l-1} i_{l+1} \cdots i_f},$$

$$S\varphi_k := \partial_{i_{k+1}} \varphi_k^{i_{k+1} i_{k+2} \cdots i_f} \quad (k < f),$$

$$g\varphi_k := \sum_{s > r = k-1}^{f} g^{i_r i_s} \varphi_k^{i_{k-1} \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_f}.$$

Da die Operationen wieder symmetrische Tensoren ergeben, können sie beliebig hintereinander ausgeführt werden. Dafür gelten offensichtlich die Regeln $Pg\varphi_k = gP\varphi_k$,

$$SP\varphi_k = \Box\varphi_k + \{PS\varphi_k\},$$

$$SP^2\varphi_k = 2\Box P\varphi_k + \{P^2 S\varphi_k\},$$

$$Sg\varphi_k = P\varphi_k + \{gS\varphi_k\}.$$

Die eingeklammerten Ausdrücke sind fortzulassen falls $k = f$, also für skalares φ.

Der Beweis für das Gleichungssystem besteht darin, daß man zeigt, daß alle Hilfsfelder verschwinden und $\chi_1 \equiv S\psi = 0$. Mit Gleichung (1) erhält man dann $(\Box + m^2)\psi = 0$.

Zunächst wendet man den Operator S auf Gleichung (1) an:

$$(\Box + m^2) S\psi - \Box S\psi - PS^2\psi - \Box P\chi_2 - \tfrac{1}{2}P^2 S\chi_2 + \frac{1}{f} PS^2\psi + \frac{1}{f} gS^3\psi$$

$$+ \frac{1}{2f}\Box P\chi_2 + \frac{1}{2f} g\Box S\chi_2 + \frac{1}{f} P^2 S\chi_2 + \frac{1}{f} g\Box S\chi_2 + \frac{1}{f} gPS^2\chi_2$$

$$- \frac{1}{2f(f-1)} \cdot PgS^2\chi_2 - \frac{1}{2f(f-1)} gPS^2\chi_2 - \frac{1}{2f(f-1)} \cdot g^2 S^3\chi_2 = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung (2) ersetzt man

$$-\frac{(f-1)}{f}PS^2\psi+\frac{1}{f}gS^3\psi$$

durch

$$\frac{(f-1)}{f}\cdot(a_2\Box+b_2m^2)P\chi_2+\frac{(f-1)}{f}\cdot c_2(P^2S\chi_2-\frac{1}{f-2}gPS^2\chi_2)$$
$$+\frac{(f-1)}{f}\cdot m^2\left(P^2\chi_3-\frac{1}{f-2}gPS\chi_3\right)-\frac{1}{f}g\left\{(a_2\Box+b_2m^2)S\chi_2\right.$$
$$+c_2\left(\Box S\chi_2+PS^2\chi_2-\frac{1}{f-2)}PS^2\chi_2-\frac{1}{f-2}gS^3\chi_2\right)$$
$$\left.+m^2\left(\Box\chi_3+PS\chi_3-\frac{1}{f-2}PS\chi_3-\frac{1}{f-2}gS^2\chi_3\right)\right\}.$$

Beachtet man, daß $c_2=(f-2)/[2(f-1)]$ und $b_2=[f(2f-1)]/[2(f-1)^2]$, so sieht man leicht, daß von der Gleichung ein großer Teil wegfällt. Es bleibt

$$S\psi+a_2P\chi_2+\frac{(f-1)}{f}\cdot P^2\chi_3-\frac{a_2}{f-1}\cdot gS\chi_2-\frac{1}{f}\cdot g\Box\chi_3$$
$$-\frac{2}{f}gPS\chi_3+\frac{1}{f(f-2)}\cdot g^2S^2\chi_3=0. \tag{1*}$$

Allgemein gilt

$$\chi_n+a_{n+1}P\chi_{n+1}+(f-n)y_nP^2\chi_{n+2}-\frac{a_{n+1}}{f-n}\cdot gS\chi_{n+1}-y_n\Box\chi_{n+2}$$
$$-2y_ngPS\chi_{n+2}+\frac{y_n}{f-n-1}\cdot g^2\cdot S^2\chi_{n+2}=0 \tag{n*}$$

mit $y_n=2/[n(2f-n+1)]$.

Das beweist man durch Induktion: Induktionsanfang ist Gleichung (1*). Es sei nun Gleichung (n*) für ein bestimmtes n schon bewiesen. Anwendung von S auf (n*) gibt mit Hilfe von Gleichung ($n+1$)

$$-a_{n+1}\Box\chi_{n+1}-b_{n+1}m^2\chi_{n+1}-c_{n+1}\left(PS\chi_{n+1}-\frac{1}{f-n-1}gS^2\chi_{n+1}\right)$$
$$-m^2\left(P\chi_{n+2}-\frac{1}{f-n-1}\cdot gS\chi_{n+2}\right)+a_{n+1}\Box\chi_{n+1}+a_{n+1}PS\chi_{n+1}$$
$$+2(f-n)y_n\Box P\chi_{n+2}+(f-n)y_nP^2S\chi_{n+2}-\frac{a_{n+1}}{f-n}\cdot PS\chi_{n+1}$$

$$-\frac{a_{n+1}}{f-n} gS^2 \chi_{n+1} - y_n P\Box\chi_{n+2} - y_n gS\Box\chi_{n+2} - 2y_n P^2 S\chi_{n+2}$$

$$-2y_n g\Box S\chi_{n+2} - 2y_n gPS^2 \chi_{n+2} + \frac{y_n}{f-n-1} \cdot PgS^2 \chi_{n+2}$$

$$+\frac{y_n}{f-n-1} \cdot g(PS^2 \chi_{n+2} + gS^3 \chi_{n+2}) = 0.$$

Jetzt ersetzt man $t \cdot PS\chi_{n+1}$ und $-[t/(f-n-1)]gS^2 \chi_{n+1}$ mit Hilfe der Gleichung $(n+2)$. Dabei ist

$$t = \frac{f-n-1}{f-n} a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{(f-n-1)(f-n+1)}{(f-n)(2f-2n+1)} \cdot a_{n+1}.$$

Dann sieht man nach einfachen Rechnungen unter Benutzung der Rekursionsformeln, daß ein großer Teil der Gleichung fortfällt. Nach Division durch b_{n+1} erhält man schließlich

$$\chi_{n+1} + \frac{1+t \cdot b_{n+2}}{b_{n+1}} \cdot P\chi_{n+2} + \frac{t}{b_{n+1}} \cdot P^2 \chi_{n+3} - \frac{1+t \cdot b_{n+2}}{(f-n-1)b_{n+1}} \cdot gS\chi_{n+2}$$

$$-\frac{t}{(f-n-1)b_{n+1}} \cdot g\Box\chi_{n+3} - \frac{2t}{(f-n-1)b_{n+1}} \cdot gPS\chi_{n+3}$$

$$+\frac{t}{(f-n-1)(f-n-2)b_{n+1}} \cdot g^2 S^2 \chi_{n+3} = 0.$$

Mit den Rekursionsformeln für a_n und b_n zeigt man leicht, daß

$$a_{n+2} = \frac{1+t \cdot b_{n+2}}{b_{n+1}} \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \frac{t}{(f-n-1) \cdot b_{n+1}}.$$

Also gilt auch Gleichung $(n+1*)$, und der Induktionsbeweis ist fertig.

Für $n = f-3, f-2, f-1$ tritt die Gleichung $(n*)$ nicht mehr in voller Länge auf. Aufgrund des Gleichungssystems und der Regeln für die Operation S kommen keine Glieder χ_{f+1}, $S\chi_f$ und $S^2\chi_{f-1}$ darin vor. Insbesondere lautet Gleichung $(f-1*)$: $\chi_{f-1} + a_f P\chi_f = 0$. Daraus und aus Gleichung (f) folgt schließlich $\chi_f = 0$.

Wegen der Struktur der Gleichungen $(n*)$ erhält man nun $\chi_{f-1} = 0$, $\chi_{f-2} = 0, \ldots,$ $\chi_1 \equiv S\psi = 0$. Q.E.D.

Zusatz

Variiert man die angegebene Lagrange-Dichte nur unter der Nebenbedingung der Symmetrie der Tensorfelder, läßt man also die Spurbedingung außer Acht, so erhält man das Gleichungssystem

$$(\Box + m^2)\psi - PS\psi - \tfrac{1}{2}P^2 \chi_2 = 0, \tag{1}$$

$$S\chi_{n-1} + (a_n \Box + b_n m^2)\chi_n + c_n PS\chi_n + m^2 P\chi_{n+1} = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots, f. \tag{n}$$

Hierbei ist $\chi_1 \equiv S\psi$, $\chi_{f+1} \equiv 0$, $c_f = 0$.

