Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 43 (1970)
Heft: 6-7

Artikel: Differentialraum-Quantentheorie
Autor: Ochs, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114187

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Differentialraum-Quantentheorie[1])

von **W. Ochs**

Sektion Physik der Universität München

(11. V. 70)

Summary. Differential-Space Quantum Theory reformulates quantum mechanics as a theory with *hidden variables*. In this new theory all observables of a physical system have welldefined values which change in a deterministic way. In analogy to statistical mechanics a quantum mechanical state (here regarded as a *macro-state*) is represented by an ensemble of *micro-states* with an appropriate probability distribution.

The following paper contains a simplified presentation of *Differential-Space Quantum Theory* and the underlying mathematics.

1. Einleitung

Von Anfang an war die Interpretation der Quantentheorie Gegenstand lebhafter Auseinandersetzungen, die bis heute nicht verstummt sind [1–3]. Diese Auseinandersetzungen entzündeten sich vor allem an der neuartigen Beschreibung mikrophysikalischer Objekte, wie sie – unabhängig von aller Interpretation – in der formalen Struktur der Quantenmechanik enthalten ist.

Bekanntlich gelang es nicht, den klassischen Zustandsbegriff, der allen beobachtbaren Grössen eines physikalischen Systems gleichzeitig einen «scharfen», d. h. innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen reproduzierbaren Wert zuordnet, in die Quantenphysik zu übernehmen. Dies liegt einmal an der Tatsache, dass bei allen quantenmechanischen Systemen verschiedene Gruppen von Observablen auftreten, deren experimentelle Bestimmung sich gegenseitig prinzipiell ausschliesst; zum anderen scheiterten alle Versuche, den jeweils nicht gemessenen Observablen einfach bestimmte hypothetische Werte zuzuordnen. Die Quantenmechanik verwendet daher eine allgemeinere Zustandsbeschreibung, die von der Präparation physikalischer Systeme ausgeht und jedem Individuum aus einem Kollektiv gleicher, identisch präparierter Systeme den gleichen Zustand E zuordnet. Ein System im Zustand E besitzt demnach nicht für alle Observablen eindeutig bestimmte Werte, sondern es kann zu einer Observablen im allgemeinen mehrere Werte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilung annehmen. Die Zustandsfunktion E gibt dabei zu jeder Observablen $\mathfrak{A}$ den Erwartungswert $E(\mathfrak{A})$ an, der sich aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der $\mathfrak{A}$-Messwerte ergibt. Diese Zustandsbeschreibung enthält nur noch verifizierbare Aussagen, da sich in einem Kollektiv von gleichen, identisch präparier-

[1]) Auszug aus der Diplomarbeit des Autors, Frankfurt a.M. 1964.

ten Systemen durch Bildung zufälliger Unterkollektive auch die Erwartungswerte unverträglicher Observablen mit beliebiger Genauigkeit bestimmen lassen.

Diese im quantenmechanischen Formalismus enthaltene Zustandsbeschreibung hat nun radikale Konsequenzen, welche die Interpretation des Zustandsbegriffs der Quantentheorie bis heute umstritten machen: Erstens sind die an einem Objekt messbaren Grössen keine «Eigenschaften», die das Objekt unter allen Umständen (und damit unabhängig von einer Messung) besässe, sondern sie kommen dem Objekt nur potentiell zu, und erst die Wechselwirkung des Objekts mit seiner Umgebung entscheidet darüber, welche der Möglichkeiten sich realisiert. Das bekannteste Beispiel für diesen «potentiellen» Charakter der quantenmechanischen Observablen finden wir im *Teilchen-Welle-Dualismus* [4, 5]. Zweitens erlaubt die Zustandsbeschreibung der Quantentheorie auch bei komplexen Systemen im allgemeinen keine exakte Analyse ihrer zeitlichen Entwicklung als Zusammenwirken selbständiger Teilsysteme; im Prinzip gilt jeder Prozess als unauflösbare Einheit. Dieser Unterschied zur klassischen Physik wird besonders deutlich bei der Betrachtung *verschränkter Systeme* [6, 7]. Eine Diskussion verschränkter Systeme, insbesondere des quantenmechanischen Messprozesses, zeigt drittens, dass der quantenmechanische Zustandsbegriff nicht «objektiv» ist, insofern sich die zeitliche Änderung des das Objekt beschreibenden Zustandsoperators nicht immer als Beschreibung der Entwicklung des physikalischen Objekts auffassen lässt. Vielmehr ändert sich der Zustandsoperator bei einer Messung auch durch Informationszunahme, die das physikalische Objekt nicht beeinflusst [8, 9].

Diese Konsequenzen der Quantenmechanik erschienen vielen Physikern unannehmbar, und insbesondere Einstein liess die Quantenmechanik trotz aller Erfolge nur als vorläufige Theorie der Mikrophysik gelten. Für Einstein war der statistische Charakter des quantenmechanischen Zustandsbegriffs ein Zeichen für die Unvollständigkeit der Theorie, und er glaubte an die Möglichkeit einer deterministischen Quantentheorie, deren Zustandsbegriff von den oben aufgezählten «Schwächen» frei ist [10].

Eine vollständige und deterministische Formulierung der Quantentheorie, die das unterschiedliche Verhalten gleicher, identisch präparierter Systeme auf unterschiedliche Zustände der Systeme zurückführen will, muss offenbar den Zustand eines physikalischen Systems durch Einführung zusätzlicher, experimentell nicht zugänglicher («verborgener») Parameter genauer charakterisieren als die Quantenmechanik. Daher nennt man eine deterministische Formulierung der Quantentheorie auch eine *Theorie mit verborgenen Parametern* (VP-Theorie).

Das Einsteinsche Programm einer deterministischen Theorie der Mikrophysik blieb lange Zeit eine blosse Forderung, deren Realisierung nur Wenige für möglich oder nötig hielten, und die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie als vollständige und adäquate Theorie der (nichtrelativistischen) Mikrophysik setzte sich allgemein durch. Diese Entwicklung wurde vor allem auch durch v. Neumann gefördert, der – scheinbar – nachwies, dass sich die statistischen Eigenschaften der quantenmechanischen Zustandsfunktion in VP-Theorien nicht darstellen lassen [11].

Dennoch wurde im Jahre 1951 die Frage nach der Interpretation der Quantentheorie erneut aufgeworfen, als D. Bohm eine erste deterministische Neuformulierung der Quantentheorie vorlegte [12–14]. Bohms Theorie erfüllt einen Teil der Einstein-

schen Forderungen; insbesondere erlaubt sie – wenigstens im Prinzip – die vollständige, deterministische Analyse aller quantenmechanischen Prozesse.

Andererseits sind die Observablen in der Bohmschen Theorie noch weniger «Eigenschaften des Objekts» als in der orthodoxen Quantenmechanik. Der genaue Zustand eines Objekts (und damit alle seine Zustandseigenschaften) werden in dieser Theorie durch Parameter beschrieben, die sich unter keinen Umständen experimentell feststellen lassen. Die Observablen charakterisieren dagegen die verschiedenen Möglichkeiten, den Quantenzustand des Objekts – und damit das auf das Objekt wirkende *Quantenpotential* – zu beeinflussen.

Obwohl die Bohmsche Theorie als Alternative zur Quantenmechanik kaum akzeptiert wurde, bewies sie doch die Möglichkeit einer konsistenten VP-Theorie und veranlasste dadurch die Entwicklung weiterer VP-Theorien [1].

