Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 13 (1940)
Heft: III

Artikel: Théorie classique des forces d'échange
Autor: Stueckelberg, E.C.G. / Patry, J.F.C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111057

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie classique des forces d'échange

par **E. C. G. Stueckelberg** et **J. F. C. Patry.**

(25. IV. 40.)

1. Introduction et Résumé.

Le potentiel de l'interaction statique entre des particules nucléaires, dû au champ des forces nucléaires (théorie de YUKAWA) est calculé sous forme d'une série en g^2/hc. La méthode est celle des transformations de contact valable aussi bien en théorie classique qu'en théorie quantique. La convergence de la serie semble bonne pour le cas de la théorie scalaire (mésotron sans spin). Elle est très mauvaise pour la théorie vectorielle (mésotron doué d'un spin).

Les niveaux d'énergie d'un ensemble de particules se calculent comme l'énergie des orbites, proprement quantifiées, d'un système mécanique de points matériels. Si les forces entre les particules dérivent d'un potentiel ne dépendant que de la distance $r^{\mu\nu}$ entre le $\mu^{\text{ème}}$ et le $\nu^{\text{ème}}$ point matériel, ces orbites sont obtenues comme solutions des équations canoniques:

$$\dot{\vec{p}}^{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}^{\mu}}\,; \qquad \dot{\vec{q}}^{\mu} = \frac{\partial H}{\partial p^{\mu}}\,. \tag{1,1}$$

Ces équations proviennent d'une fonction Hamiltonienne:

$$H(\vec{p}^{\mu}, \vec{q}^{\mu}) = \sum_{\mu} H^{\mu} + \sum_{\mu}\sum_{\nu} V^{\mu\nu} \tag{1,2}$$

où H^{μ} représente l'énergie cinétique et $V^{\mu\nu}$ le potentiel des forces dépendant de $r^{\mu\nu} = |\vec{q}^{\mu} - \vec{q}^{\nu}|$. $\vec{q}^{\mu}$ et $\vec{p}^{\mu}$ sont les vecteurs de position et d'impulsion du $\mu^{\text{ème}}$ pointe de masse.

De même, les trajectoires hyperboliques qu'on observe dans les expériences de diffusion de rayons corpusculaires, se calculent à partir de (1,2). Ce procédé est suffisant, dans une certaine approximation, pour la discussion de la structure des atomes et molécules quand on utilise pour $V^{\mu\nu}$ le potentiel de Coulomb entre les noyaux et les électrons considérés comme des points matériels.

Si l'on veut pousser l'approximation plus loin, il est nécessaire d'introduire des variables intérieures des « points matériels » comme par exemple le « spin » de l'électron pour la structure fine et le « spin » des noyaux pour la structure hyperfine.

Le point matériel μ doit donc être décrit non seulement par $\vec{p}^{\mu}$ et $\vec{q}^{\nu}$ mais, en plus, par ses variables intérieures, que nous

désignerons par a^μ et b^μ. a^μ et b^μ sont canoniquement conjuguées, ce qui veut dire que leur évolution temporelle est donnée par des équations analogues à (1,1), l'équation pour $\dot{a}^\mu$ ayant le signe négatif.

Le potentiel d'interaction $V^{\mu\nu}$ prend alors la forme $V^{\mu\nu}$ $(a^\mu, b^\mu, a^\nu, b^\nu, r^{\mu\nu})$, faisant intervenir à la fois les variables intérieures et la distance $r^{\mu\nu}$. Dans la théorie de la structure atomique et moléculaire, les parties de $V^{\mu\nu}$, qui montrent cette dépendance de a^μ et b^μ, sont relativement peu importantes et il suffit de les traiter comme des perturbations des orbites calculées pour le potentiel de Coulomb pour obtenir une très bonne approximation. Par contre, la structure des noyaux atomiques nous montre que les forces entre protons et neutrons doivent dépendre des variables intérieures en première approximation déjà. Ce qu'on exprime habituellement en disant que les forces entre proton et neutron sont des « forces d'échange ».

Le but de ce travail est de calculer le potentiel $V^{\mu\nu}$ entre protons et neutrons, qui résulte d'une théorie du champ des forces nucléaires. On remarquera l'analogie complète avec le problème potentiel de Coulomb — champ électromagnétique, car en effet le potentiel de Coulomb découle de la théorie du champ électromagnétique de Maxwell dans l'approximation statique ($|\dot{\bar{q}}^\mu| \ll c$, $c =$ vitesse de lumière). On pensait jusqu'ici que la théorie du champ nucléaire (proposée par Yukawa et élaborée par différents auteurs[1])) donnait un potentiel $V^{\mu\nu} = u(a^\mu, b^\mu, a^\nu, b^\nu) \cdot v(r^{\mu\nu})$. Le facteur

$$v\,(r^{\mu\nu}) = \frac{e^{-l\,r^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu}} \tag{1,3}$$

disparaît pour des distances $r \gg l^{-1}$ (l^{-1} étant le rayon d'action des forces nucléaires).

Le facteur u est constant malgré sa dépendance des a^μ et des b^μ, en vertu des équations de mouvement des a^μ et b^μ. On savait d'ailleurs que (1,3) n'est valable que pour autant que les particules n'agissent sur le champ que par l'intermédiaire de leurs propriétés scalaires (charge électrique, etc.). Si, en plus, on tient compte de leur propriété vectorielle (spin), (1,3) doit être complété par des termes montrant un couplage entre l'orientation du spin des particules et le rayon vecteur de leur distance relative. Le facteur u ne reste alors plus constant mais, pour calculer les niveaux d'énergie, une certaine moyenne peut être définie. La démonstration qui (1,3) (ou la forme plus compliquée dans le cas de l'action sur les spins) résulte de la théorie du champ n'a été

fournie que par la première approximation de la méthode de perturbation de la théorie des quanta. Cette démonstration n'est pas suffisante quoique l'un de nous ait montré, par une méthode plus appropriée, que le potentiel de Coulomb et (1,3) (si les variables intérieures n'interviennent pas) sont valables pour l'approximation statique. Cette nouvelle démonstration s'obtient par des transformations de contact et peut être donnée aussi bien en théorie quantique qu'en théorie classique[2]). Dans le travail ci-dessous, nous appliquons cette méthode des transformations à des problèmes dans lesquels les variables intérieures interviennent. Nous montrons ainsi que le potentiel (1,3) (ou sa généralisation vectorielle) ne représente plus l'interaction. Il n'est que le premier terme d'une série qu'on peut calculer par des méthodes purement classiques.