Die Konstanten seien rekursiv gegeben durch

$$b_2 = 1, \quad a_n = \frac{2}{n} \cdot b_n \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots, f,$$

$$b_n = \frac{n(n-1)}{(n-2)} \cdot \frac{1}{b_{n-1}} \quad \text{für } n = 3, 4, \ldots, f,$$

$$c_n = \frac{1}{n} \cdot b_n \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots, f-1.$$

Dann folgt aus diesem Gleichungssystem $\chi_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, f$.

Um das einzusehen, beweist man ähnlich wie oben durch Induktion die Gültigkeit der Gleichungen $(n*)$:

$$\chi_n + a_{n+1} P \chi_{n+1} + \frac{1}{n} P^2 \chi_{n+2} = 0.$$

Nimmt man nun die Spurbedingung hinzu, etwa durch die Definition $\chi_2^{i_3 \ldots i_f} \equiv \psi_{i_r}^{i_r i_3 \ldots i_f}$, so beschreibt das Gleichungssystem ein freies Teilchen mit dem Spin f. Es eignet sich jedoch nicht zur Einführung einer Wechselwirkung, da hier nicht alles aus dem Variationsprinzip abgeleitet wird, die Spurbedingung nämlich erst nach Ausführung der Variation hinzugenommen wird.

5. Spinoren

1. Allgemeines

Es wird der metrische Spinor $\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ verwendet mit $\alpha, \beta = 1{,}2$. Sein Inverses ist $\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit lassen sich die Spinorindizes herauf- und herunterziehen: $\varepsilon_{\alpha\beta} a^\beta = a_\alpha$, $\varepsilon^{\alpha\beta} a_\beta = a^\alpha$. Für das Skalarprodukt gilt

$$a^\alpha a_\alpha = a^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} a^\beta = -\varepsilon_{\beta\alpha} a^\alpha a^\beta = -a_\beta a^\beta.$$

Jedem Vierervektor läßt sich mit Hilfe der Matrizen $\sigma^k_{\dot\alpha\beta}$ ein Spinor zuordnen. k läuft von 0 bis 3.

Diese Matrizen sind folgendermaßen definiert:

$$\sigma^0_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man hat dann die Zuordnung $X_{\dot\alpha\beta} = x_k \sigma^k_{\dot\alpha\beta}$.

Insbesondere kann man anstelle des Vierervektors auch den Ableitungsoperator ∂_k einsetzen. Es gilt dann $\partial_{\dot\alpha\beta} = \partial_k \sigma^k_{\dot\alpha\beta}$.

Definiert man $p_{\dot\alpha\beta} = (1/i)\partial_{\dot\alpha\beta}$, so folgt:

$$p_{\dot\alpha\beta} = \frac{1}{i}\partial_{\dot\alpha\beta} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \partial_{\dot 1 1} & \partial_{\dot 1 2} \\ \partial_{\dot 2 1} & \partial_{\dot 2 2} \end{pmatrix}$$

$$\partial^{\dot\alpha}{}_{\beta} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\rho}\partial_{\dot\rho\beta} = \begin{pmatrix} \partial_{\dot 2 1} & \partial_{\dot 2 2} \\ -\partial_{\dot 1 1} & -\partial_{\dot 1 2} \end{pmatrix}, \quad \partial_{\beta}{}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix} \partial_{\dot 2 1} & -\partial_{\dot 1 1} \\ \partial_{\dot 2 2} & -\partial_{\dot 1 2} \end{pmatrix},$$

$$\partial^{\beta\dot\alpha} = \varepsilon^{\beta\rho}\partial_{\rho}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix} \partial_{\dot 2 2} & -\partial_{\dot 1 2} \\ -\partial_{\dot 2 1} & \partial_{\dot 1 1} \end{pmatrix},$$

$$p_{\dot\alpha\beta}\, p^{\beta\dot\gamma} = (-1)\begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} = -\delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma}\,\Box$$

mit

$$\Box = \partial_k \partial^k = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2.$$

Also ist

$$p_{\dot\alpha\beta}\, p^{\beta\dot\gamma} = -p_{\dot\alpha}^{\beta}\, p_{\beta}^{\dot\gamma} = -\delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma}\,\Box.$$

Ferner gilt

$$p_{\dot\alpha\beta}\, p_{\dot\gamma}^{\beta} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\Box, \quad p_{\dot\alpha\beta}\, p^{\beta\dot\alpha} = -2\Box.$$

2. *Eine wichtige Relation*

Gesucht wird eine Beziehung zwischen den Ausdrücken $p^{\dot\beta\sigma}c_{\sigma\gamma}^{\dot\alpha}$ und $p^{\dot\alpha\sigma}c_{\sigma\gamma}^{\dot\beta}$. $c_{\beta\gamma}^{\dot\alpha}$ sei ein beliebiger Spinor. Man bildet

$$\varepsilon_{\dot\alpha\beta}\, p^{\dot\beta\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\alpha} = p_{\dot\tau}^{\sigma}\, c_{\sigma\gamma}^{\dot\tau}$$

und

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\, p^{\dot\alpha\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\beta} = -p_{\dot\tau}^{\sigma}\, c_{\sigma\gamma}^{\dot\tau}.$$

Dann folgt

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(p^{\dot\beta\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\alpha} - p^{\dot\alpha\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\beta}) = 2p_{\dot\tau}^{\sigma}\, c_{\sigma\gamma}^{\dot\tau}.$$

Setzt man

$$g_{\gamma}^{\dot\alpha\dot\beta} = (p^{\dot\beta\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\alpha} - p^{\dot\alpha\sigma} c_{\sigma\gamma}^{\dot\beta}),$$

so hat man für die Komponenten

$$g_{\gamma}^{\dot 1\dot 1} = g_{\gamma}^{\dot 2\dot 2} = 0 \tag{1}$$

und

$$-g_{\gamma}^{\dot 1\dot 2} + g_{\gamma}^{\dot 2\dot 1} = 2p_{\dot\tau}^{\sigma}\, c_{\sigma\gamma}^{\dot\tau}.$$

Die letzte Gleichung besagt aber

$$(p^{\dot{1}\sigma} c^{\dot{2}}_{\sigma\gamma} - p^{\dot{2}\sigma} c^{\dot{1}}_{\sigma\gamma}) = p^{\sigma}_{\dot{\tau}} c^{\dot{\tau}}_{\sigma\gamma} = g^{\dot{2}\dot{1}}_{\gamma} = -g^{\dot{1}\dot{2}}_{\gamma}. \tag{2}$$

Die Komponentengleichungen (1) und (2) kann man zusammenfassen zu

$$g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{\gamma} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} p^{\sigma}_{\dot{\tau}} c^{\dot{\tau}}_{\sigma\gamma}$$

oder

$$p^{\dot{\alpha}\sigma} c^{\dot{\beta}}_{\sigma\gamma} - p^{\dot{\beta}\sigma} c^{\dot{\alpha}}_{\sigma\gamma} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} p^{\sigma}_{\dot{\tau}} c^{\dot{\tau}}_{\sigma\gamma}. \tag{R}$$

Eine wichtige Folgerung erhält man durch die Anwendung von $p_{\beta\dot{\beta}}$ auf (R):

$$p_{\beta\dot{\tau}} p^{\dot{\alpha}\sigma} c^{\dot{\tau}}_{\sigma\gamma} + \Box c^{\dot{\alpha}}_{\beta\gamma} = p^{\dot{\alpha}}_{\beta} p^{\sigma}_{\dot{\tau}} c^{\dot{\tau}}_{\sigma\gamma}. \tag{$\tilde{R}$}$$

Diese Gleichung gilt natürlich für Spinoren beliebiger Stufe.