In den Jahren 1953/56 schlugen N. Wiener und A. Siegel eine Formulierung der Quantentheorie vor, deren Zustandsbegriff – im Unterschied zur Bohmschen Theorie – ganz dem der klassischen Physik entsprach [15–17]. Diese *Differentialraum-Quantentheorie* (DRQ) ist als deterministische Ensembletheorie in Analogie zur statistischen Mechanik konzipiert: Ein physikalisches System im quantenmechanischen Zustand E wird durch ein Ensemble virtueller Systeme dargestellt. Jedes virtuelle System befindet sich in einem *Mikrozustand*, in dem jede Observable einen genau bestimmten Wert besitzt. Dabei ist das Ensemble so gewählt, dass die im Quantenzustand E auftretenden Streuungen von Observablenwerten gerade durch die unterschiedlichen Mikrozustände der virtuellen Systeme des Ensembles beschrieben werden. Die Zustände der virtuellen Systeme entwickeln sich deterministisch. Die DRQ lehnt sich damit in ihren physikalischen Annahmen eng an die Einsteinschen Vorstellungen an.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine vereinfachte Darstellung der DRQ. Kapitel 2 enthält eine systematische Zusammenstellung der physikalischen Vorstellungen und Annahmen dieser Theorie. In Kapitel 3 entwickeln wir den mathematischen Formalismus der DRQ, der zu jedem quantenmechanischen Zustandsoperator ein *Differentialraum-Ensemble* konstruiert und dessen zeitliche Entwicklung festlegt. Wie Wiener und Siegel gezeigt haben, führen diese Differentialraum-Ensembles zu den gleichen statistischen Aussagen über Messergebnisse wie die Quantenmechanik. Der abschliessende mathematische Anhang enthält u. a. eine vereinfachte Definition und die (für die DRQ) wichtigen Eigenschaften des Differentialraums.

2. Die physikalischen Vorstellungen der Differentialraum-Quantentheorie

Bevor wir den mathematischen Formalismus der DRQ entwickeln, gehen wir zunächst ausführlich auf die physikalischen Vorstellungen und Annahmen ein[2]), die N. Wiener und A. Siegel ihrer Neuformulierung der Quantentheorie zugrunde gelegt haben [15–18].

[2]) Diese Einteilung vereinfacht die Untersuchung[3]) der Frage, inwieweit gewisse Mängel der DRQ bereits aus den physikalischen Annahmen der Theorie folgen oder sich (ohne Abschwächung der physikalischen Annahmen) durch blosse Änderung des mathematischen Formalismus eliminieren lassen.

[3]) Eine solche Untersuchung wird demnächst veröffentlicht.

Jede Theorie, die die aus der Quantenmechanik bekannten Erwartungswerte der Observablen und ihre zeitliche Änderung durch Mittelwertbildung über ein Ensemble deterministisch sich entwickelnder *Mikrozustände* herleiten will, enthält zwei Teile mit eigenen Vorstellungen und Annahmen: Einen *dynamischen Teil*, der Konzeption und zeitliche Entwicklung der Mikrozustände beschreibt und die dazu notwendigen verborgenen Parameter einführt, und einen *statistischen Teil*, der erklärt, wie ein Ensemble aus einzelnen Elementen mit vorgegebener Dynamik das aus der Quantenmechanik bekannte (und experimentell bestätigte) statistische Verhalten zeigen kann. Beginnen wir mit den Vorstellungen, die dem dynamischen Teil der DRQ zugrunde liegen.

(I) Die DRQ übernimmt alle Axiome der Quantenmechanik, soweit sie nicht unmittelbar die Interpretation des quantentheoretischen Zustandes betreffen. Insbesondere macht sie folgende Annahmen:

a) Jedem physikalischen System ist ein komplexer, separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ zugeordnet, und es existiert eine bijektive Abbildung σ der Menge aller Observablen des Systems auf die Menge aller selbstadjungierten Operatoren aus $\mathcal{H}$; dabei ist σ mit allen borelschen Funktionen vertauschbar.

b) Eine Observable kann nur Werte aus dem Spektrum des zugeordneten Operators annehmen.

Die Übernahme dieser Voraussetzungen ist nicht verwunderlich, da Wiener und Siegel ja die quantitative Beschreibung der nichtrelativistischen Mikrophysik durch die Quantenmechanik als vollkommen exakt akzeptieren und lediglich eine neue, deterministische Interpretation ihrer Resultate mit Hilfe eines neuen Zustandsbegriffs einführen wollen.

(II) Jedes physikalische System befindet sich in einem sogenannten *Mikrozustand*, in dem alle Observablen einen wohldefinierten, durch die Vorgeschichte des Systems eindeutig bestimmten Wert haben. Darüber hinaus ist der Mikrozustand eines einzelnen Systems durch Angabe der Werte aller Observablen des Systems bereits eindeutig festgelegt. Es gibt also in der DRQ keine zusätzlichen, prinzipiell «verborgenen» Parameter, sondern alle den Mikrozustand definierenden Parameter sind messbar. Verborgen sind sie nur insofern, als (in einem bestimmten, durch die experimentelle Präparation definierten *Makrozustand* des Systems) nie alle Observablen gleichzeitig gemessen werden können, sondern nur jeweils eine Untermenge von miteinander verträglichen Observablen. Daher lässt sich der Mikrozustand eines physikalischen Systems auch nicht experimentell bestimmen, wird aber von der DRQ als real vorausgesetzt.

(III) Für jede Observable gibt es (im Prinzip) eine ideale Messung, die den Wert dieser Observablen und der mit ihr verträglichen Observablen nicht stört. Die ideale Messung registriert den bereits vor der Messung vorhandenen, «objektiven» Observablenwert.

(IV) Die zeitliche Entwicklung des Mikrozustandes ist deterministisch, d.h. der Mikrozustand zur Zeit $t = t_0$ bestimmt den Mikrozustand zu allen Zeiten eindeutig. Darüber hinaus wird in einem (im Sinne der Quantenmechanik) abgeschlossenen System die Änderung des Mikrozustandes allein durch die Struktur des Systems (den Hamiltonoperator) bestimmt.

(V) Der statistische Teil der DRQ ist wesentlich durch die Annahme charakterisiert, dass der «statistische Überbau» der eben grob umrissenen Dynamik der Mikrozustände den gleichen Prinzipien genügen soll wie in der klassischen statistischen Mechanik und dass alle Unterschiede zwischen DRQ und statistischer Mechanik nur auf die unterschiedliche Dynamik der individuellen Systeme (Mikrozustände) zurückzuführen sind. Das bedeutet: Da jede experimentell realisierte Situation (jeder experimentell präparierbare Makrozustand) nur wenig Information über den Mikrozustand des betreffenden Objektes enthält, repräsentiert man einen solchen Makrozustand zweckmässig durch ein *Gibbssches Ensemble* identischer «virtueller» Systeme. Ein Gibbssches Ensemble hat zwei wesentliche Eigenschaften: 1. Seine Elemente stimmen in allen Observablenwerten, die wir vom Originalsystem mit Sicherheit aussagen können, sämtlich mit diesem überein. 2. Bei den übrigen Observablen, von denen wir nur die Erwartungswerte kennen, verteilen sich alle mit unseren Kenntnissen vom Originalsystem verträglichen Observablenwerte so über die Elemente des Ensembles, dass die Mittelung über alle Ensembleelemente (mit Hilfe einer geeignet zu definierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung) für alle Observablen gerade die experimentell beobachtbaren Erwartungswerte ergibt.

(VI) Der Verwendung der Gibbsschen Ensembles liegt in der DRQ – wie in der statistischen Mechanik – die physikalische Annahme zugrunde, dass die Ensembles nicht nur formale Bedeutung haben, sondern auch stets ein statistisches Kollektiv realer, identisch präparierter Systeme repräsentieren können. Folgerichtig besitzt daher jede physikalisch sinnvoll definierbare Teilmenge eines Gibbsschen Ensembles eine nichtnegative Wahrscheinlichkeit, die als relative Häufigkeit der (in der Teilmenge liegenden) Mikrozustände in einem statistischen Kollektiv identisch präparierter Systeme interpretiert werden kann, unabhängig davon, ob sich die betreffende Teilmenge von Mikrozuständen auch experimentell isolieren lässt.