Dans les pages suivantes, nous avons calculé cette série jusqu'au troisième terme pour le *champ scalaire* (théorie originale de YUKAWA) et jusqu'au deuxième pour le « *champ vectoriel* » qui, seul, a la symétrie nécessaire pour représenter les niveaux connus du deuton.

La théorie des champs quantifiés introduit des termes supplémentaires dans ces séries, à cause des fluctuations du champ. Nous en avons calculé aussi quelques-uns.

Nos résultats montrent que, dans l'état présent de la théorie, il est très difficile de remplacer l'action du champ par une interaction entre les particules. Ceci pour les raisons suivantes: En premier lieu, les termes de la self-énergie infinie de particules ponctuelles apparaissent comme dans l'électrodynamique. Mais, en plus de ces énergies qui tendent vers des *constantes* infiniment grandes quand le rayon des particules tend vers zéro, nous trouvons, en troisième approximation de la théorie scalaire et en deuxième approximation de la théorie vectorielle, des termes de la série qui dépendent de la distance entre deux particules et dont le facteur constant tend vers l'infini pour des particules ponctuelles. Pour les étudier, nous les avons rendus finis en introduisant des particules de dimensions finies. Enfin, le *rayon de convergence* de la série étudiée semble être de l'ordre de l^{-1}. Cela veut dire que, pour les régions intéressantes, on n'a aucune raison de supposer que le potentiel de YUKAWA a une signification quantitative. Tous ces défauts sont de nature purement classique. Si, en plus, on tient compte des termes dus aux fluctuations du champ, mentionnés ci-dessus, on trouve une série de termes présentant le même genre de difficultés, mais dont l'influence quantitative est plus grande encore.

*

2. Théorie d'un champ à une seule composante.

Nous décrirons le champ des forces nucléaires à l'endroit $\vec{x}$ et au temps t par le scalaire $Q(\vec{x}, t)$. Nous verrons plus loin de quelle façon l'on forme, à partir de ce champ, la force avec laquelle il agit sur les particules. Mais, tout d'abord, nous étudierons l'influence que les particules exercent sur ce champ. Pour cela, nous écrirons l'équation la plus simple montrant une covariance relativiste:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - l^2\right) Q(\vec{x}, t) = -4\pi g J(\vec{x}, t). \tag{2,1}$$

L'inhomogénéité $-4\pi g J$ est due aux particules (neutrons et protons) et nous verrons en (2,3) comment elle dépend de l'endroit $\vec{q}^{\,\mu}$ où est placée la $\mu^{\text{ème}}$ particule. En l'absence de particules, gJ est nul et Q satisfait à l'équation d'onde homogène. Cette équation n'est autre que l'équation de de Broglie pour des quanta doués d'une masse lh/c. (h est la constante de Planck divisée par 2π.)

Ces quanta n'interviendront jamais dans notre théorie, qui reste entièrement classique et le mot particules signifiera toujours protons ou neutrons. La constante l qui intervient dans l'équation (2,1) déterminera aussi le rayon d'action des forces nucléaires.

Mais revenons à l'influence des particules sur le champ. Par analogie avec l'électrodynamique, nous appellerons gJ la densité de charge des particules par rapport au champ Q. Avant de définir J, il nous faut préciser ce que nous appellerons particule ponctuelle. Si celle-ci est située à l'endroit $\vec{x} = \vec{q}^{\,\mu}$, on peut lui associer la densité $\delta(\vec{x} - \vec{q}^{\,\mu})$, δ étant la fonction de Dirac.

Pour rendre finies certaines expressions qui apparaîtront dans notre théorie, nous serons obligés de remplacer la fonction de Dirac $\delta(\vec{x})$ par une fonction $\varrho(\vec{x})$ donnant un rayon fini à la particule. En intégrant sur un domaine grand par rapport aux dimensions de la particule, on aura:

$$\int d\vec{x}^{\,3} \varrho(\vec{x}) = \int d\vec{x}^{\,3} \delta(\vec{x}) = 1 .$$

Les résultats obtenus pour des particules ponctuelles (en passant à la limite $\varrho = \delta$) seront marqués par une flèche; par exemple pour une fonction $f(\vec{x})$, on aura:

$$\int d\vec{x}^{\,3} f(\vec{x})\, \varrho(\vec{x}) \rightarrow f(0). \tag{2,2}$$

(Toute intégration $\int d\vec{x}^{\,3}$ est à exécuter sur l'espace entier.) Comme le champ Q, que nous voulons étudier, n'a qu'une seule compo-

sante, nous formerons une densité scalaire J^μ, au moyen de laquelle nous définirons J:

$$J^\mu = \beta^\mu \varrho(\vec{x} - \vec{q}^\mu); \quad \text{avec} \quad c\beta^\mu = \sqrt{c^2 - |\dot{\vec{q}}^\mu|^2} \tag{2,3}$$

L'inhomogénéité due à toutes les particules sera alors définie par:

$$J = \sum_\mu J^\mu. \tag{2,4}$$

Comme nous ne nous intéresserons qu'au cas statique $|\dot{\vec{q}}^\mu| \ll c$, on a $\beta^\mu = 1$. On voit alors que le facteur g est la « charge » (par rapport au champ nucléaire) d'une particule. L'équation (2,1) prend alors la forme:

$$ZQ = gJ \quad \text{avec} \quad 4\pi Z = l^2 - \Delta \tag{2,5}$$

équation facilement intégrable à l'aide de la fonction $v(r)$ de Yukawa (voir (1,3)).

$$Q(\vec{x}) = g\, Z^{-1} J = g \int d\vec{y}^3\, v(|\vec{x} - \vec{y}|)\, J(\vec{y}) \tag{2,6}$$

(2,6) définit l'opérateur intégral Z^{-1}, qui nous sera utile plus tard.