Auch gilt die zu (R) gespiegelte Gleichung

$$p_{\alpha\dot{\tau}} d^{\dot{\tau}\dot{\gamma}}_{\beta} - p_{\beta\dot{\tau}} d^{\dot{\tau}\dot{\gamma}}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} p^{\sigma}_{\dot{\tau}} d^{\dot{\tau}\dot{\gamma}}_{\sigma}.$$

6. Allgemeines Gleichungssystem zu halbzahligem Spin f

Für $k = 1, \ldots, n-1$ und $n = 1, 2, \ldots$ seien

$$a^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}, \quad g^{\dot{\mu}_{k+1} \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{k;\nu_{k+1} \ldots \nu_n}, \quad \tilde{g}^{\dot{\mu}_{k+1} \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{k;\nu_{k+1} \ldots \nu_n}$$

$$b^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}, \quad h^{\dot{\mu}_{k+1} \ldots \dot{\mu}_n}_{k;\nu_{k+1} \ldots \nu_{n-1}}, \quad \tilde{h}^{\dot{\mu}_{k+1} \ldots \dot{\mu}_n}_{k;\nu_{k+1} \ldots \nu_{n-1}}$$

Spinorfelder, die bezüglich Vertauschung punktierter Indizes unter sich und unpunktierter Indizes unter sich symmetrisch sind. Diese Indizes μ_s, ν_s nehmen die Werte 1 oder 2 an für $s = 1, \ldots, n$. Mit * werden die konjugiert-komplexen Felder gekennzeichnet. Aus der *Lagrange-Dichte*

$$\begin{aligned}
L = {} & m \cdot (b^{*\nu_1 \ldots \nu_n}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}} a^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n} + a^{*\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n} b^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}) \\
& - (b^{*\nu_1 \ldots \nu_n}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}} p_{\nu_n \dot{\mu}_n} b^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} + a^{*\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n} p^{\dot{\mu}_n \nu_n} a^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}) \\
& - (n-1)(b^{*\nu_1 \ldots \nu_n}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}} p^{\dot{\mu}_1}_{\nu_1} \tilde{g}^{\dot{\mu}_2 \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{1;\nu_2 \ldots \nu_n} + a^{*\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n} p^{\dot{\mu}_1}_{\nu_1} \tilde{h}^{\dot{\mu}_2 \ldots \dot{\mu}_n}_{1;\nu_2 \ldots \nu_{n-1}} \\
& + \tilde{h}^{*\nu_2 \ldots \nu_n}_{1;\dot{\mu}_2 \ldots \dot{\mu}_{n-1}} p^{\nu_1}_{\dot{\mu}_1} a^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_n} + \tilde{g}^{*\nu_2 \ldots \nu_{n-1}}_{1;\dot{\mu}_2 \ldots \dot{\mu}_n} p^{\nu_1}_{\dot{\mu}_1} b^{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_n}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}) \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)^2 (n-2)^2 \cdot \ldots (n-k+1)^2 (n-k) \cdot \{-n \cdot \alpha_k \cdot m(h^*_k g_k + g^*_k h_k) \\
& + (n-k)\, \alpha_k (h^*_k p_{\nu_n \dot{\mu}_n} h_k + h^*_k p_{\nu_n \dot{\mu}_n} \tilde{h}_k + \tilde{h}^*_k p_{\nu_n \dot{\mu}_n} h_k + g^*_k p^{\dot{\mu}_n \nu_n} g_k + g^*_k p^{\dot{\mu}_n \nu_n} \tilde{g}_k \\
& + \tilde{g}^*_k p^{\dot{\mu}_n \nu_n} g_k) + n \cdot \beta_k \cdot m(\tilde{h}^*_k \tilde{g}_k + \tilde{g}^*_k \tilde{h}_k) + (n-k)\, \beta_k (\tilde{h}^*_k p_{\nu_n \dot{\mu}_n} \tilde{h}_k \\
& + \tilde{g}^*_k p^{\dot{\mu}_n \nu_n} \tilde{g}_k) + (n-k)(n-k-1)(\tilde{h}^*_k p^{\dot{\mu}_{k+1}}_{\nu_{k+1}} g_{k+1} + \tilde{h}^*_k p^{\dot{\mu}_{k+1}}_{\nu_{k+1}} \tilde{g}_{k+1} \\
& + \tilde{g}^*_k p^{\dot{\mu}_{k+1}}_{\nu_{k+1}} h_{k+1} + \tilde{g}^*_k p^{\dot{\mu}_{k+1}}_{\nu_{k+1}} \tilde{h}_{k+1} + h^*_{k+1} p^{\nu_{k+1}}_{\dot{\mu}_{k+1}} \tilde{g}_k + \tilde{h}^*_{k+1} p^{\nu_{k+1}}_{\dot{\mu}_{k+1}} \tilde{g}_k \\
& + g^*_{k+1} p^{\nu_{k+1}}_{\dot{\mu}_{k+1}} \tilde{h}_k + \tilde{g}^*_{k+1} p^{\nu_{k+1}}_{\dot{\mu}_{k+1}} \tilde{h}_k)\}
\end{aligned}$$

lassen sich *Feldgleichungen* für ein freies Elementarteilchen mit Spin $f=(2n-1)/2$ und Masse m durch Variation unter Symmetriebedingung ableiten:

$$n\cdot m\cdot a-\mathring{p}b-p\tilde{g}_1=0, \tag{I}$$

$$n\cdot m\cdot b-\mathring{p}a-p\tilde{h}_1=0, \tag{II}$$

$$-p^{\sigma}_{\dot{\tau}}a+\beta_1(\mathring{p}\tilde{h}_1+n\cdot m\cdot\tilde{g}_1)+pg_2+p\tilde{g}_2=0, \tag{1.1}$$

$$-p^{\sigma}_{\dot{\tau}}b+\beta_1(\mathring{p}\tilde{g}_1+n\cdot m\cdot\tilde{h}_1)+ph_2+p\tilde{h}_2=0 \tag{1.2}$$

und für $k=2,3,\ldots,n-1$:

$$p^{\sigma}_{\dot{\tau}}\tilde{g}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}\tilde{h}_k+\alpha_k(\mathring{p}h_k-n\cdot mg_k)=0, \tag{k.1}$$

$$p^{\sigma}_{\dot{\tau}}\tilde{h}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}\tilde{g}_k+\alpha_k(\mathring{p}g_k-n\cdot mh_k)=0, \tag{k.2}$$

$$p^{\sigma}_{\dot{\tau}}\tilde{g}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}h_k+\beta_k(\mathring{p}\tilde{h}_k+n\cdot m\tilde{g}_k)+pg_{k+1}+p\tilde{g}_{k+1}=0, \tag{k.3}$$

$$p^{\sigma}_{\dot{\tau}}\tilde{h}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}g_k+\beta_k(\mathring{p}\tilde{g}_k+n\cdot m\tilde{h}_k)+ph_{k+1}+p\tilde{h}_{k+1}=0. \tag{k.4}$$

In der Lagrange-Dichte wurden nach dem Summenzeichen nur noch die wichtigsten Indizes hingeschrieben. Für die Gleichungen wurde die weiter unten definierte Schreibweise gewählt.

Wie üblich gilt die Summationsvorschrift, daß über gleiche obere und untere Indizes zu summieren ist.

Zum Gleichungssystem ist noch zu bemerken, daß es für $n=1,2,\ldots$ keine Hilfsfelder g_n, $\tilde{g}_n$, h_n und $\tilde{h}_n$ enthält. Das ist auch aus der Lagrange-Dichte ersichtlich.

Die Zahlenfaktoren α_k, β_k hängen außer von k auch von n ab:

$$\beta_0=1,\quad \alpha_1=0,$$

$$\beta_k=x_k\cdot\frac{1}{\beta_{k-1}}\quad\text{mit}\quad x_k=\frac{(n-k+1)^2(2n-k)\cdot k}{(n-k)^2\cdot n^2}\quad\text{für } k=1,2,\ldots,$$

$$\alpha_k=\frac{(n-k+1)^2}{(n-k+2)^2}\cdot\beta_{k-2}\quad\text{für}\quad k=2,3,\ldots.$$

Ferner ist zu bemerken, daß für $k>1$ jeweils 2 Hilfsfelder gleichen Transformationsverhaltens auftreten, die durch $\sim$ unterschieden werden. Für $k=1$ tritt nur je ein Hilfsfeld auf, nämlich $\tilde{g}_1$ und $\tilde{h}_1$, während g_1 und h_1 nicht vorkommen. Für $n=2$ ist $\tilde{g}_1$ das Feld c, $\tilde{h}_1$ das Feld d der Fierz-Pauli-Gleichung [3].

Vor der Durchführung des Beweises für das Gleichungssystem sei noch eine *abkürzende Schreibweise* eingeführt durch

$$a:=a^{\dot{\mu}_1\cdots\dot{\mu}_{n-1}}_{\nu_1\cdots\nu_n},\qquad b:=b^{\dot{\mu}_1\cdots\dot{\mu}_n}_{\nu_1\cdots\nu_{n-1}},$$

$$g_k:=g^{\dot{\mu}_{k+1}\cdots\dot{\mu}_{n-1}}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_n},\quad h_k:=h^{\dot{\mu}_{k+1}\cdots\dot{\mu}_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_{n-1}},$$

$$\tilde{g}_k:=\tilde{g}^{\dot{\mu}_{k+1}\cdots\dot{\mu}_{n-1}}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_n},\quad \tilde{h}_k:=\tilde{h}^{\dot{\mu}_{k+1}\cdots\dot{\mu}_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_{n-1}},\quad k=1,2,\ldots,$$

für die Felder.