(VII) Was den Umfang und die Eigenschaften der experimentell präparierbaren Makrozustände angeht, so übernimmt die DRQ hier ebenfalls die als exakt angesehenen Aussagen der Quantenmechanik und setzt insbesondere voraus:

a) Es existiert eine bijektive Abbildung ϑ der Menge aller Makrozustände $\mathfrak{W}$ auf die Menge aller positiv semidefiniten, normierten selbstadjungierten Operatoren W aus $\mathcal{H}$, und der Erwartungswert der Observablen $\mathfrak{A} = \sigma^{-1}(A)$ im Makrozustand $\mathfrak{W} = \vartheta^{-1}(W)$ ist gegeben durch $E(\mathfrak{A}) = Sp(AW)$.

b) Ein physikalisches System besitzt zu jeder vorgegebenen Situation einen unitären «Entwicklungsoperator» $U(t, t_0)$, der die zeitliche Entwicklung des Zustandsoperators durch die Beziehung $W(t) = U(t, t_0)\, W(t_0)\, U^+(t, t_0)$ eindeutig bestimmt.

(VIII) Durch die Präparation des Makrozustandes ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ensembleelemente im Zustandsraum eindeutig festgelegt. Im Laufe der zeitlichen Entwicklung eines physikalischen Systems ändern sich im allgemeinen die Mikrozustände der einzelnen virtuellen Systeme, d.h. die den virtuellen Systemen zugeordneten Punkte des Zustandsraums durchlaufen eine bestimmte Bahn im Zustandsraum. Dabei darf sich aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung der virtuellen Systeme im Ensemble nicht ändern. Denn diese Verteilung ist durch die Art der

Präparation (und damit durch eine bestimmte Information) festgelegt und kann nur durch eine neue Information über den Makrozustand (d.h. durch eine Messung) geändert werden.

Im Anschluss an diese systematische Zusammenstellung der physikalischen Annahmen der DRQ überlegen wir uns noch, dass die obigen Annahmen die Theorie des Messprozesses im Rahmen der DRQ bereits eindeutig festlegen.

Betrachten wir etwa den Vorgang einer exakten Messung der Observablen $\mathfrak{A}$ an einem mikrophysikalischen Objekt. Gegeben seien das Objekt und ein zur exakten Messung der Observablen $\mathfrak{A}$ geeignetes Instrument; beide mögen sich vor der Messung in wohldefinierten Makrozuständen befinden, so dass auch der Makrozustand des zusammengesetzten Systems *Objekt* + *Instrument* vor Beginn der Wechselwirkung gegeben ist. Dieses Gesamtsystem beschreibt die DRQ nach Annahme (V) durch ein Ensemble zusammengesetzter virtueller Systeme, dessen statistische Eigenschaften dem vorgegebenen Makrozustand des realen Systems äquivalent sind. Während der Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument verändern sich die Mikrozustände aller Ensembleelemente gemäss der Annahmen (IV) und (VII), bis nach Beendigung der Wechselwirkung ein spezieller, für die exakte $\mathfrak{A}$-Messung charakteristischer Makrozustand des Ensembles erreicht ist: 1. Der Wert der Observablen $\mathfrak{A}$ ist während der Wechselwirkung bei allen virtuellen Systemen konstant geblieben. 2. Die Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument hat eine enge Korrelation (im Idealfall eine eineindeutige Zuordnung) zwischen den Werten der Observablen $\mathfrak{A}$ und den Werten der zugehörigen Instrument-Observablen $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{J})}$ hergestellt, so dass eine (als problemlos angesehene) Ablesung des Wertes der makrophysikalischen Observablen $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{J})}$ den Wert von $\mathfrak{A}$ vor der Messung angibt.

Wir unterscheiden nun zwei Arten von Messungen:

a) Bei der ersten Art interessieren wir uns für den Makrozustand des einzelnen realen Objekts nach der Messung. Dazu lesen wir nach Beendigung der Wechselwirkung zunächst den Wert von $\mathfrak{A}$ am Instrument ab (z.B. $\mathfrak{A} = a_k$) und betrachten dann das Teilensemble aller Ensembleelemente mit dem $\mathfrak{A}$-Wert a_k. Die statistischen Eigenschaften dieses Teilensembles repräsentieren nun eindeutig den Makrozustand des Originalsystems nach der Messung, da der Prozess *Wechselwirkung* + *Ablesung* + *Auswahl des Teilensembles mit* $\mathfrak{A} = a_k$ die gemeinsame, wohldefinierte Präparation von Teilensemble und Originalsystem darstellt. Diese Art der präparativen Messung nennt man eine Präparation oder *Filter*, da dieser Messprozess nur Systeme mit ganz bestimmten Zuständen «durchlässt».

b) Bei der zweiten Art der Messung interessieren wir uns für den Erwartungswert $E(\mathfrak{A})$ der Observablen $\mathfrak{A}$. Mathematisch ergibt sich $E(\mathfrak{A})$ einfach als Ensemblemittel des den Makrozustand repräsentierenden Ensembles. Kennt man aber den Makrozustand und damit die statistischen Eigenschaften des Ensembles nicht, so muss man das virtuelle Ensemble durch ein Kollektiv identisch präparierter Systeme «realisieren» und den Erwartungswert $E(\mathfrak{A})$ experimentell bestimmen.

Damit die DRQ eine gültige, alternative Formulierung der Quantentheorie darstellt, müssen natürlich beide Arten der Messung zu dem von der Quantenmechanik geforderten Ergebnis führen, i.e. im ersten Fall zu dem Makrozustand $W_2 = P_{a_k} W_1 P_{a_k} / Sp(W_1 P_{a_k})$ und im zweiten Fall zu dem Erwartungswert $E(\mathfrak{A}) = Sp(WA)$.

Diese Überlegungen zeigen, dass sich die Erklärung des Messprozesses im Rahmen der DRQ bereits aus den Annahmen (I) bis (VIII) ergibt, ohne dass dabei eine zusätzliche Voraussetzung notwendig wäre, wie sie der *Schnitt* (i.e. die Vernachlässigung der Interferenzglieder im Zustandsoperator des zusammengesetzten Systems nach Abschluss der Wechselwirkung) in der quantenmechanischen Beschreibung des Messprozesses darstellt. Das ist auch nicht verwunderlich; die Operation des Schnittes setzt ja den quantenmechanischen Zustandsbegriff voraus, bei dem auch in einem maximal bestimmten Zustand stets mehrere Zustände «koexistieren», d.h. kohärent überlagert sind. Der Zustandsbegriff der DRQ ist dagegen so konzipiert, dass eine Koexistenz verschiedener Zustände unsinnig ist. Daher ist auch eine dem Schnitt analoge Operation in der DRQ unmöglich und überflüssig.

3. Der mathematische Aufbau der Differentialraum-Quantentheorie

Nachdem wir im letzten Kapitel die physikalischen Vorstellungen der DRQ skizziert haben, kommen wir nun zum mathematischen Aufbau der Theorie.