Il nous faut maintenant décrire l'influence du champ Q sur les particules. Pour cela, nous nous servirons de la conservation de l'énergie. En effet, pour des petites vitesses, l'équation (2,1) peut être obtenue à partir d'une fonction d'énergie (Hamiltonienne).

$$H = H^{\text{ch}} + V + H^{\text{part}} \tag{2,7}$$

où H^{ch} et V sont respectivement les fonctionnelles suivantes de $Q(\vec{x})$ et de la fonction canoniquement conjuguée $P(\vec{x})$

$$H^{\text{ch}} = \int d\vec{x}^3\, \tfrac{1}{2}(QZQ + 4\pi c^2 P^2) \tag{2,8}$$

$$V = -\int d\vec{x}^3\, gQJ.$$

Pour pouvoir écrire les équations canoniques, nous aurons besoin des dérivées fonctionnelles. Nous les définirons par

$$\delta F = \int d\vec{x}^3 \frac{\delta F}{\delta Q(\vec{x})} \delta Q(\vec{x})$$

qui exprime la variation δF d'une fonctionnelle $F[Q(\vec{x})]$ lorsque les fonctions admises $Q(x)$ satisfont à certaines conditions aux limites.

Les équations canoniques deviennent alors:

$$\dot{P} = -\frac{\delta H}{\delta Q} = -ZQ + gJ$$
$$\dot{Q} = \frac{\delta H}{\delta P} = 4\pi c^2 P. \tag{2,9}$$

Eliminant P on retrouve (2,1).

De (2,7) découlent aussi les équations de mouvement des particules de masse M sous la forme canonique. On obtient celles-ci en écrivant

$$H^{\text{part}} = \sum_{\mu} H^{\mu}(\vec{p}^{\mu}); \quad H^{\mu} = \frac{1}{2M} |\vec{p}^{\mu}|^2.$$

On voit ainsi que les particules sont soumises à une force

$$\vec{F}^{\mu} \rightarrow g \frac{\partial Q(\vec{q}^{\mu})}{\partial \vec{q}^{\mu}}. \tag{2,10}$$

C'est là l'équation qui nous indique comment le champ Q agit sur les particules.

Nous désirons maintenant transformer l'Hamiltonienne de façon à faire apparaître un potentiel qui, pour de petites vitesses des particules, s'exprimera en fonction de la distance $r^{\mu\nu}$ entre les deux particules μ et ν. Ainsi nous aurons ramené l'action du champ Q sur les particules à une action entre particules (analogue au potentiel de Coulomb). C'est une transformation de contact qui nous permettra de faire cette opération. On peut définir des transformations de contact pour les fonctions P et Q aussi bien que pour les variables $\vec{p}^{\mu}$ et $\vec{q}^{\mu}$. Pour cela, on se sert d'une expression U, fonction de $\vec{p}^{\mu}$ et de $\vec{q}'^{\mu}$, et fonctionnelle de P et de Q'. Au moyen des relations

$$\vec{q}^{\mu} = \frac{\partial U}{\partial \vec{p}^{\mu}}; \quad \vec{p}'^{\mu} = \frac{\partial U}{\partial \vec{q}'^{\mu}} \tag{2,11}$$

$$Q(x) = \frac{\delta U}{\delta P(x)}; \quad P'(x) = \frac{\delta U}{\delta Q'(x)} \tag{2,12}$$

on peut calculer les substitutions des transformations de contact. La substitution particulière

$$Q = Q' + gZ^{-1}J; \quad P = P' \tag{2,13}$$

$$\vec{q}^{\mu} = \vec{q}'^{\mu}; \quad \vec{p}^{\mu} = \vec{p}'^{\mu} + \frac{g}{c}\vec{A}(\vec{q}'^{\mu}) = \vec{\pi}'^{\mu}$$

résulte en effet d'une fonctionnelle de transformation

$$U = U_0 + g\,U_1 \tag{2,14}$$

avec

$$U_0 = \int d\,x^3 P Q' + \sum_\mu (\vec{p}^{\,\mu}, \vec{q}^{\,\prime\mu})$$

$$U_1 = \int d x^3 P Z^{-1} J' \; ; \quad J' = \sum_\mu \varrho(\vec{x} - \vec{q}^{\,\prime\mu}) .$$

De l'Hamiltonienne H de (2,7) résulteront à nouveau les équations de l'évolution temporelle des nouvelles variables P', Q', $\vec{p}^{\,\prime\mu}$, $\vec{q}^{\,\prime\mu}$, sous forme canonique, si nous effectuons les substitutions (2,13). $\vec{A}(\vec{q}^{\,\mu})$ est un potentiel vecteur dont la valeur limite est

$$\vec{A}\,(\vec{q}) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \vec{q}}\, c\, Z^{-1}\, P(\vec{q}) .$$

L'Hamiltonienne à laquelle nous parvenons ainsi sera

$$H = H^{\mathrm{ch}} + \sum_\mu H^\mu (\vec{\pi}^\mu) + \sum_\mu \sum_\nu V^{\mu\nu} \tag{2,15}$$

avec

$$\sum_\mu \sum_\nu V^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\, g^2 \int d\vec{x}^{\,3}\, J\, Z^{-1}\, J \rightarrow \infty - g^2 \sum_{\mu<\nu} v\,(r^{\mu\nu}) .$$

Nous avons partout supprimé les primes. L'interaction entre le champ et les particules est entièrement comprise dans le fait que les $\vec{p}^{\,\mu}$ de (2,7) sont devenus des $\vec{\pi}^\mu$ dépendant d'un potentiel vecteur. Il en résulte que l'inhomogénéité de l'équation d'onde sera maintenant proportionnelle aux vitesses des particules. Dans l'approximation qui nous intéresse, nous négligerons tout effet dû à la vitesse et $Q = P = 0$ sera une solution de notre équation. Alors $H^{\mathrm{ch}} = 0$ et $\vec{\pi}^\mu = \vec{p}^{\,\mu}$. En vertu de la deuxième équation (2,15), notre problème se réduit au calcul des orbites pour des particules soumises à une influence mutuelle décrite par le potentiel $V^{\mu\nu}$. Le terme infini est la contribution des termes $\mu = \nu$; il ne devient infini que dans la limite $\varrho \rightarrow \delta$.