Seien ferner

$$e_k := e^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_{n-1}}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_n} \quad \text{und} \quad f_k := f^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_{n-1}} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots$$

beliebige symmetrische Spinorfelder, dann sei der Operator $p^\sigma_{\dot\tau}$ definiert durch

$$p^\sigma_{\dot\tau} e_k := p^{\nu_{k+1}}_{\dot\mu_{k+1}} e^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_{n-1}}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_n},$$

$$p^\sigma_{\dot\tau} f_k := p^{\nu_{k+1}}_{\dot\mu_{k+1}} f^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_{n-1}},$$

der Operator p durch

$$pe_k := \sum_{s,r=k}^{s=n,r=n-1} p^{\dot\mu_r}_{\nu_s} e^{\dot\mu_k\cdots\dot\mu_{r-1}\dot\mu_{r+1}\cdots\dot\mu_{n-1}}_{k;\nu_k\cdots\nu_{s-1}\nu_{s+1}\cdots\nu_n} \quad \text{hier für } k = 1, 2, \ldots,$$

$$pf_k := \sum_{s,r=k}^{s=n,r=n-1} p^{\dot\mu_s}_{\nu_r} f^{\dot\mu_k\cdots\dot\mu_{s-1}\dot\mu_{s+1}\cdots\dot\mu_n}_{k;\nu_k\cdots\nu_{r-1}\nu_{r+1}\cdots\nu_{n-1}},$$

der Operator $\mathring{p}$ sei schließlich definiert durch

$$\mathring{p}e_k := \sum_{l=k+1}^{n} p^{\dot\mu_l\nu_l} e^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_{l-1}\dot\mu_{l+1}\cdots\dot\mu_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_n},$$

$$\mathring{p}f_k := \sum_{l=k+1}^{n} p_{\nu_l\dot\mu_l} f^{\dot\mu_{k+1}\cdots\dot\mu_n}_{k;\nu_{k+1}\cdots\nu_{l-1}\nu_{l+1}\cdots\nu_n}.$$

Wie man leicht sieht, gelten für diese Operatoren folgende *Regeln*:

$\mathring{p}$ kommutiert mit p und mit $p^\sigma_{\dot\tau}$. (A.1)

Bei zusammengesetzten Operationen ist zu beachten, daß $\mathring{p}e_k$, pe_k, $p^\sigma_{\dot\tau}e_k$ der Reihe nach dasselbe Transformationsverhalten haben wie f_k, e_{k-1}, e_{k+1}. Also operiert p auf $\mathring{p}e_k$ wie auf f_k, auf pe_k wie auf e_{k-1} usw.

Es gilt

$$p^\sigma_{\dot\tau} pe_k = (2n - 2k + 1)\Box e_k + pp^\sigma_{\dot\tau} e_k \quad \text{für } k < n - 1$$

und

$$p^\sigma_{\dot\tau} pe_{n-1} = 3\Box e_{n-1} \tag{A.2}$$

und dasselbe mit f_k statt e_k.

Mit der im Abschnitt über Spinorrechnung hergeleiteten Gleichung ($\tilde{R}$) erhält man

$$\mathring{p}\mathring{p}e_k = -(n-k)^2\Box e_k + pp^\sigma_{\dot\tau} e_k \quad \text{für } k < n - 1$$

und

$$\mathring{p}\mathring{p}e_{n-1} = -\Box e_{n-1} \tag{A.3}$$

und dasselbe mit f_k statt e_k.

Beim Beweis für das Gleichungssystem wird folgende Gleichung gebraucht:

$$-\alpha_k \mathring{p} h_k - \beta_k \mathring{p} \tilde{h} = \frac{1}{n \cdot m} p \mathring{p} (h_{k+1} + \tilde{h}_{k+1}) + \frac{(\beta_k - \alpha_k)}{n \cdot m} (-(n-k)^2 \Box + p p_\tau^\sigma) \tilde{g}_k \quad \text{für } k < n-1$$

und

$$-\alpha_{n-1} \mathring{p} h_{n-1} - \beta_{n-1} \mathring{p} \tilde{h}_{n-1} = -\frac{(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})}{n \cdot m} \Box \tilde{g}_{n-1}. \tag{B}$$

Sie entsteht durch Subtraktion der Gleichung (k.2) von (k.4) und Anwendung von $\mathring{p}$ unter Berücksichtigung von (A.2). Eine entsprechende Gleichung läßt sich aus (k.1) und (k.3) herleiten.

Beweis für das Gleichungssystem

Es wird gezeigt, daß Hilfsfelder g_k, $\tilde{g}_k$, h_k, $\tilde{h}_k$ verschwinden.

Anwendung von p_τ^σ auf Gleichung (I) gibt $n \cdot m p_\tau^\sigma a - \mathring{p} p_\tau^\sigma b - p_\tau^\sigma \tilde{g}_1 = 0$. $p_\tau^\sigma a$ und $p_\tau^\sigma b$ werden hieraus mit Gleichung (1.1) und (1.2) eliminiert:

$$n \cdot m \cdot \beta_1 (\mathring{p} h_1 + n \cdot m \tilde{g}_1) + n \cdot m p g_2 + n \cdot m p \tilde{g}_2$$
$$- \beta_1 (\mathring{p} \mathring{p} \tilde{g}_1 + n \cdot m \mathring{p} \tilde{h}_1) - p \mathring{p} h_2 - p \mathring{p} \tilde{h}_2 - p_\tau^\sigma p \tilde{g}_1 = 0.$$

Nun unterscheidet man die Fälle $n = 2$ und $n > 2$.

1. Fall: $n = 2$

In diesem Fall kommt in der letzten Gleichung g_2, $\tilde{g}_2$, h_2, $\tilde{h}_2$ garnicht vor, ist $\mathring{p} \mathring{p} \tilde{g}_1 = -\Box \tilde{g}_1$, $p_\tau^\sigma p \tilde{g}_1 = 3 \Box \tilde{g}_1$ und $\beta_1 = 3$. So folgt $\tilde{g}_1 = 0$. Entsprechend folgert man, ausgehend von Gleichung (II), daß $\tilde{h}_1 = 0$. Damit ist der Beweis für $n = 2$, d.h. für die Gleichung zum Spin $\frac{3}{2}$ (Fierz-Pauli-Gleichung), fertig.

2. Fall: $n > 2$

Dann wird die obige Gleichung mittels (A.2) und (A.3) zu

$$n^2 \cdot m^2 \cdot \beta_1 \cdot \tilde{g}_1 + n \cdot m \cdot p \tilde{g}_2 - (\beta_1 + 1) p p_\tau^\sigma \tilde{g}_1 - p \mathring{p} (h_2 + \tilde{h}_2) + n \cdot m \cdot p g_2 = 0.$$

Nun ist $\beta_1 + 1 = 1/\alpha_2$, und wegen Gleichung (2.1) ist die Summe der vier letzten Glieder gleich Null. Daher folgt

$$n \cdot m \cdot \beta_1 \tilde{g}_1 + p \tilde{g}_2 = 0. \tag{1*}$$

Allgemein gilt für $k < n - 1$

$$n \cdot m \cdot \beta_k \tilde{g}_k + p \tilde{g}_{k+1} = 0. \tag{k*}$$

Das läßt sich durch Induktion beweisen. Induktionsanfang ist Gleichung (1.*). Sei also ($k - 1$*) schon bewiesen, es gelte also

$$n \cdot m \cdot \beta_{k-1} \cdot \tilde{g}_{k-1} + p \tilde{g}_k = 0.$$

Hierauf wendet man p_{τ}^{σ} an:

$$p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{k-1}+\frac{1}{n\cdot m\cdot\beta_{k-1}}([2n-2k+1]\cdot\Box+pp_{\tau}^{\sigma})\tilde{g}_k=0.$$

Mit Gleichung (k.3) wird $p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{k-1}$ ersetzt:

$$-\alpha_k\mathring{p}h_k-\beta_k\mathring{p}\tilde{h}_k-n\cdot m\cdot\beta_k\tilde{g}_k-pg_{k+1}-p\tilde{g}_{k+1}$$

$$+\frac{2(n-k)+1}{n\cdot m\cdot\beta_{k-1}}\Box\tilde{g}_k+\frac{1}{n\cdot m\cdot\beta_{k-1}}pp_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_k=0.$$