Ähnlich wie in der statistischen Mechanik werden die Mikrozustände in der DRQ durch Punkte eines Zustandsraums dargestellt, und den Gibbsschen Ensembles entsprechen Wahrscheinlichkeitsbewertungen der Punktmengen im Zustandsraum. Zur Konstruktion des Zustandsraums verwendet die DRQ den von N. Wiener untersuchten *Differentialraum*[4]). Unter einem Differentialraum verstehen wir die Menge Ξ aller komplexen Zahlenfolgen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, auf der folgende Strukturen definiert sind:

a) Führt man auf den Lebesgue-Mengen M der komplexen Zahlenebene C das Mass

$$\frac{1}{\pi} \int_M dx\, dy \exp\{-(x^2 + y^2)\}$$

ein, so ergibt sich auf dem kartesischen Produkt $\Xi = \bigtimes_{n=1}^{\infty} \mathsf{C}_n$ durch Bildung des Produktmasses ein normiertes Mass μ, das wir als *Wienermass* bezeichnen.

b) Ξ enthält als Teilmenge den Hilbertraum l^2 aller quadratsummierbaren komplexen Zahlenfolgen. Jedem Element $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ aus l^2 wird durch die Vorschrift

$$<a \mid x) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \xi_n$$

eine lineare Funktion auf Ξ zugeordnet, die nach einem Satz von Wiener μ-fast überall endlich ist.

c) Zu jedem unitären Operator U aus l^2 lässt sich eine *fastunitäre* Transformation $\hat{U}$ in Ξ konstruieren, die 1. fast überall auf Ξ definiert ist, 2. dort die Eigenschaften eines unitären Operators besitzt, 3. auf l^2 mit U übereinstimmt und 4. μ-masstreu ist.

[4]) Eine Definition des Differentialraums und eine Zusammenstellung seiner wichtigsten Eigenschaften finden sich im Anhang; hier begnügen wir uns mit einer anschaulichen Charakterisierung.

Der *Differentialraum* stellt also eine Erweiterung des Hilbertraums dar. Eine solche Erweiterung erweist sich als nützlich, wenn man ein drehinvariantes Mass einführen will; dabei nimmt man in Kauf, dass die Hilbertraumstruktur von l^2 bei der Erweiterung weitgehend verloren geht [19, 20].

Die DRQ ordnet nun jedem physikalischen System einen Differentialraum $\mathcal{D}$ von gleicher Dimension zu wie der des Hilbertraums aus Annahme (I); dadurch lässt sich der (einem System in der Quantenmechanik zugeordnete) Hilbertraum $\mathcal{H}$ stets als Teilraum des (dem System in der DRQ zugeordneten) Differentialraums $\mathcal{D}$ auffassen.

Jedes Element von $\mathcal{D}$ soll ein virtuelles System in einem wohldefinierten Mikrozustand darstellen. Um dies zu erreichen, definiert die DRQ auf dem Differentialraum zu jeder Observablen $\mathfrak{A}$ des physikalischen Systems im Makrozustand $\mathfrak{W}$ eine Observablenwertfunktion ${}^0A_W$, deren Funktionswerte ${}^0A_W(x)$ gerade aus den Eigenwerten des Operators $A = \sigma(\mathfrak{A})$ bestehen. Das geschieht durch die

Definition (3.1)[5])

Sei $W = \sum_{i \in J \subset \mathbf{N}} w_i \, Q_i$ der Zustandsoperator zum Makrozustand eines physikalischen Systems und sei $A = \sum_{n \in K \subset \mathbf{N}} a_n \, P_{a_n}$ der Operator zur Observablen $\mathfrak{A}$. Mit Hilfe einer geeigneten festen Vorschrift[6]) wählen wir aus $\bigvee_{i \in J} Q_i \, \mathcal{H}$ ein normiertes Element y mit der Eigenschaft

$$(\forall\, n \in K) \qquad [Sp(W\, P_{a_n}) \neq 0 \Rightarrow \langle y \,|\, P_{a_n} \,|\, y \rangle \neq 0]$$

und konstruieren mittels y die Indexmengen

$$L(A, W) := \{n \in K \subset \mathbf{N} \mid Sp(W\, P_{a_n}) > 0\}\,,$$

$$S(x, A, W) := \left\{ s \in L \,\middle|\, \frac{|\langle y \,|\, P_{a_s} \,|\, x) |^2}{\langle y \,|\, P_{a_s} \,|\, y \rangle \, Sp(W\, P_{a_s})} = \min_{i \in L} \frac{|\langle y \,|\, P_{a_i} \,|\, x) |^2}{\langle y \,|\, P_{a_i} \,|\, y \rangle \, Sp(W P_{a_i})} \right\}.$$

Die Observablenwertfunktion definieren wir schliesslich durch

$${}^0A_W := a_\tau \text{ mit } \tau(x, A, W) := \min\{s \in S\}\,.$$

Wie man sich leicht überlegt, sind die Funktionen ${}^0A_W$ für alle diskreten[7]), selbstadjungierten Operatoren A und alle Zustandsoperatoren W im ganzen Differentialraum eindeutig definiert und sind dort endlich und Wiener-summabel.

[5]) Wiener und Siegel haben in ihren Arbeiten [15–18] verschiedene Definitionen der Observablenwertfunktionen ${}^0A_W$ angegeben, die zudem alle elementare Zustandsoperatoren $W = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ voraussetzen. In Definition (3.1) führen wir Observablenwertfunktionen für beliebige Zustandsoperatoren ein, und für elementare Zustandsoperatoren stimmt diese Definition mit der jüngsten Definition von Siegel [18] überein.

[6]) Ein Beispiel für eine solche Vorschrift geben wir im Anhang III.

[7]) Definition (3.1) ordnet nur Operatoren mit diskretem Spektrum eine Observablenwertfunktion zu, und diese Zuordnung lässt sich nicht ohne weiteres auf Operatoren mit beliebigem Spektrum ausdehnen. Vom physikalischen Standpunkt aus scheint dieser Punkt nicht wesentlich, da sich eine Observable mit beliebigem Wertebereich stets durch eine – experimentell von ihr nicht unterscheidbare - Observable mit hinreichend dichtem, diskretem Wertebereich ersetzen lässt.

Die Gesamtheit aller Observablenwertfunktionen definiert nun zu jedem Element $x \in \mathcal{D}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{X}_W(\mathfrak{A}) := {}^0A_W(x) \tag{3.1}$$

eine neue Funktion $\mathfrak{X}_W$ auf der Menge aller Observablen des betrachteten Systems. Die Funktion $\mathfrak{X}_W$ ordnet bei vorgegebenem Zustandsoperator W dem Punkt $x \in \mathcal{D}$ zu jeder Observablen genau einen der – nach Annahme (I) möglichen – Observablenwerte zu. Damit können wir unmittelbar den Zustandsraum der DRQ einführen.

Kinematisches Postulat

Bei vorgegebenem Makrozustand $\mathfrak{W}$ definieren die Funktionen $\mathfrak{X}_W$ zu jedem Punkt aus $\mathcal{D}$ eindeutig einen bestimmten Mikrozustand und machen $\mathcal{D}$ damit zu einem Zustandsraum für das betrachtete physikalische System.

Nun müssen wir durch eine geeignete Gewichtsverteilung der Mikrozustände im Zustandsraum die Gibbsschen Ensembles einführen. Hierfür verwendet die DRQ einfach die mit der Definition von $\mathcal{D}$ bereits vorgegebene Wahrscheinlichkeit μ. Unter Berücksichtigung der μ-Integrierbarkeit der Funktionen ${}^0A_W$ formuliert die DRQ ihr

Statistisches Postulat

Jeder Observablen $\mathfrak{A}$ eines physikalischen Systems im Makrozustand $\mathfrak{W}$ ist durch Definition (3.1) eindeutig eine Zufallsgrösse ${}^0A_W$ auf dem Differentialraum $\mathcal{D}$ zugeordnet: Bei einer Serie unabhängiger $\mathfrak{A}$-Messungen im Makrozustand $\mathfrak{W}$ treten die Funktionswerte von ${}^0A_W$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung als Messergebnisse auf.

Damit ist das *Differentialraum-Ensemble* zu einem vorgegebenen Makrozustand eingeführt und es fehlt lediglich noch die Definition der deterministischen Bewegung der Zustandspunkte im Differentialraum. Die DRQ konstruiert diese zeitliche Entwicklung der virtuellen Systeme in enger Anlehnung an die Quantenmechanik:

Dynamisches Postulat

Ist $U(t, t_0)$ der Schrödingersche Entwicklungsoperator im Hilbertraum des betrachteten physikalischen Systems, so wird die Bewegung der Zustandspunkte im Differentialraum durch die Bewegungsgleichung

$$x(t) = \hat{U}(t, t_0)\, x(t_0) \tag{3.2}$$

beschrieben, wobei $\hat{U}$ die durch U in $\mathcal{D}$ induzierte *fastunitäre* Transformation bedeutet.