3. La théorie d'un champ à plusieurs composantes.

La théorie simple exposée au chapitre précédent permet deux généralisations, que nous allons introduire. Tout d'abord, nous attribuerons à différentes particules des « charges » différentes, ce que l'on peut faire en introduisant un facteur scalaire et sans dimension τ^μ dans la définition de J^μ (2,3). En second lieu, on peut considérer *plusieurs champs* indépendants $Q_i(\vec{x})$, chacun satisfai-

sant à (2,1) avec des inhomogénéités respectives J_i, qui seront définies en introduisant des facteurs τ_i^μ au second membre de (2,3). τ_i^μ exprimera alors (en terme d'une constante g de la dimension de charge) la « charge » de la particule μ par rapport à la composante Q_i du champ.

Ces généralisations ne changent rien aux considérations du paragraphe précédent. Il faudra évidemment compléter les formules linéaires en P, Q ou J par un indice i, tandis que les autres formules, qui sont toutes bilinéaires par rapport à ces variables, sont à sommer sur l'indice i, par exemple P^2 devient $\sum_i P_i^2$.

Si tous les champs ont la même constante l, l'interaction aura la forme:

$$\sum_\mu \sum_\nu V_2^{\mu\nu} \rightarrow \infty \sum_\mu \sum_i \tau_i^\mu \tau_i^\mu - g^2 \sum_{\mu<\nu} \left(\sum_i \tau_i^\mu \tau_i^\nu\right) v\,(r^{\mu\nu}). \tag{3,1}$$

En généralisant ainsi notre théorie, nous avons gardé la supposition que les Q_i sont tous des scalaires. Cependant un potentiel de la forme (3,1) ne suffit pas encore pour expliquer les forces nucléaires. En effet, la théorie primitive de Heisenberg[3]) nécessitait déjà l'introduction des « forces d'échange ». Tandis que l'action des forces résultant d'une énergie potentielle (3,1) se borne à transporter de la quantité de mouvement d'une particule à l'autre, ces forces d'échange ajoutent à ce transport l'échange d'une autre qualité des particules. La force introduite par Heisenberg, par exemple, lie à l'action mécanique d'un proton sur un neutron, le transport de la charge électrique du proton au neutron. Les forces, qui ont été ensuite introduites par Majorana et Bartlett[4]), ajoutent à ce transport de charge électrique un échange supplémentaire de moment angulaire du spin.

Pour décrire l'échange de charge électrique entre deux particules, il faut concevoir un champ qui puisse transporter de la charge électrique. Il faut donc pouvoir construire, à partir des grandeurs du champ Q_i un quadrivecteur $\vec{\varrho}^{\,\mathrm{ch}}$ et ϱ_0^{ch} satisfaisant (dans les régions où il n'y a pas de particules chargées électriquement) à l'équation de continuité:

$$c \operatorname{div} \vec{\varrho}^{\,\mathrm{ch}} + \dot{\varrho}_0^{\,\mathrm{ch}} = 0 \tag{3,2}$$

car alors, on pourra poser que ce quadrivecteur est proportionnel au quadrivecteur de densité de charge électrique. Les quantités

$$\begin{aligned} \vec{\varrho}^{\,\mathrm{ch}} &= \frac{1}{4\pi hc} (Q_1 \operatorname{grad} Q_2 - Q_2 \operatorname{grad} Q_1) \\ \varrho_0^{\mathrm{ch}} &= \frac{1}{4\pi hc^2} (-Q_1 \dot{Q}_2 + Q_2 \dot{Q}_1) \end{aligned} \tag{3,3}$$

satisfont à ces conditions dans les régions entre les particules où l'inhomogénéité $J_i = \sum_\mu J_i^\mu$ disparaît. Pour leur donner la dimension d'une densité (cm^{-3}), il faut que la constante h quelconque ait la dimension $(p \cdot q)$. Dans les régions où se trouvent les particules porteuses de charge électrique (proportionnelle à λ^μ pour la particule μ), il faut compléter les densités (3,3) et écrire:

$$\begin{aligned} \vec{\varrho} &= \vec{\varrho}^{\,\mathrm{ch}} + \sum_\mu \lambda^\mu \frac{\dot{\vec{q}}^\mu}{c} \varrho(\vec{x} - \vec{q}^\mu) \\ \varrho_0 &= \varrho_0^{\mathrm{ch}} + \sum_\mu \lambda^\mu \varrho(\vec{x} - \vec{q}^\mu). \end{aligned} \tag{3,4}$$

Ces expressions satisferont l'équation de continuité, si l'évolution temporelle de chaque λ^μ est donnée par

$$\dot{\lambda}^\mu \rightarrow \frac{g}{h} \left(Q_1(\vec{q}^\mu)\, \tau_2^\mu - Q_2(\vec{q}^\mu)\, \tau_1^\mu\right). \tag{3,5}$$

Cette équation signifie que la charge électrique transportée par le champ est prise aux particules.

Cet échange de charge électrique nécessite donc l'introduction d'une *nouvelle variable* λ^μ (variable intérieure) en plus des $\vec{p}^\mu$ et $\vec{q}^\mu$ pour chaque particule μ. Pour avoir conservation d'énergie, elle doit être une fonction de certaines variables canoniques intérieures a^μ et b^μ.