Die beiden ersten Glieder der letzten Gleichung werden durch Gleichung (B) ersetzt:

$$\frac{1}{n\cdot m}p\mathring{p}(h_{k+1}+\tilde{h}_{k+1})+\frac{1}{n\cdot m}(\beta_k-\alpha_k)pp_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_k-\frac{(n-k)^2}{n\cdot m}(\beta_k-\alpha_k)\Box\tilde{g}_k$$

$$-n\cdot m\cdot\beta_k\tilde{g}_k-pg_{k+1}-p\tilde{g}_{k+1}+\frac{1}{n\cdot m\cdot\beta_{k-1}}pp_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_k+\frac{2(n-k)+1}{n\cdot m\cdot\beta_{k-1}}\Box\tilde{g}=0.$$

Man berechnet nun

$$\beta_{k-1}(\beta_k-\alpha_k)=x_k-\beta_{k-1}\alpha_k=x_k-\frac{(n-k+1)^2}{(n-k+2)^2}\cdot x_{k-1}=\frac{2(n-k)+1}{(n-k)^2}.$$

Damit entfällt $\Box\tilde{g}_k$ aus der letzten Gleichung. Ferner berechnet man

$$(\beta_k-\alpha_k)+\frac{1}{\beta_{k-1}}=\frac{1}{\beta_{k-1}}\cdot\frac{(n-k+1)^2}{(n-k)^2}=\frac{1}{\alpha_{k+1}}.$$

Damit wird obige Gleichung schließlich zu

$$p\mathring{p}(h_{k+1}+\tilde{h}_{k+1})-n\cdot m\cdot pg_{k+1}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}pp_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_k-n^2m^2\beta_k\tilde{g}_k-n\cdot mp\tilde{g}_{k+1}=0.$$

Die Summe der ersten vier Glieder ist Null wegen Gleichung ($k+1.1$). Damit hat man dann $n\cdot m\cdot\beta_k\tilde{g}_k+p\tilde{g}_{k+1}=0$ gezeigt, und der Induktionsbeweis für Gleichung ($k*$) mit $k<n-1$ ist fertig.

Jetzt beweist man, daß $\tilde{g}_{n-1}=0$. Man wendet p_{τ}^{σ} auf Gleichung ($n-2*$) an und erhält

$$p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{n-2}+\frac{1}{n\cdot m\cdot\beta_{n-2}}\cdot 3\Box\tilde{g}_{n-1}=0.$$

Mit Gleichung ($n-1.3$) wird $p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{n-2}$ ersetzt:

$$-\alpha_{n-1}\mathring{p}h_{n-1}-\beta_{n-1}\mathring{p}\tilde{h}_{n-1}-n\cdot m\beta_{n-1}\tilde{g}_{n-1}+\frac{3}{n\cdot m\cdot\beta_{n-2}}\Box\tilde{g}_{n-1}=0.$$

Hier werden nun die ersten beiden Glieder durch Gleichung (B) ersetzt:

$$-\frac{1}{n\cdot m}(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})\,\Box\tilde{g}_{n-1}-n\cdot m\beta_{n-1}\,\tilde{g}_{n-1}+\frac{3}{n\cdot m\cdot\beta_{n-2}}\,\Box\tilde{g}_{n-1}=0.$$

Nun ist $\beta_{n-2}(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})=3$, und $\Box\tilde{g}_{n-1}$ fällt aus der Gleichung heraus. Damit folgt $\tilde{g}_{n-1}=0$.

Wegen $(k*)$ sind dann alle $\tilde{g}_k=0$ für $k=1, 2, \ldots$. Ganz entsprechend erhält man $\tilde{h}_k=0$ für alle k, wenn man von Gleichung (II) ausgeht.

Nun folgt aus Gleichung $(n-1.3)$ $\mathring{p}h_{n-1}=0$, und damit aus Gleichung $(n-1.1)$ $g_{n-1}=0$, damit aus Gleichung $(n-2.3)$ $\mathring{p}h_{n-2}=0$, und damit aus $(n-2.1)$ $g_{n-2}=0$ usw. Man hat also $g_k=0$ für alle k. Gleichung $(k.2)$ liefert dann $h_k=0$ für alle k. Q.E.D.

7. Andere Formen des Gleichungssystems zu halbzahligem Spin f

Das bewiesene Gleichungssystem läßt sich leicht auf andere Formen transformieren, die sich durch die Art der Verknüpfung der Felder zu invarianten Ausdrücken der Lagrange-Dichte unterscheiden. Bei den unten verwendeten Transformationen bleiben offensichtlich die bewiesenen Eigenschaften des Gleichungssystems bestehen.

Die α-β-Form

Ausgangspunkt ist also das oben bewiesene Gleichungssystem zum Spin $f=(2n-1)/2$, wobei $n=1, 2, \ldots$, das hier nach seinen Zahlenfaktoren 'α-β-Form' genannt werden möge. Es sei hier noch einmal in Kurzform dargestellt:

$$n\cdot m\cdot a-\mathring{p}b-p\tilde{g}_1=0, \tag{I}$$

$$-p\overset{\sigma}{\tau}a+\frac{2n-1}{(n-1)^2}(\mathring{p}\tilde{h}_1+n\cdot m\cdot\tilde{g}_1)+pg_2+p\tilde{g}_2=0, \tag{1.1}$$

$$p\overset{\sigma}{\tau}\tilde{g}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}\tilde{h}_k+\alpha_k(\mathring{p}h_k-n\cdot m\cdot g_k)=0, \tag{k.1}$$

$$p\overset{\sigma}{\tau}\tilde{g}_{k-1}+\alpha_k\mathring{p}h_k+\beta_k(\mathring{p}\tilde{h}_k+n\cdot m\tilde{g}_k)+pg_{k+1}+p\tilde{g}_{k+1}=0 \tag{k.3}$$

für $k=2, 3, \ldots, n-1$. Es ist $g_n=\tilde{g}_n=h_n=\tilde{h}_n=0$.

Die Gleichungen (II), (1.2), $(k.2)$ und $(k.4)$ sind hieraus zu erhalten, wenn man überall die Rollen von a und b, h_k und g_k, $\tilde{g}_k$ und $\tilde{h}_k$ miteinander vertauscht. Es war

$$\beta_0=1,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_k=\frac{(n-k+1)^2}{(n-k+2)^2}\cdot\beta_{k-2}\quad \text{für } k=2, 3, \ldots,$$

$$b_k=x_k\cdot\frac{1}{\beta_{k-1}}\quad \text{mit}\quad x_k=\frac{(n-k+1)^2(2n-k)\cdot k}{(n-k)^2\cdot n^2}\quad \text{für } k=1, 2, \ldots.$$

Das Transformationspaket

Mit dieser Bezeichnung sei die Summe der folgenden Transformationsschritte gemeint.

1. Transformation:

$$g_k=g_k'-\tilde{g}_k,\ h_k=h_k'-\tilde{h}_k,\ k\geqslant 2$$

Damit verschwindet $\tilde{g}_k$ aus $(k-1.3)$, bzw. aus (1.1) für $k=2$. $\tilde{h}_k$ verschwindet aus $(k-1.4)$, bzw. aus (1.2) für $k=2$. Nach Ausführung der Transformation ergibt $(k.1) - \alpha_k/\beta_k \cdot (k.3)$:

$$p_{\dagger}^{\sigma}\tilde{g}_{k-1} + \alpha_k \mathring{p} h_k - \frac{n \cdot m \cdot \alpha_k \cdot \beta_k}{\beta_k - \alpha_k} g_k - \alpha_k \mathring{p}\tilde{h}_k - \frac{\alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}(p g_{k+1} + p\tilde{g}_{k+1}) = 0,$$

und $(k.3) - (k.1)$:

$$(\beta_k - \alpha_k)\mathring{p}\tilde{h}_k + n \cdot m(\beta_k - \alpha_k)\tilde{g}_k + n \cdot m \cdot \alpha_k g_k + (p g_{k+1} + p\tilde{g}_{k+1}) = 0.$$

Entsprechendes gilt für die Gleichungen $(k.2)$ und $(k.4)$. An den transformierten Größen g_k und h_k wurde der Strich $'$ wieder fortgelassen. Das gilt auch für die folgenden Transformationen.