Aus diesen Postulaten lässt sich nun die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Messwerte berechnen.

Satz 1. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Observable, $\sigma(\mathfrak{A}) = A = \sum_n a_n P_{a_n}$ der zugeordnete selbstadjungierte Operator und $U(t, t_0)$ der unitäre Entwicklungsoperator eines quantenmechanischen Systems. Befindet sich das System zur Zeit $t = t_0$ im Makrozustand $\mathfrak{W}_0$, so ergibt sich aus den obigen Postulaten folgende Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der $\mathfrak{A}$-Messwerte zur Zeit $t \geqslant t_0$:

$$F_{\mathfrak{A},\mathfrak{W}_0}(a, t) = \sum_{a_n < a} Sp\,[W_0\, U^+(t, t_0)\, P_{a_n}\, U(t, t_0)]\,. \tag{3.3}$$

Dieser Satz zeigt, dass die DRQ mit ihrer ensembletheoretischen Ableitung der Streuung von Messwerten zu den gleichen Ergebnissen kommt wie die Quantenmechanik.

Damit ist unsere Darstellung der DRQ abgeschlossen. In einer weiteren Arbeit werden wir untersuchen, inwieweit die DRQ als konsistente VP-Theorie gelten kann.

ANHANG I

Einführung in die Theorie des Differentialraums

Vorbemerkung. In den zwanziger Jahren entwickelte N. Wiener eines der ersten nichttrivialen Masse auf der Menge aller komplexen Funktionen [21, 22]. Ausgehend von anschaulichen Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung aller möglichen Bahnen in der Brownschen Molekularbewegung konstruierte Wiener auf der Menge $\mathfrak{N}$ aller komplexen Funktionen über dem Intervall $(-\pi, \pi)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}, \mu)$ mit der Eigenschaft, dass für jede endliche Zerlegung $-\pi \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \cdots < \beta_N \leqslant \pi$ die Differenzen $\psi(\beta_i) - \psi(\alpha_i)$ einen *Gaußschen Zufallsvektor*[8]) mit den Erwartungswerten 0 und den Varianzen $\beta_i - \alpha_i$ bilden. Diese «gewichteten» Funktionen – von Wiener auch *Brownian motion functions* genannt – sind fast alle stetig und in keinem Punkt differenzierbar; darüber hinaus bilden die Grössen $i\,n \int \psi(t)\, e^{-int}\, dt$ für $n \neq 0$ einen *Gaußschen Einheitsvektor*[8]). Mit Hilfe einer formalen Differentiation der zugehörigen Fourierdarstellung lässt sich eine bilineare Verknüpfung $\int f\, d\psi^*$ zwischen den Elementen des Hilbertraums $\mathsf{L}^2_{(-\pi,\pi)}$ und den *Brownian motion functions* definieren. Dabei erscheint der Ausdruck $\int f\, d\psi^*$ als eine Art Skalarprodukt von $f \in \mathsf{L}^2$ (mit Funktions*werten* als Komponenten) und dem «Vektor» $d\psi$, dessen Komponenten aus den «Differentialen» $d\psi(t)$ bestehen. Diese Veranschaulichung der *Brownian motion functions* als Vektoren mit stochastisch unabhängigen Komponenten $d\psi(t)$ führte zu dem Namen *Differentialraum* [15, 21].

Bei näherer Betrachtung sind aber die analytischen Eigenschaften der *Brownian motion functions* ohne Bedeutung für die DRQ. Der mathematische Formalismus der DRQ benötigt lediglich eine bestimmte Klasse von eineindeutigen Abbildungen $\mathfrak{g}\colon \mathcal{D} \to \Xi$ des Differentialraums auf die Menge aller komplexen Zahlenfolgen mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{g}(x)$ einen GEV auf $\mathcal{D}$ darstellt. Wir verwenden daher in dieser Arbeit einen vereinfachten Massraum, der nur noch die für eine Formulierung der DRQ notwendigen Eigenschaften des Differentialraums besitzt; trotzdem werden wir diesen «ärmeren» Raum ebenfalls als *Differentialraum* bezeichnen.

Einführung des Differentialraums

Auf der σ-Algebra $\mathcal{B}$ aller Borelmengen des R^2 definieren wir das normierte Mass

$$\tilde{\varphi}(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_M \exp\{-(x^2 + y^2)\}\, dx\, dy\,. \tag{A1}$$

[8]) Unter einem (komplexen) *Gaußschen Zufallsvektor* versteht man eine Vektorfunktion auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, bei der die (Real- und Imaginärteile aller) Komponenten unabhängig- und normalverteilt sind. Als *Gaußschen Einheitsvektor* (GEV) bezeichnen wir einen komplexen Gaußschen Zufallsvektor, bei dem die Real- und Imaginärteile aller Komponenten sämtlich den Erwartungswert 0 und die Varianz 1/2 besitzen [23].

Die bijektive Abbildung $\mathfrak{k}$: $(x, y) \to x + i\,y$ des R^2 auf die *unitäre Gerade* C induziert in C das Wahrscheinlichkeitsfeld $(\mathcal{A}, \varphi) := (\mathfrak{k}(\mathcal{B}), \mathfrak{k}(\tilde{\varphi}))$ und definiert so den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathsf{C}, \mathcal{A}, \varphi)$. Nun bilden wir den Produktmassraum

$$\bigotimes_{n=1}^{D} (\mathsf{C}_n, \mathcal{A}_n, \varphi_n) = \left(\mathop{\mathsf{X}}_{n=1}^{D} \mathsf{C}_n, \bigotimes_{n=1}^{D} \mathcal{A}_n, \bigotimes_{n=1}^{D} \varphi_n \right) \tag{A2}$$

aus D gleichen Wahrscheinlichkeitsräumen und erhalten durch Vervollständigung von $\bigotimes_n \mathcal{A}_n$ bzw. $\bigotimes_n \varphi_n$ den neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Xi, \mathfrak{L}, \mu)$. Ξ ist gerade die Menge aller komplexen Zahlenfolgen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ der Länge D, und D bedeutet eine Kardinalzahl $\leqslant \aleph_0$.

Führt man in der Untermenge $\mathcal{H} = \{x \in \Xi \mid \sum_{i=1}^{D} |\xi_i|^2 < \infty\}$ aller quadratsummierbaren Folgen aus Ξ das Skalarprodukt $\langle d, g\rangle = \sum_{i=1}^{D} \delta_i^* \gamma_i$ ein, so stellt $\mathcal{H}$ einen Hilbertraum dar. Wir wollen nun den Definitionsbereich des Skalarprodukts über $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ hinaus ausdehnen. Offensichtlich ist die Verknüpfung $(x, y) = \sum_{i=1}^{D} \xi_i^* \eta_i$ nicht für beliebige Paare $x, y \in \Xi$ definiert, da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i$ nicht immer existiert. Es zeigt sich aber, dass der Ausdruck $\langle d \mid x) = \sum_{i=1}^{D} \delta_i^* \xi_i$ für alle $d \in \mathcal{H}$ und fast alle $x \in \Xi$ existiert[9]). Um das zu sehen, betrachten wir zunächst alle Verknüpfungen der «natürlichen» Basiselemente $e_n := (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ mit beliebigen Elementen x. Die Funktion $e_n(x) := \langle e_n \mid x) = \xi_n$ ist nach Konstruktion in ganz Ξ definiert, endlich und μ-messbar. Ausserdem folgt aus der Definition des Massraums $(\Xi, \mathfrak{L}, \mu)$

$$\begin{aligned}
&\mu\{x \in \Xi \mid \operatorname{Re} e_{t_i}(x) < v_i\,,\ \operatorname{Im} e_{t_i}(x) < u_i;\ i = 1, \ldots, n\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi\{\xi \in \mathsf{C} \mid \operatorname{Re} \xi < v_i,\ \operatorname{Im} \xi < u_i\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}\,\{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \mid x < v_i, y < u_i\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{v_i} dx\, e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u_i} dy\, e^{-y^2}\,.
\end{aligned} \tag{A3}$$