L'évolution temporelle d'une variable quelconque F est, en vertu des équations canoniques, donnée par la paranthèse de Poisson:

$$\dot{F} = \{H, F\} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial a} \frac{\partial F}{\partial b} - \frac{\partial H}{\partial b} \frac{\partial F}{\partial a} \right). \tag{3,6}$$

La somme est à exécuter sur toutes les paires de variables canoniques, c'est-à-dire sous forme d'intégration sur les dérivées fonctionnelles par rapport aux $P_i(\vec{x})$ et $Q_i(\vec{x})$ et sous forme de sommation sur les $\vec{p}^\mu$, $\vec{q}^\mu$ et nos nouvelles variables a^μ et b^μ.

Dans notre Hamiltonienne (2,7), généralisée par l'introduction des τ_i^μ, ce ne sont évidemment que les τ_i^μ qui peuvent dépendre des variables intérieures. Pour avoir plus de symétrie, nous introduirons un τ_3^μ au lieu de λ^μ par la relation $\tau_3^\mu = 2\lambda^\mu - 1$.

L'évolution temporelle (3,5) pour λ^μ découle alors de H (2,7) si, pour les τ_1^μ et τ_2^μ, les relations cycliques

$$2\,\tau_1^\mu = h\left\{\tau_2^\mu, \tau_3^\mu\right\} \tag{3,8}$$

sont satisfaites.

Si l'on complète le champ Q_1 et Q_2 par l'introduction d'un Q_3 qui agit sur les particules μ par l'intermédiaire de τ_3^μ, nos formules gagnent en symétrie. Grâce à cette troisième composante, les τ_i^μ satisfaisant tous à (3,7), deviennent des constantes d'intégration du problème (1,1) malgré la dépendance explicite du terme infini de (3,1) en τ_i^μ. Cela n'est vrai du reste que pour de grandes distances entre particules. Pour deux particules seulement (3,7) nous assure même que le facteur $\sum_i \tau_i^\mu \tau_i^\nu$ (que nous abrégerons sous la forme (τ^μ, τ^ν)) reste une constante d'intégration. Toutes ces propriétés peuvent se démontrer très simplement. En effet, en posant $N_i^\mu = \frac{1}{2} h \tau_i^\mu$, on voit que (3,7) devient

$$N_1^\mu = \{N_2^\mu, N_3^\mu\}. \tag{3,8}$$

Ces relations sont analogues à celles satisfaites par les trois composantes du moment d'impulsion d'un corps solide. Ainsi, tous les théorèmes qui s'appliquent à ces moments sont valables pour les N_i^μ.

C'est pour cette raison qu'on appelle N_i^μ la composante i du « spin isotopique » de la particule μ.

Le fait que les charges des particules nucléaires (neutron et proton) sont toujours positives et au plus égales à la charge du proton s'exprimera par la condition que la valeur d'une composante du vecteur N_i^μ dans « l'espace de charge électrique » sera toujours contenue entre $-h/2$ et $+h/2$.

Malheureusement la validité de (1,1) avec (3,1) comme potentiel d'interaction ne peut plus être démontrée comme au chapitre 2. Malgré le fait que (τ^μ, τ^ν) sont des constantes de l'intégration de (1,1), la substitution (2,13) n'est plus strictement canonique. Elle ne l'est qu'en première approximation en g. Nous discuterons dans le paragraphe suivant l'effet des variables intérieures sur la forme du $V^{\mu\nu}$ qui, dans le problème (1,1), déterminerait les orbites.

4. La théorie des forces d'échange.

Les deux champs Q_1 et Q_2 transportent donc de la charge électrique d'une particule à l'autre, autrement dit ils produisent l'échange de charge électrique entre deux particules. C'est la raison pour laquelle les forces dérivant du potentiel $V^{\mu\nu}$ en (3,1) sont appelées des « *forces d'échange* ».

Pour faire apparaître dans l'Hamiltonienne un potentiel $V^{\mu\nu}$ décrivant l'interaction entre les particules, à la place de l'interaction par l'intermédiaire du champ, nous devons, comme précédemment, opérer une transformation de contact du type (2,13).

En effet, nous avons vu que cette opération a séparé le champ statique $Z^{-1}J$ du champ total Q. La nouvelle variable Q', différence entre ces deux champs, ne se trouve dans l'Hamiltonienne que sous forme d'un potentiel vecteur, dont l'influence est négligeable pour des petites vitesses.

En essayant de définir des fonctionnelles U de transformation, nous nous heurtons au fait que, maintenant, les variables intérieures a^μ et b^μ dépendent du temps. Nous avons alors développé la fonctionnelle U sous forme d'une série de puissance de la charge g. C'est le seul moyen que nous avons trouvé pour tourner cette difficulté. Nous posons $U = U_0 + g U_1 + g^2 U_2 + \ldots$, U_0 est défini par (2,14) (le terme PQ' étant remplacé par $\sum_i P_i Q_i'$, en plus un terme $\Sigma\, a^\mu b'^\mu$ doit être ajouté) et U_1 et U_2 sont donnés par

$$U_1 = \sum_i \int d\vec{x}^3\, P_i\, Z^{-1}\, J_i\,(a, b', \vec{q}\,')$$

$$U_2 = \tfrac{1}{2} \sum \left(\sum_i \int d\vec{x}^3 P_i\, Z^{-1} \frac{\partial J_i}{\partial a}\right)\left(\sum_i \int d\vec{x}^3 P_i\, Z^{-1} \frac{\partial J_i}{\partial b'}\right) \quad (4,1)$$