2. Transformation: $\tilde{g}_k = \tilde{g}_k' - z_k \cdot g_k$, $\tilde{h}_k = \tilde{h}_k' - z_k \cdot h_k$ mit $z_k = \alpha_k/(\beta_k - \alpha_k)$
Außer Veränderungen in den Gleichungen $(k.1)$ bis $(k.4)$ kommt nun in $(k+1.1)$ und $(k+1.3)$ der Ausdruck $-z_k p_{\dagger}^{\sigma} g_k$, und in $(k+1.2)$ und $(k+1.4)$ der Ausdruck $-z_k p_{\dagger}^{\sigma} h_k$ hinein.

3. Transformation: $\tilde{g}_k = -z_k \cdot \tilde{g}_k'$, $\tilde{h}_k = -z_k \tilde{h}_k'$
Es folgen weitere Veränderungen in $(k.1)$ bis $(k.4)$.

$(k+1.1)$ und $(k+1.3)$ beginnen nun mit $-z_k p_{\dagger}^{\sigma}(g_k + \tilde{g}_k)$,

$(k+1.2)$ und $(k+1.4)$ beginnen nun mit $-z_k p_{\dagger}^{\sigma}(h_k + \tilde{h}_k)$.

Weitere Transformationen:

$$g_{k+i} = -\frac{1}{z_k} \cdot g_{k+i}' \quad \text{mit } i = 1, 3, 5, \ldots \text{ und } k + i \leqslant n - 1.$$

Ebenso werden auch $\tilde{g}_{k+i}$, h_{k+i}, $\tilde{h}_{k+i}$ transformiert.

$$g_{k+j} = -z_k \cdot g_{k+j}' \quad \text{mit } j = 2, 4, 6, \ldots \text{ und } k + j \leqslant n - 1.$$

Ebenso werden $\tilde{g}_{k+j}$, h_{k+j}, $\tilde{h}_{k+j}$ transformiert.

Neues Gleichungssystem

Nach Anwendung eines solchen Transformationspaketes auf die Ausgangsgleichung für ein fest gewähltes k erhält man das neue Gleichungssystem

$$n \cdot m \cdot a - \mathring{p} b - p\tilde{g}_1 = 0, \tag{I}$$

$$-p_{\dagger}^{\sigma} a + \frac{2n-1}{(n-1)^2}(\mathring{p}\tilde{h}_1 + n \cdot m \cdot \tilde{g}_1) + p g_2 + p\tilde{g}_2 = 0 \tag{1.1}$$

usw. wie bisher. Erst Gleichung $(k-1.3)$ ändert sich:

$$p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{k-2}+\alpha_{k-1}\mathring{p}h_{k-1}+\beta_{k-1}(\mathring{p}\tilde{h}_{k-1}+n\cdot m\cdot\tilde{g}_{k-1})+pg_k=0, \qquad (k-1.3)$$

$$p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{k-1}+\alpha_k\cdot z_k\cdot\mathring{p}\tilde{h}_k+\beta_k\cdot z_k(\mathring{p}h_k-n\cdot m\cdot g_k)+pg_{k+1}+p\tilde{g}_{k+1}=0, \qquad (k.1)$$

$$\alpha_k\cdot z_k\cdot\mathring{p}h_k+\alpha_k\cdot z_k(\mathring{p}\tilde{h}_k+n\cdot m\cdot\tilde{g}_k)+pg_{k+1}+p\tilde{g}_{k+1}=0, \qquad (k.3)$$

$$p_{\tau}^{\sigma}(g_k+\tilde{g}_k)+\alpha'_{k+1}\mathring{p}\tilde{h}_{k+1}+\alpha'_{k+1}(\mathring{p}h_{k+1}-n\cdot m\cdot g_{k+1})=0, \qquad (k+1.1)$$

$$p_{\tau}^{\sigma}(g_k+\tilde{g}_k)+\alpha'_{k+1}\mathring{p}h'_{k+1}+\beta'_{k+1}(\mathring{p}\tilde{h}_{k+1}+n\cdot m\cdot\tilde{g}_{k+1})+pg_{k+2}+p\tilde{g}_{k+2}=0, \qquad (k+1.3)$$

$$p_{\tau}^{\sigma}\tilde{g}_{k+1}+\alpha'_{k+2}\mathring{p}\tilde{h}_{k+2}+\alpha'_{k+2}(\mathring{p}h_{k+2}-n\cdot m\cdot g_{k+2})=0 \qquad (k+2.1)$$

usw. wie bisher, aber nun mit neuen Konstanten.

Die neuen Konstanten sind

$$\alpha'_{k+i}=\frac{\alpha_{k+i}}{(z_k)^2},\quad \beta'_{k+i}=\frac{\beta_{k+i}}{(z_k)^2}\quad \text{für } i=1,3,5,\ldots \text{ und } k+i\leqslant n-1,$$

$$\alpha'_{k+j}=z_k^2\cdot\alpha_{k+j},\quad \beta'_{k+j}=z_k^2\cdot\beta_{k+j}\quad \text{für } j=2,4,6,\ldots \text{ und } k+j\leqslant n-1.$$

Anzahl der Formen

Man hat durch das Transformationsverfahren nun eine Anzahl verschiedener Formen des Gleichungssystems gefunden (und bewiesen!), die sich durch die verschieden möglichen Verknüpfungen der Hilfsfelder untereinander unterscheiden. Neben der Ausgangsleichung hat man also $(n-2)$ verschiedene Formen, die man nach Anwendung des Transformationspaketes für nur ein k $(k=2,3,\ldots,n-1)$ erhält, $\binom{n-2}{2}$ verschiedene Formen, die man nach Anwendung des Transformationspaketes für je zwei verschiedene k erhält, usw. Insgesamt hat man also $\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}=2^{n-2}$ Formen.

Die γ-δ-Form

Dabei zeichnen sich das Ausgangsgleichungssystem und das letzte Gleichungssystem, das man nach Anwendung der Transformationen für alle $k=2,3,\ldots,n-1$ bekommt, durch eine besonders gleichförmige Struktur aus. Dieses letzte Gleichungssystem lautet:

$$n\cdot m\cdot a-\mathring{p}b-p\tilde{g}_1=0, \qquad (\mathrm{I})$$

$$-p_{\tau}^{\sigma}\alpha+\frac{2n-1}{(n-1)^2}(\mathring{p}\tilde{h}_1+n\cdot m\cdot\tilde{g}_1)+pg_2=0, \qquad (1.1)$$

$$p_{\tau}^{\sigma}(g_{k-1}+\tilde{g}_{k-1})+\gamma_k\cdot\mathring{p}\tilde{h}_k+\delta_k\cdot(\mathring{p}h_k-n\cdot m\cdot g_k)+pg_{k+1}=0, \qquad (k.1)$$

$$\gamma_k\mathring{p}h_k+\gamma_k\cdot(\mathring{p}\tilde{h}_k+n\cdot m\cdot\tilde{g}_k)+pg_{k+1}=0 \qquad (k.3)$$

für $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Ferner ist $g_1 = h_1 = g_n = \tilde{g}_n = h_n = \tilde{h}_n = 0$. Die Koeffizienten γ_k, δ_k ergeben sich aus dem Transformationsverfahren als

$$\gamma_2 = \alpha_2 \cdot z_2, \quad \delta_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \cdot \gamma_k,$$

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k}{z_k} \cdot \frac{z_k^2 \cdot z_{k-2} \ldots z_s^2}{z_{k-1}^2 \cdot z_{k-3}^2 \ldots z_t^2} \quad \begin{cases} s = 2,\ t = 3 \text{ für gerades } k \\ t = 2,\ s = 3 \text{ für ungerades } k. \end{cases}$$

Dazu berechnet man

$$z_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} = \frac{x_{k-1} \cdot (n-k+1)^2}{x_k \cdot (n-k+2)^2 - x_{k-1}(n-k+1)^2}$$

$$= \frac{x_{k-1}(n-k+1)^2 \cdot (n-k)^2}{(2n-2k+1) \cdot (n-k+2)^2} = \frac{(n-k)^2 \cdot (2n-k+1)(k-1)}{n^2 \cdot (2n-2k+1)}.$$

Man definiert

$$y_k := \frac{z_k^2}{x_{k-1}} = \frac{(n-k)^4 (n-k+1)^2 (2n-k+1)(k-1)}{n^2 \cdot (n-k+2)^2 (2n-2k+1)^2}.$$

Damit erhält man für die Konstanten

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k}{z_k} \cdot \frac{x_{k-1} \cdot x_{k-3} \ldots}{x_{k-2} \cdot x_{k-4} \ldots} \cdot \frac{y_k \cdot y_{k-2} \ldots}{y_{k-1} \cdot y_{k-3} \ldots} = \frac{2(n-k)+1}{(n-k)^2} \cdot \frac{y_k \cdot y_{k-2} \ldots}{y_{k-1} \cdot y_{k-3} \ldots}$$