Die Funktionenfolge $e_1(x), e_2(x), \ldots$ bildet also einen GEV. Ist nun $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots)$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{H}$, so schreiben wir formal

$$d(x) := \langle d \mid x) = \sum_{i=1}^{D} \delta_i^*\, e_i(x)\,. \tag{A4}$$

Bekanntlich konvergiert jede abzählbare Linearkombination von Komponenten eines GEV mit quadratsummierbaren Koeffizienten fast überall gegen eine endliche

[9]) Eine spitze Klammer auf einer Seite eines Skalarprodukts bedeutet, dass das betreffende Element in $\mathcal{H}$ liegt.

Zufallsvariable [24]. Folglich ist $d(x)$ eine endliche Zufallsvariable auf $(\Xi, \mathfrak{L}, \mu)$. Ausserdem hat die Verknüpfung – bis auf den unsymmetrischen Definitionsbereich – alle Eigenschaften des normalen Skalarprodukts.

Definition (A1). Den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Xi, \mathfrak{L}, \mu)$ mit dem oben definierten Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot)$ bezeichnen wir als *Differentialraum* $\mathfrak{D}$.

Eigenschaften des Differentialraums

Die wesentliche Eigenschaft des Differentialraums besteht darin, dass die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $d_n(x)$, die oben für die «natürliche» Basis $\{e_n\}$ abgeleitet wurde, für alle orthonormierten Basen $\{d_n\}$ von $\mathfrak{H}$ gültig bleibt.

Satz (A1). Ist $\{h_\alpha, \alpha \in K\}$ eine beliebige Menge orthonormierter Elemente aus $\mathfrak{H}$, so bilden die Funktionen $h_\alpha(x) := \langle h_\alpha \mid x)$ einen $|K|$-dimensionalen *Gaußschen Einheitsvektor* [22].

Im Falle eines endlichdimensionalen Folgenraums fällt Ξ offensichtlich mit seinem Unterraum $\mathfrak{H}$ zusammen und das Wienermass μ ist invariant gegen unitäre Transformationen in Ξ. Die Aussage von *Satz* (A1) über die *richtungsunabhängige* gemeinsame Verteilung der Basis-Zufallsvariablen $\langle h_\alpha \mid x)$ lässt eine analoge Eigenschaft des Wienermasses auch für den Fall eines unendlichdimensionalen Folgenraums erwarten. Nun kann man den Begriff der unitären Transformation nicht unverändert auf $\mathfrak{D}$ übertragen, da weder die «Länge» $(x \mid x)^{1/2}$ noch alle Komponenten $\langle h_\alpha \mid x)$ für alle Elemente $x \in \mathfrak{D}$ existieren bzw. endlich sind. Wir werden aber eine Transformation in $\mathfrak{D}$ definieren, die fast überall die Eigenschaften einer unitären Transformation aufweist. Die Idee besteht darin, die «aktive» unitäre Transformation von Ξ mit Hilfe der richtungsinversen, «passiven» Koordinatentransformation zu definieren, d.h. durch eine Drehung der natürlichen Basis $\{e_n\}$.

Definition (A2). Zu jeder unitären Transformation U des Hilbertraums $\mathfrak{H} \subset \Xi$ definieren wir in Ξ zwei Zuordnungen

$$\hat{U}\colon\ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$$

$$\hat{U}^{\#}\colon\ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$$

durch die Vorschrift

$$\eta_i := \langle e_i \mid \hat{U}\, x) := \langle U^{-1} e_i \mid x)$$

$$\zeta_i := \langle e_i \mid \hat{U}^{\#} x) := \langle U\, e_i \mid x)\,. \tag{A5}$$

Lemma (A2). a) Die Zuordnungen $\hat{U}$ und $\hat{U}^{\#}$ bilden jeweils eine Teilmenge vom Masse eins umkehrbar eindeutig auf eine andere Teilmenge vom Masse eins ab.
b) Der Teilraum $\mathfrak{H}$ ist vollständig in den Werte- und Definitionsbereichen aller Abbildungen $\hat{U}$ und $\hat{U}^{\#}$ enthalten und in $\mathfrak{H}$ gilt $\hat{U} = U$, $\hat{U}^{\#} = U^{+} = U^{-1}$.
c) Die Abbildungen $\hat{U}$ und $\hat{U}^{\#}$ sind durch die sie induzierende unitäre Transformation U umkehrbar eindeutig bestimmt.
d) Überall in $\mathfrak{H}$ und fast überall in Ξ gelten die Beziehungen

$$\langle U^{-1} h \mid x) = \langle h \mid \hat{U}\, x)\,, \quad \langle U\, h \mid x) = \langle h \mid \hat{U}^{\#} x)$$

$$\hat{U}\, \hat{U}^{\#} = \hat{U}^{\#}\, \hat{U} = 1\,.$$

(e) Die Abbildungen U und $U^{\#}$ sind linear.

Beweis: Nach Definition gilt

$$\hat{U}\, x = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \text{ mit } \eta_i = \langle U^{-1} e_i \mid x) =: \langle h_i \mid x) = h_i(x)\,.$$

Wie wir gesehen haben, sind die Funktionen $h_i(x)$ fast überall eindeutig definiert und endlich; folglich ist auch $\hat{U}\, x$ für fast alle x eindeutig definiert. Der Wertebereich M von $\hat{U}$ ist die Menge aller Folgen $(h_1(x), h_2(x), \ldots)$. Bezeichnen wir die Menge aller Folgen $(h_1(x), \ldots, h_n(x), \xi_{n+1}, \ldots)$ mit M_n, so gilt $M_n \searrow M$ und aus *Satz* (A1) folgt $\mu(M_n) = 1$ für alle n. Damit ergibt sich $\mu(M) = 1$. Das gleiche Ergebnis gilt natürlich auch für $\hat{U}^{\#}$. Wie wir weiter oben gesehen haben, konvergiert eine Linearkombination der Komponenten eines GEV genau dann fast überall, wenn auch die Summe der Absolutquadrate der Koeffizienten konvergiert. Ist nun $g = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{H}$, so gilt $\sum_{n=1}^{D} |\gamma_n|^2 < \infty$ und wir erhalten

$$\langle U^{-1} g \mid x) = \langle U^{-1} \sum_i \gamma_i e_i \mid x) = \sum_i \gamma_i^* \langle U^{-1} e_i \mid x) = \sum \gamma_i^* \langle e_i \mid \hat{U}\, x)$$
$$= \langle \sum \gamma_i e_i \mid \hat{U}\, x) = \langle g \mid \hat{U}\, x)$$

fast überall. Entsprechend ergibt sich

$$\langle U\, g \mid x) = \langle g \mid \hat{U}^{\#} x)$$

fast überall. Ist N nun der Schnitt der Definitions- und Wertebereiche der beiden Abbildungen $\hat{U}$ und $\hat{U}^{\#}$, so gilt

$$\langle e_i \mid x) = \langle U\, U^{-1} e_i \mid x) = \langle U^{-1} e_i \mid \hat{U}^{\#} x) = \langle e_i \mid \hat{U}\, \hat{U}^{\#} x)$$

für alle i und alle $x \in N$. Wegen $\mu(N) = 1$ ergibt sich $\hat{U}\, \hat{U}^{\#} = 1$ fast überall und entsprechend $\hat{U}^{\#}\, \hat{U} = 1$ fast überall. Daraus folgt ebenfalls die Eineindeutigkeit von $\hat{U}$ und $\hat{U}^{+}$ fast überall. Damit haben wir die Behauptungen a) und d) bewiesen. Die übrigen Aussagen ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der unitären Transformation U.