$J_i(a, b', q')$ symbolise la fonction J_i qui dépend des a^μ, b^μ, $\vec{q}^{\,\mu}$ et dans laquelle les b^μ sont remplacés par les b'^μ et les q^μ par les $\vec{q}\,'^\mu$. Les dérivées apparaissant en U_2 sont les dérivées de cet J_i par rapport à a^μ et b'^μ. La somme est à exécuter sur toutes les paires de variables a^μ et b'^μ. Cette transformation donne en plus des transformations (2,11) et (2,12), des transformations canoniques pour les variables intérieures a^μ et b^μ. Dans les formules explicites figureront les $J(a, b', q')$ et leurs dérivées. Si ces expressions sont développées en série de Taylor

$$J_i(a, b', \vec{q}\,') = J_i(a', b', \vec{q}\,') + \sum_\mu (a^\mu - a'^\mu) \frac{\partial J_i}{\partial a'^\mu} + \cdots \quad (4,2)$$

on trouve, pour P_i, $\vec{q}^{\,\mu}$ et $\vec{p}^{\,\mu}$ (au potentiel vecteur près), des identités comme substitutions, tandis que les variables Q_i s'expriment sous forme d'une série

$$Q_i = Q_i' + g Z^{-1} J_i' - \frac{g^2}{2} Z^{-1}(A_{ik}' Z^{-1} P_k') + \ldots \quad (4,3)$$

Un indice (i ou k) apparaissant deux fois dans la même expression implique une sommation sur cet indice. J_i' est l'abréviation pour la fonction $J_i(a', b', q')$. Le prime signifie que a^μ, b^μ et $\vec{q}^{\,\mu}$ sont remplacés par les nouvelles variables a'^μ, b'^μ et $\vec{q}\,'^\mu$. Les grandeurs $A_{ik}'(\vec{x})$ sont formées à partir des paranthèses de Poisson

$$A_{ik}(\vec{x})\, \varrho\, (\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \{J_i(\vec{x}), J_k(\vec{y})\}. \quad (4,4)$$

La flèche indique que la décomposition du premier membre en un produit d'une fonction de $\vec{x}$ par $\varrho(\vec{x}-\vec{y})$ n'est possible que dans la limite $\varrho(\vec{x}) \rightarrow \delta(\vec{x})$.

Les J_i, fonctions des variables canoniques a^μ, b^μ et $\vec{q}^\mu$, doivent être exprimés en termes des J_i' et des A'_{ik}. Les transformations canoniques pour a^μ et b^μ donnent, pour ces substitutions

$$J_i = J_i' - g A'_{ik} Z^{-1} P_k' + \ldots \tag{4,5}$$

Le résultat de ces substitutions donne, pour $V^{\mu\nu}$, le terme (3,1), mais, en plus, on a des termes contenant les variables du champ sous forme linéaire

$$V^{\text{lin}} = -g^3 \int d\vec{x}^{\,3} P_i Z^{-1} (A_{ik} Z^{-1} J_k) + \ldots \tag{4,6}$$

et d'autres bilinéaires ou d'ordres plus élevés:

$$V^{\text{bilin}} = -\frac{g^2}{2} \int d\vec{x}^{\,3} Q_i A_{ik} Z^{-1} P_k + \ldots \tag{4,7}$$

Comme dans les paragraphes précédents, nous avons supprimé les primes après avoir effectué la substitution. En tirant alors de l'Hamiltonienne l'équation d'onde inhomogène (2,1), on voit facilement que l'inhomogénéité aura des termes provenant des dérivées fonctionnelles de V^{lin} et de V^{bilin}. Or les inhomogénéités dues à V^{bilin} sont au moins linéaires dans les variables du champ. En nous limitant aux termes en g^2, la solution $Q = P = 0$ reste donc possible pour les champs et V^{bilin} n'a donc pas d'influence. Mais ce n'est pas le cas pour V^{lin}. En effet, un champ «statique» qui est présent, même si les $\dot{\vec{q}}^\mu$ sont nuls, apparaîtra dû aux inhomogénéités provenant de V^{lin}. Il est proportionnel à g^3 et dérive du V^{lin} en (4,6). Ce champ statique sera la cause d'une force proportionnelle à g^6 entre les particules.

Mais on peut éliminer le V^{lin} de notre H par une nouvelle transformation de contact, comme nous l'avons fait pour la partie statique de V en (2,8). On pourra ainsi remplacer la force par un potentiel d'interaction statique $V^{\mu\nu\alpha\beta}$ entre quatre particules μ, ν, α, β. Cette deuxième transformation de contact

$$\begin{aligned}
U &= U_0 + g^3 U_3 \\
U_0 &= \int d\vec{x}^{\,3} P_i Q_i' + \sum_\mu (\vec{p}^\mu \vec{q}'^\mu) + \sum_\mu a^\mu b'^\mu \\
U_3 &= -(8\pi c^2)^{-1} \int dx^3 Q_i' W_i (a, b', q') \\
W_i &= 2 Z^{-1} (A_{ik} Z^{-1} J_k)
\end{aligned} \tag{4,8}$$

introduit en effet un potentiel d'interaction supplémentaire

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{\alpha}\sum_{\beta} V^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{g^6}{32\,\pi c^2}\int d\vec{x}^{\,3}\, W_i^{\,2}$$

$$= -\sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\frac{g^6}{4\,c^2\,l}\,\tau_m^{\alpha}\left\{\tau_i^{\beta}\,\tau_m^{\beta}\right\}\left\{\tau_i^{\mu}\,\tau_k^{\mu}\right\}\tau_k^{\nu}\,\frac{e^{-l(r^{\alpha\beta}+r^{\mu\nu}+r^{\beta\mu})}}{r^{\alpha\beta}\,r^{\mu\nu}} \tag{4,9}$$

Si deux particules μ et ν seulement entrent en considération, cette expression prend la forme

$$V_6^{\mu\nu} = \frac{g^6}{h^2\,c^2\,l}\left(12 - 4\,(\tau^{\mu}\,\tau^{\nu})\right)\frac{e^{-l\,r^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu}}\;\frac{e^{-l\,r^{\mu\nu}} - e^{-2\,l\,r^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu}} \tag{4,10}$$

lorsque nous appliquons la théorie symétrique par rapport aux trois composantes du champ, théorie définie par (3,7), et si nous posons $(\tau_i^{\mu})^2 = 1$ (ce dernier fait résulte de la théorie des quanta). Il est intéressant de remarquer que (4,10) ne donne pas de $V^{\mu\mu}$ (énergie propre). Cela n'est vrai que pour la théorie symétrique.