(die Produktreihen gehen hier abwärts bis x_1 bzw. y_2) und

$$\delta_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \cdot \gamma_k = \frac{x_k}{x_{k-1}} \cdot \frac{(n-k+2)^2}{(n-k+1)^2} \cdot \gamma_k = \frac{(2n-k) \cdot k \cdot (n-k+1)^2}{(2n-k+1)(k-1) \cdot (n-k)^2} \cdot \gamma_k.$$

Natürlich läßt sich diese 'γ-δ-Form' des Gleichungssystems auch direkt beweisen. Man hat dann im wesentlich durch Induktion zu zeigen, daß folgende Gleichung gilt:

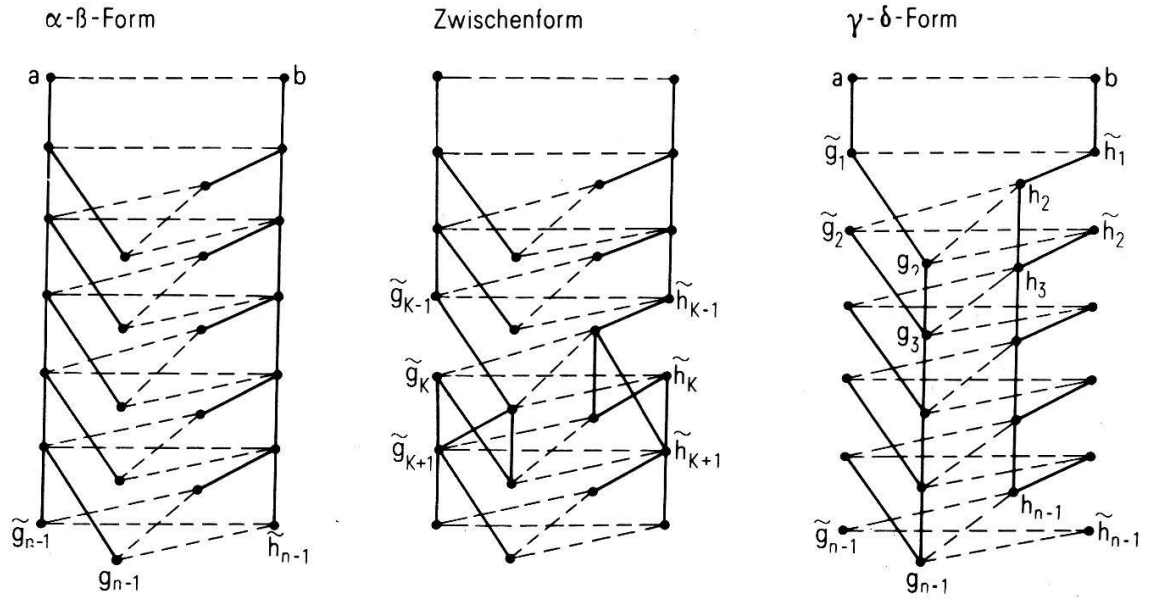
$$k \cdot (2n-k)(g_k + \tilde{g}_k) - n \cdot \gamma_{k+1} \cdot p(g_{k+1} + \tilde{g}_{k+1}) = 0 \qquad (k*)$$

für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Verknüpfungsschema

Die Strukturen der verschiedenen Gleichungstypen lassen sich graphisch veranschaulichen: Dicke Punkte stellen die einzelnen Spinorfelder dar. Verbindungslinien bedeuten, daß die durch sie verbundenen Felder in der Lagrange-Dichte zu invarianten Gliedern zusammengefaßt sind, und zwar das eine mit dem raumgespiegelten, konjugiert-komplexen des anderen und umgekehrt. (Um der Eineindeutigkeit willen muß man noch jedem Punkt den aus dem betreffenden Feld und seinem raumgespiegelten gebildeten invarianten Ausdruck zuordnen.)

Die Strukturen der Gleichungen sind dann leicht abzulesen: In der Gleichung, in der ein bestimmtes Feld mit dem Faktor m vorkommen soll, treten die mit ihm durch gestrichelte Linien verbundenen Felder nur in Verbindung mit dem Operator $\mathring{p}$, die mit ihm durch ausgezogene Linien verbundenen Felder nur in Verbindung mit den Operatoren p oder $p_{\mp}^{\sigma}$ auf.



Figur 1
Verknüpfungsstrukturen spezieller Gleichungssysteme. In der Gleichung, die ein bestimmtes Feld ohne Ableitungsoperator enthält, kommen die im Diagramm mit ihm verbundenen Felder ebenfalls vor.

In Figur 1 sind auf diese Weise die α-β-Form, die γ-δ-Form und eine Zwischenform (nach einmaliger Anwendung des Transformationspaketes auf die α-β-Form) dargestellt.

In der Gleichung, die ein bestimmtes Feld ohne Ableitungsoperator enthält, kommen die im Diagramm mit ihm verbundenen Felder ebenfalls vor.

8. Allgemeinere Form des Gleichungssystems für halbzahligen Spin

Auf das Gleichungssystem von Kap. 6, die 'α-β-Form', werden folgende Transformationen ausgeübt:

1. Transf.

$$g_k = g_k' - \lambda_k \tilde{g}_k, \quad h_k = h_k' - \lambda_k \tilde{h}_k;$$

2. Transf.

$$\tilde{g}_k = \tilde{g}_k' - \mu_k g_k', \quad \tilde{h}_k = h_k' - \mu_k h_k'.$$

für $k = 2, 3, \ldots, n-1$ und beliebige komplexe λ_k und μ_k. Dabei bleiben offensichtlich die bewiesenen Eigenschaften des Systems erhalten. Im Hinblick auf die Lagrange-Dichte bilde man die Linearkombinationen $(k.3') = (k.3) - \lambda_k(k.1)$ und $(k.1') = (k.1) - \mu_k(k.3')$ aus den transformierten Gleichungen. Entsprechendes gilt für die Gleichungen

(k.2) und (k.4). Läßt man nun an allen neuen Größen die Striche wieder fort, dann lautet die $2(n-2)$-parametrige Form des Gleichungssystems:

$$n\cdot m\cdot a - \mathring{p}b - p\tilde{g}_1 = 0, \tag{I}$$

$$-p^{\sigma}_{\dagger}\, a + \frac{2n-1}{(n-1)^2}(\mathring{p}\tilde{h}_1 + n\cdot m\cdot\tilde{g}_1) + (1-\mu_2+\mu_2\lambda_2)pg_2 + (1-\lambda_2)p\tilde{g}_2 = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
&(1-\mu_k+\mu_k\lambda_k)(p^{\sigma}_{\dagger}\tilde{g}_{k-1} - \mu_{k-1}p^{\sigma}_{\dagger}g_{k-1})\\
&\quad + [\mu_k^2\beta_k + (1-2\mu_k+2\mu_k\lambda_k - 2\mu_k^2\lambda_k + \mu_k^2\lambda_k^2)\alpha_k]\mathring{p}h_k\\
&\quad + [\mu_k^2\beta_k - (1+2\mu_k\lambda_k+\mu_k^2\lambda_k^2)\alpha_k]n\cdot mg_k + [(\lambda_k+\mu_k\lambda_k^2)\alpha_k - \mu_k\beta_k]n\cdot m\cdot\tilde{g}_k\\
&\quad + [(1-\lambda_k+2\mu_k\lambda_k-\mu_k\lambda_k^2)\alpha_k - \mu_k\beta_k]\mathring{p}\tilde{h}_k\\
&\quad - \mu_k p([1-\mu_{k+1}+\mu_{k+1}\lambda_{k+1}]g_{k+1} + [1-\lambda_{k+1}]\tilde{g}_{k+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{k.1}$$

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda_k)(p^{\sigma}_{\dagger}\tilde{g}_{k-1} - \mu_{k-1}p^{\sigma}_{\dagger}g_{k-1}) + [\beta_k - (2\lambda_k - \lambda_k^2)\alpha_k]\mathring{p}\tilde{h}_k + [\beta_k - \lambda_k^2\alpha_k]n\cdot m\tilde{g}_k\\
&\quad + [(1-\lambda_k+2\mu_k\lambda_k-\mu_k\lambda_k^2)\alpha_k - \mu_k\beta_k]\mathring{p}h_k + [(\lambda_k+\mu_k\lambda_k^2)\alpha_k - \mu_k\beta_k]n\cdot mg_k\\
&\quad + p([1-\mu_{k+1}+\mu_{k+1}\lambda_{k+1}]g_{k+1} + [1-\lambda_{k+1}]\tilde{g}_{k+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{k.3}$$

Dabei ist $g_1 = h_1 = g_n = h_n = \tilde{g}_n = \tilde{h}_n = 0$. Die Gleichungen (II), (1.2), (k.2), und (k.4) entstehen aus den oben angegebenen, wenn man der Reihe nach die Buchstaben a, b, g, h durch b, a, h, g ersetzt.