Die oben eingeführten Abbildungen $\hat{U}$, $\hat{U}^{\#}$ haben also fast überall die Eigenschaften einer unitären Transformation; daher bezeichnen wir sie als *fastunitäre Transformationen*. Mit Hilfe dieser Begriffsbildung lässt sich nun die vermutete Drehinvarianz des Wienermasses auch im Falle eines unendlichdimensionalen Differentialraums präzise formulieren.

Satz (A3). Das Wienermass μ ist invariant gegen *fastunitäre* Transformationen in $\mathcal{D}$.

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ die Klasse aller Zylindermengen der Form

$$\left(\bigtimes_{i=1}^{n} I_{\nu_i}\right) \times \left(\bigtimes_{\substack{r=1 \\ r \neq \nu_i}}^{D} \mathsf{C}_r\right) = \{x \in \Xi \mid e_{\nu_i}(x) \in I_{\nu_i};\ i = 1, \ldots, n\}$$

wobei die I_{ν_i} offene, zusammenhängende Intervalle aus C_{ν_i} bedeuten. Offensichtlich ist $\mathcal{S}$ ein Semiring [24]. Für ein beliebiges Element $M \in \mathcal{S}$ folgt dann

$$\hat{U}\, M = \{\hat{U}\, x \mid e_{\nu_i}(x) \in I_{\nu_i}\} = \{x \mid h_{\nu_i}(x) \in I_{\nu_i}\} \text{ mit } h_{\nu_i}(x) := \langle h_{\nu_i} \mid x) := \langle U\, e_{\nu_i} \mid x)\,. \quad \text{(A6)}$$

Da die Funktionen h_{ν_i} nach *Satz* (A1) Komponenten eines GEV sind, so ergibt sich

$$(\forall\, M \in \mathcal{S}) \qquad \hat{U}\, M \in \mathfrak{L}\,. \tag{A7}$$

Setzen wir $\mathcal{S}_1 := \hat{U}\, \mathcal{S} := \{\hat{U}\, M \mid M \in \mathcal{S}\}$, so folgt aus (A7)

$$^{\sigma}\mathcal{S}_1 \subset \mathfrak{L} \tag{A8}$$

und das bedeutet: $\hat{U}$ ist $\mathfrak{L}$-messbar. Damit ist die Funktion $\mu(\hat{U}\,.)$ auf ganz $\mathfrak{L}$ eindeutig definiert.

Ist $M = \{x \in \Xi \mid e_{\nu_i} \in I_{\nu_i};\, i = 1, \ldots, n\}$ wieder ein beliebiges Element aus $\mathcal{S}$, so gilt nach (A6) $\hat{U}\, M = \{x \mid h_{\nu_i}(x) \in I_{\nu_i}\}$.

Da die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_n}$ bzw. $h_{\nu_1}, \ldots, h_{\nu_n}$ nach *Satz* [1] identisch ist, erhalten wir für alle $M \in \mathcal{S}$

$$\mu(M) = \mu(\hat{U}M)\,. \tag{A9}$$

Nun besitzt jedes auf einem Semiring erklärte Mass genau eine Fortsetzung auf die von dem Semiring erzeugte σ-Algebra [24]; damit ergibt sich aus (A9)

$$(\forall\, M \in \mathfrak{L}) \qquad \mu(M) = \mu(\hat{U}\, M)\,. \qquad \blacksquare$$

ANHANG II

Beweis von Satz 1. Im Interesse einer besseren Gliederung beweisen wir zunächst folgenden

Hilfssatz. Sei $\mathcal{D}$ ein Differentialraum von mindestens zwei Dimensionen; sei $\{h_r, r = 1, \ldots, R, 2 \leqslant R \leqslant \dim \mathcal{D}\}$ eine beliebige Menge orthonormierter Vektoren aus $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ und sei $\{p_r, r = 1, \ldots, R\}$ eine Menge reeller Zahlen mit der Eigenschaft $p_r > 0$, $\sum_{r=1}^{R} p_r = 1$; sei $S(x)$ die Teilmenge der Indizes aus $\{1, \ldots, R\}$ mit der Eigenschaft

$$\left\{\frac{1}{p_s}\, |\langle h_s \mid x)|^2 = \min_{r \in R} \frac{1}{p_r}\, |\langle h_r \mid x)|^2\right\}$$

und sei $\tau(x) := \min\{s \in S(x)\}$, $M_k := \{x \in \Xi \mid \tau(x) = k\}$. Dann gilt

$$M_m \bigcap M_n = \varnothing \text{ für } m \neq n;\ \bigcup_{i=1}^{R} M_i = \Xi \tag{A10}$$

und

$$\mu(M_n) = p_n\,. \tag{A11}$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen erkennt man unmittelbar, dass die Funktion $\tau(x)$ in ganz $\mathcal{D}$ eindeutig definiert ist. Daraus folgen bereits die Beziehungen (A10). Die Messbarkeit der Funktionen $\langle h_r \mid x)$ impliziert die Messbarkeit der Mengen

$$A_{rk} := \left\{x \in \Xi \mid \frac{1}{p_r}\, |\langle h_r \mid x)|^2 \leqslant \frac{1}{p_k}\, |\langle h_k \mid x)|^2\right\} \tag{A12}$$

und damit auch die Messbarkeit der Mengen $\bigcap_{r=1}^{R} A_{sr}$. Nach Konstruktion unterscheiden sich die Mengen $\bigcap_{r=1}^{R} A_{sr}$ und M_s höchstens durch niederdimensionale μ-Nullmengen; folglich sind auch die Mengen M_s messbar und es gilt

$$\mu(M_s) = \mu(\bigcap_{r=1}^{R} A_{sr}) = \lim_{n \to R} \mu(\bigcap_{r=1}^{n} A_{sr}) \,. \tag{A 13}$$

Um $\mu(\bigcap_{r=1}^{n} A_{sr})$ zu berechnen, verwenden wir die Invarianz von μ gegen fastunitäre Transformationen in $\mathcal{D}$. Ist U eine unitäre Transformation aus $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft $e_i = U\, h_i$ für $i = 1, \ldots, R$, so folgt aus *Satz* (A 3)

$$\mu(\bigcap_r A_{sr}) = \mu(\hat{U} \bigcap_r A_{sr}) = \mu(\bigcap_r \hat{U}\, A_{sr}) \,. \tag{A 14}$$

Aus (A 12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{U}\, A_{sr} &= \left\{ \hat{U}\, x \in \Xi \mid \frac{1}{p_s} \, |\langle h_s \mid x) |^2 \leqslant \frac{1}{p_r} \, |\langle h_r \mid x) |^2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \Xi \mid \frac{1}{p_s} \, |\langle U\, h_s \mid x) |^2 \leqslant \frac{1}{p_r} \, |\langle U\, h_r \mid x) |^2 \right\} \\ &= \left\{ x \mid \frac{1}{p_s} \, |e_s(x)|^2 \leqslant \frac{1}{p_r} \, |e_r(x)|^2 \right\} =: B_{sr} \end{aligned} \tag{A 15}$$