L'Hamiltonienne exprimée en termes des nouvelles variables contiendra encore une fois des termes de la forme V^{lin} et V^{bilin}. Cependant, les termes V^{lin} ne donneront naissance à des champs statiques que dans une approximation en g^5, champs qui, à leur tour, produiront des forces proportionnelles à g^{10}. Leur élimination sera encore une fois possible par une transformation

$$U = U_0 + g^5\,U_5 + \cdots$$

Il est donc, en principe, possible de remplacer la théorie du champ nucléaire par des potentiels d'interaction statiques qu'on peut exprimer sous forme d'une série en g^4.

Pour effectuer ces transformations et substitutions, S. Lie a donné une méthode générale que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

5. La méthode des groupes continus de transformation de contact.

S. Lie[5]) a démontré que les substitutions

$$F = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,D'^{n}\,F' \tag{5,1}$$

sont canoniques. Elles sont définies à partir des itérations $D'^{n} = D'\cdot D'\cdot D'\ldots$ (n fois) d'un opérateur différentiel

$$D' = \sum\left(\frac{\partial U'}{\partial a'}\,\frac{\partial}{\partial b'} - \frac{\partial U'}{\partial b'}\,\frac{\partial}{\partial a'}\right) \tag{5,2}$$

Comme en (3,6), la somme est à exécuter sur toutes les paires de variables canoniques. L'avantage de ce procédé est de donner directement les substitutions tandis qu'auparavant ce n'était qu'à la suite d'un long calcul qu'on pouvait les obtenir. U' est fonctionnelle et respectivement fonction des nouvelles variables canoniques $P', Q', \vec{p}'^{\mu}, \vec{q}'^{\mu}, a'^{\mu}, b'^{\mu}$, F est une variable canonique ou une fonction de telles variables. F' est la même fonction des variables primées.

Cette méthode exprime F en termes de parenthèses de Poisson par la série

$$F = F' + \{U', F'\} + \frac{1}{2!}\{U', \{U', F'\}\} + \frac{1}{3!}\cdots \tag{5,3}$$

Avec la fonctionnelle

$$U = g\,U_1\,; \quad U_1 = \int d\vec{x}^{\,3} P_i\, Z^{-1} J_i \tag{5,4}$$

on revient aux transformations (4,3) et (4,5), mais la série en g est maintenant complètement déterminée.

Transformant ensuite avec la fonctionnelle

$$U = g^3 U_3\,; \quad U_3 = -\,(8\pi c^2)^{-1} \int d\vec{x}^{\,3}\, Q_i W_i \tag{5,5}$$

(les définitions de W_i étant données en (4,8) et (4,4)), on introduit l'interaction en g^6 (4,9). On continue ces substitutions jusqu'aux interactions en g^{10} par un $U = g^5 U_5$. Le résultat de ces calculs en se limitant à deux particules est donné par

$$\begin{aligned} V_{10}^{\mu\nu} = {} & \frac{g^{10}}{h^4 c^4 l}\,\frac{e^{-2lr^{\mu\nu}}}{(r^{\mu\nu})^2}\,(e^{-lr^{\mu\nu}} - 1)^2 \left\{ \frac{e^{-lr^{\mu\nu}}}{lr^{\mu\nu}}\,[8(\tau^{\mu}\tau^{\nu}) - 24] \right. \\ & \left. + \frac{1}{lr_0}\,[8(\tau^{\mu}\tau^{\nu}) - 72] \right\} + \frac{g^{10}}{h^4 c^4 l}\,\frac{e^{-2lr^{\mu\nu}}}{(r^{\mu\nu})^2}\,(1 - e^{-lr^{\mu\nu}} - lr^{\mu\nu} e^{-lr^{\mu\nu}}) \\ & \left[\frac{e^{-2lr^{\mu\nu}}}{(lr^{\mu\nu})^2} - \frac{1}{(l\,r_0)^2} \right] [12 - 4(\tau^{\mu}\tau^{\nu})]\,. \end{aligned} \tag{5,6}$$

Dans cette expression sont contenus les termes en g^{10} provenant déjà de (5,5) aussi bien que les termes obtenus par U_5.

Nous avons supprimé, dans cette formule, les termes infinis et constants en $V_{10}^{\mu\mu}$ (énergie propre des particules). Cependant, $V_{10}^{\mu\nu}$ contient encore des termes infinis, mais ceux-ci ne sont plus des constantes. Ils sont fonction de la distance entre les particules. Nous les avons rendus finis en donnant aux particules un rayon fini r_0 défini par

$$\frac{1}{r_0} = \iint \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}\,|}\, \varrho(\vec{x})\, \varrho(\vec{y})\, d\vec{x}^{\,3}\, d\vec{y}^{\,3} \to \infty\,. \tag{5,7}$$

Nous avons calculé numériquement $V_6^{\mu\nu}$ et $V_{10}^{\mu\nu}$ pour une valeur r_0 dix fois plus petite que le rayon d'action des forces l^{-1}. Ces résultats sont donnés dans la figure 1, où nous avons tracé le rapport entre ces deux derniers potentiels et le potentiel de YUKAWA $V_2^{\mu\nu}$ (c'est-à-dire (3,1), sans le terme de la self-énergie). On remarquera que, même pour des distances $r \sim r_0$, la convergence semble bonne. Le fait que $V_2^{\mu\nu}$ donne une répulsion entre neutron et proton ($(\tau^\mu \tau^\nu) = -3$) est un défaut bien connu de la théorie scalaire. C'est une des raisons qui nous obligent à considérer des champs vectoriels (cf. le dernier alinéa du paragraphe suivant).