In diesem Gleichungssystem sind im allgemeinen alle möglichen Verknüpfungen zwischen den einzelnen Gleichungen hergestellt. Diese Form des Systems sei hier kurz 'Maximalform' genannt. Sie wird für unendlich viele Werte von λ_k und μ_k angenommen und läßt sich weiter etwa durch das Verhältnis der Koeffizienten von $\mathring{p}h_k$ und $n\cdot m\cdot g_k$ sowie $\mathring{p}\tilde{h}_k$ und $n\cdot m\cdot\tilde{g}_k$ in (k.1) klassifizieren.

Man kann nun Bedingungen stellen, daß verschiedene dieser Verknüpfungen aufgebrochen werden sollen. Verlangt man z.B., daß in Gleichung (k.1) kein pg_{k+1} und $p\tilde{g}_{k+1}$ mehr vorkommt, so folgt $\mu_k = 0$.

Fordert man, daß in (k.3) kein $p^{\sigma}_{\dagger}(\tilde{g}_{k-1} - \mu_{k-1}g_{k-1})$ auftritt, gelangt man zu $\lambda_k = 1$.

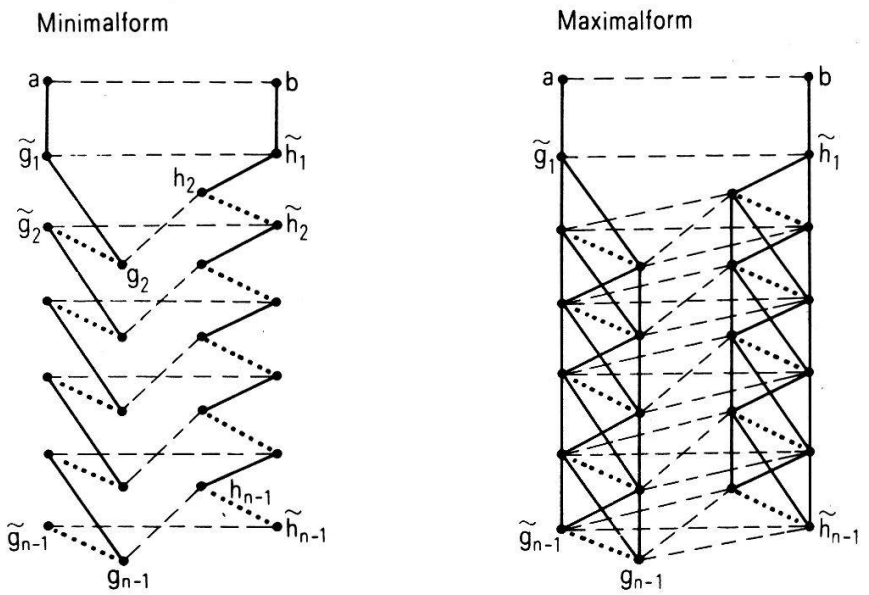
Stellt man beide Bedingungen zugleich, so gilt $\mu_k = 0$ und $\lambda_k = 1$, und es verschwindet außerdem $\mathring{p}h_k$ in (k.3). Hier hat man also durch zwei Bedingungen sogar drei Verknüpfungen aufbrechen können. Die Form des Gleichungssystems, bei der für alle k $\mu_k = 0$ und $\lambda_k = 1$ gewählt werden, sei hier 'Minimalform' genannt. Sie hat die relativ einfachen Zahlenfaktoren α_k und $(\beta_k - \alpha_k)$.

Mit diesen drei Fällen hat man schon alle Möglichkeiten der Auflockerung der Verknüpfungen, soweit von λ_k und μ_k abhängig, zwischen den Gleichungen (k) und ($k-1$) sowie ($k+1$) erfaßt, wenn man von den Fällen absieht, die aus den betrachteten durch Vertauschung der Bezeichnung der Felder g_k und $\tilde{g}_k$ sowie h_k und $\tilde{h}_k$ hervorgehen, und wenn man bemerkt, daß der Fall $\mu_k = 0$ zusammen mit der Bedingung $1 = \mu_k(1-\lambda_k)$ (d.h. kein $p^{\sigma}_{\dagger}(\tilde{g}_{k-1} - \mu_{k-1}g_{k-1})$ in (k.1)) nicht möglich ist.

Nimmt man in den beiden ersten Fällen für alle k die Bedingung hinzu, daß in (k.3) kein g_k mehr auftreten soll, so führt das im ersten Fall zur 'α-β-Form', im zweiten bis auf Normierung zur 'γ-δ-Form' mit $\lambda_k = 1$ und $\mu_k = \alpha_k/(\beta_k - \alpha_k)$.

Auf verschiedene Weise kann auch die Verknüpfung der Gleichungen (k.1) bis (k.4) unter sich aufgelockert werden. Das soll jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden.

Zum Schluß seien noch die Verhältnisse bei der 'Minimalform' und der 'Maximalform' graphisch dargestellt (Figur 2).



Figur 2
Formen minimaler und maximaler Verknüpfung. Die einzelnen Felder sind durch dicke Punkte dargestellt. Die mit einem bestimmten Felde durch eine Linie verbundenen Felder treten alle in derjenigen Gleichung auf, die durch Variation des betreffenden raumgespiegelten, konjugiert-komplexen Feldes entsteht. Ein durch eine gepunktete Linie verbundenes Feld tritt in der Gleichung ohne Differentialoperator auf.

Die einzelnen Felder sind durch dicke Punkte dargestellt. Die mit einem bestimmten Felde durch eine Linie verbundenen Felder treten alle in derjenigen Gleichung auf, die durch Variation des betreffenden raumgespiegelten, konjugiert-komplexen Feldes entsteht. Ein durch eine gepunkte Linie verbundenes Feld tritt in der Gleichung ohne Differentialoperator auf.

9. Schlussbemerkungen

Es wurde in dieser Arbeit das Einheiten-System mit $c = \hbar = 1$ benutzt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit und $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum bedeutet.

Die hier hergeleiteten Gleichungen sind zunächst nur für Teilchen mit nicht verschwindender Ruhmasse gedacht. Man kann allerdings nachträglich auch $m = 0$ zulassen und die Gleichungen, die auf diese Weise entstehen, weiter untersuchen. Das wurde in [3] für die Spinwerte $\frac{3}{2}$ und 2 durchgeführt. Dort wurde gezeigt, daß man im letzteren Fall die Einstein'schen Gleichungen für ein schwaches Gravitationsfeld erhält.

Es sind durchaus Gleichungen der hier betrachteten Art mit einer größeren Anzahl an Hilfsfeldern möglich, aber es scheint, daß die angegebenen Gleichungssysteme die minimale Anzahl an Hilfsfeldern besitzen, solange man nicht zu Differentialgleichungen höherer Ordnung übergehen will. Das läßt sich wohl mit dem Konstruktionsverfahren streng beweisen.

Die Hilfsfelder sind unbeobachtbar. Aus den Gleichungen folgt ja, daß sie verschwinden. Nach Einführung einer Wechselwirkung sollten aber Gleichungen, die zum gleichen Spin gehören und je verschiedene Anzahlen an Hilfsfeldern enthalten, zu je verschiedenen beobachtbaren Effekten führen.

Die vorliegende Arbeit ist gewissermaßen 'ad usum avorum' verfaßt und stützt sich auf die gruppentheoretischen Aussagen von [1] und [2]. Ein Brückenschlag, der direkt von den angegebenen Gleichungen zu der heutigen Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe hinüberführt, sollte möglich und gewiß auch lohnend sein.

Schließlich möchte der Verfasser an dieser Stelle all denen, die es angeht, seinen Dank aussprechen für einige Studienjahre, die er in der Schweiz verbringen durfte.

Literaturverzeichnis

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A *155*, 447 (1936).
[2] M. Fierz, Helv. Phys. Acta *12*, 3 (1939).
[3] M. Fierz und W. Pauli, Proc. Roy. Soc. *173*, 211 (1939).
[4] P. Minkowski, Helv. Phys. Acta *39*, 477 (1966).