Aus (A 14), (A 15) und der Produktkonstruktion des Wienermasses erhalten wir dann

$$\mu\left(\bigcap_{r=1}^{n} A_{sr}\right) = \begin{cases} \left[\bigotimes_{i=1}^{n} \varphi_i\right] \left(\bigcap_{r=1}^{n} B_{sr}\right) & \text{für } s \leqslant n \\ \left[\varphi_s \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \varphi_i\right)\right] \left(\bigcap_{r=1}^{n} B_{sr}\right) & \text{für } s > n \end{cases} \tag{A 16}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $s \leqslant n$ annehmen, da uns nur der Grenzwert $n \to R$ interessiert. Aus (A 15) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\bigotimes_{i=1}^{n} \varphi_i\right] \left(\bigcap_{r=1}^{n} B_{sr}\right) &= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{p_i\,(u_s^2+v_s^2) \leq p_s\,(u_i^2+v_i^2) \text{ für } i=1,\ldots,n} du_1 \ldots \int dv_n \, \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} (u_i^2 + v_i^2)\right\} \\ &= \int\limits_{p_i\, r_s \leq p_s\, r_i \text{ für } i=1,\ldots,n} dr_1 \ldots \int dr_n \, \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} r_i\right\} \\ &= \int_0^\infty dt\, e^{-t} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} \int\limits_{(p_i/p_s)\, r_s}^{\infty} dr\, e^{-r} = \frac{p_s}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \end{aligned} \tag{A 17}$$

Aus (A13), (A14) und (A17) folgt schliesslich die Behauptung (A11)

$$\mu(M_s) = \mu\left(\bigcap_{r=1}^{R} A_{sr}\right) = \lim_{n \to R} \frac{p_s}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = p_s \qquad \blacksquare$$

Nun lässt sich *Satz* 1 leicht beweisen. Setzen wir

$$h_n := \frac{P_{a_n} y}{\langle y \mid P_{a_n} \mid y \rangle^{1/2}} \text{ und } p_n := Sp(W P_{a_n})$$

für alle n mit $Sp(WP_{a_n}) \neq 0$, so bilden die h_n ein System orthonormierter Elemente aus $\mathcal{H}$ und für die p_n gilt: $p_n > 0$, $\sum_n p_n = 1$. Die h_n und p_n erfüllen also die Voraussetzungen des Hilfssatzes, und ein Vergleich von Definition (3.1) mit den Voraussetzungen unseres Hilfssatzes zeigt unmittelbar, dass die – in beiden Fällen auftretenden – Funktionen $\tau(x)$ identisch sind. Damit ergibt sich für die Observablenwertfunktion von $\mathfrak{A}$ der Ausdruck

$$^0A_W(x) = a_{\tau(x)} = \sum_{n=1}^{R} a_n \, Ch(M_n) \,. \tag{A18}$$

Aus (A18) und dem statistischen Postulat folgt dann bereits

$$\begin{aligned} F_{A,W}(a) &:= Pr\{A < a\} = \mu\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0A_W(x) < a\} \\ &= \sum_{a_n < a} \mu(M_n) = \sum_{a_n < a} p_n = \sum_{a_n < a} Sp(WP_{a_n}) \,. \end{aligned} \tag{A19}$$

Da dieses Ergebnis für alle Zustandsoperatoren W gilt, können wir die zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems durch den Operator W_0 (des Zustandes zur Zeit $t = t_0$) und den unitären Entwicklungsoperator $U(t, t_0)$ ausdrücken und erhalten schliesslich

$$F_{\mathfrak{A},\mathfrak{W}_0}(a, t) = \sum_{a_n < a} Sp(U W_0 U^+ P_{a_n}) \,. \qquad \blacksquare$$

ANHANG III

Vorschrift zur Auswahl eines Elements $y(W) \in \mathcal{H}$ zu Definition (3.1)

Wie man sich leicht überlegt, existiert eine Abbildung λ von K in J mit der Eigenschaft

$$(\forall\, n \in K) \qquad (Sp(W P_{a_n}) \neq 0 \Rightarrow Sp(Q_{\lambda(n)} P_{a_n}) \neq 0) \,.$$

Daher können wir zu jedem Index $n \in K$ ein normiertes Element $z_{\lambda(n)} \in Q_{\lambda(n)} \mathfrak{H}$ finden mit den Eigenschaften

$$(\forall\, n \in K) \; \langle z_{\lambda(n)} \mid P_{a_n} \mid z_{\lambda(n)} \rangle \neq 0$$

und

$$(\forall (n, r) \in K \times K) \qquad (z_{\lambda(n)} = z_{\lambda(r)} \text{ oder } \langle z_{\lambda(n)} \mid z_{\lambda(r)} \rangle = 0) \,.$$

Nun wählen wir eine beliebige Folge $\{b_i;\, i \in T := \lambda(K) \subset J\}$ *positiver* Zahlen mit der Eigenschaft $0 < \| \sum_{i \in T} b_i z_i \| < \infty$ und konstruieren das Element

$$y := \frac{\sum_{i \in T} b_i z_i}{\| \sum_{i \in T} b_i z_i \|}$$

Ist $Sp(WP_{a_r}) \neq 0$ für einen beliebigen Index $r \in K$, so gilt

$$\langle y | P_{a_r} | y \rangle = \frac{1}{\| \sum_{i \in T} b_i z_i \|^2} \{ b^2_{\lambda(r)} \langle z_{\lambda(r)} | P_{a_r} | z_{\lambda(r)} \rangle + \sum_{i \neq \lambda(r)} b_i^2 \langle z_i | P_{a_r} | z_i \rangle \} .$$

Nach Konstruktion ist der erste Summand positiv und der zweite Summand nichtnegativ. Damit erfüllt das oben definierte y die gewünschte Beziehung

$$Sp(WP_{a_r}) \neq 0 \Rightarrow \langle y | P_{a_r} | y \rangle \neq 0 \text{ für alle } r \in K . \qquad \blacksquare$$

Herrn Professor Dr. G. Süßmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise und klärende Diskussionen. Herrn Professor Dr. H. Dinges danke ich für einige kritische Anmerkungen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Heisenberg, *The Development of the Interpretation of the Quantum Theory*, in: *N. Bohr and the Development of Physics*, ed. by W. Pauli (London 1955).
[2] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (New York 1966).
[3] E. Scheibe, *Philosophie und Physik* (*Veröffentlichungen in deutscher Sprache*), in: *Contemporary Philosophy*, ed. by R. Klibansky (Firenze 1968).
[4] H. Reichenbach, *Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik* (Basel 1949).
[5] V. Fock, *Über die Deutung der Quantenmechanik*, in: *Max-Planck-Festschrift 1958*, Berlin.
[6] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. *47*, 777 (1935).
[7] D. Bohm, *Quantum Theory* (New York 1951).
[8] F. London et E. Bauer, *La Théorie de l'observation en mécanique quantique* (Paris 1939).
[9] G. Süssmann, *Über den Messvorgang*, Abh. Bayr. Ak. Wiss., Math.-Nat. Kl. Heft *88* (1958).
[10] A. Einstein, *Reply to Criticism*, in: *A. Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. by P. A. Schilpp (New York 1949).
[11] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin 1932).
[12] D. Bohm, Phys. Rev. *84*, 166 (1951).
[13] D. Bohm, Phys. Rev. *85*, 180 (1952).
[14] D. Bohm, *Causality and Chance in Modern Physics* (London 1957).
[15] N. Wiener and A. Siegel, Phys. Rev. *91*, 1551 (1953).
[16] N. Wiener and A. Siegel, Nuov. Cim. Suppl. *2*, Ser X, 982 (1955).
[17] A. Siegel and N. Wiener, Phys. Rev. *101*, 429 (1956).
[18] A. Siegel, *The Differential-Space Theory of Quantum Systems*, in: *Differential Space, Quantum Systems and Prediction*, ed. by N. Wiener, Cambridge, Mass. 1966.
[19] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I* (New York 1958).
[20] K. O. Friedrichs et al., *Integration of Functionals*, New York University 1957.
[21] N. Wiener, J. Math. Phys. *2*, 131 (1923).
[22] R. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain* (New York 1934).
[23] H. Richter, *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Berlin 1956).
[24] K. Krickeberg, *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Stuttgart 1963).