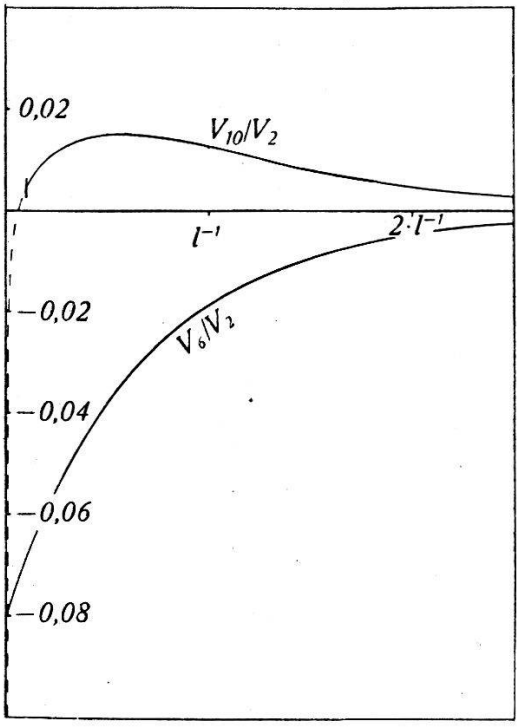

Fig. 1.

Rapport entre les approximations supérieures du potentiel d'interaction et le potentiel de Yukawa pour la théorie scalaire.

Nous avons représenté le rapport V_6/V_2 et V_{10}/V_2 en fonction de r avec les valeurs numériques suivantes: $(\tau^\mu, \tau^\nu) = -3$; $g/hc = 1/10$; $1/r_0 = 10 \times l$. Nous remarquons que la convergence de la série est excellente, même pour des distances de l'ordre r_0. Nous avons arrêté la courbe V_{10}/V_2 qui dépend de r_0 à la distance $r = r_0$, car, pour des distances plus courtes, elle n'a aucune signification.

6. La théorie vectorielle.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que les forces provenant de la variable intérieure charge électrique, forces qui produisaient l'échange de cette charge entre les particules nucléaires. Ce sont des forces d'Heisenberg. Mais on sait que, en plus de cette propriété scalaire, on doit admettre que les particules échangent une

propriété vectorielle, leur moment d'impulsion du spin dans l'espace ordinaire (force de Majorana). La théorie devient alors plus compliquée car elle demande l'introduction d'un champ vectoriel, qui peut seul transporter cette propriété vectorielle.

La théorie d'un tel champ a été proposée par PROCA[6]) pour le cas des équations homogènes et KEMMER[7]) l'a appliquée au cas inhomogène. L'un de nous a démontré[8]) que les équations peuvent aussi être mises sous forme canonique si le champ est décrit par cinq composantes Q_i^α à la place de chaque Q_i des paragraphes précédents. Les quatre premières composantes de ce champ forment un quadrivecteur ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) et la cinquième un scalaire. Nous écrirons ces composantes sous la forme $\vec{Q}_i$ (vecteur Q_i^1, Q_i^2 et Q_i^3), Q_i^0 et Q_i (vrai scalaire).

La densité de charge des particules par rapport au champ était $g J_i^\mu = g \tau_i^\mu \varrho(\vec{x} - \vec{q}^\mu)$. Les particules nucléaires étant douées maintenant d'un moment angulaire $\vec{M}^\mu = (h/2)\vec{\sigma}^\mu$, mesuré en termes de la constante h par un vecteur sans dimension $\vec{\sigma}$, on peut alors associer à la particule un vecteur *de la densité de polarisation* $g\vec{S}_i^\mu$ par rapport au champ $\vec{Q}_i$ vectoriel

$$g \vec{S}_i^\mu = f l^{-1} \tau_i^\mu \vec{\sigma}^\mu \varrho(\vec{x} - \vec{q}^\mu) . \tag{6,1}$$

Nous exprimons cette polarisation au moyen d'une deuxième constante f de la même dimension que g et par la longueur l^{-1} introduite en (1,3) et (2,1). Pour autant qu'on se limite à de petites vitesses, les équations (2,1) sont à remplacer pour chaque Q_i par

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - l^2\right) \vec{Q}_i = -4\pi g \text{ rot } \vec{S}_i \tag{6,2}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - l^2\right) Q_i^0 = -4\pi g J_i^0$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - l^2\right) Q_i = -4\pi g (lc)^{-1} \frac{\partial J_i^0}{\partial t}$$

Q_i est un vrai scalaire au sens de l'espace-temps, tandis que J_i^0 et Q_i^0 sont les quatrièmes composantes des quadrivecteurs $\vec{J}_i$ et $\vec{Q}_i$. (Nous négligeons $\vec{J}_i$ pour nos approximations statiques et posons $J_i^0 = J_i$, car le facteur $\beta = 1$; voir (2,3)).

Pour autant que l'on néglige dès le début l'influence du potentiel vecteur, les équations (6,2) résultent, sous forme canonique, d'une Hamiltonienne (2,7) avec

$$H^{\mathrm{ch}} = \tfrac{1}{2}\int d\vec{x}^{\,3}\{(\vec{Q}_i, Z\vec{Q}_i) + Q_i Z Q_i - Q_i^0 Z Q_i^0 + 4\pi c^2 |\vec{P}_i|^2 + 4\pi c^2 P_i^2 - 4\pi c^2 P_i^{02}\}$$

$$V = g\int d\vec{x}^{\,3}\{(Q_i^0 + 4\pi \frac{c}{l} P_i) J_i - (\vec{Q}_i, \mathrm{rot}\, \vec{S}_i)\}. \qquad (6,3)$$

La covariance relativiste des équations (6,2) et (6,3) pour des vitesses quelconques et le fait que l'énergie H est toujours positive a été démontrée par l'un de nous[8]) si l'équation, compatible avec (6,2), $c\,\mathrm{div}\,\vec{Q}_i + \dot{Q}_i^0 - clQ_i = 0$ est introduite comme condition initiale.

Une fonctionnelle de transformation peut être construite en analogie parfaite avec (2,14) (PQ' est à remplacer par $(\vec{P}_i, \vec{Q}_i') + P_i^0 Q_i^{0\prime} + P_i Q_i'$). U_1 est alors donné par

$$U_1 = \int dx^3 [(\vec{P}_i, Z^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{S}_i') + P_i^0 Z^{-1} J_i' + Q_i'(lc)^{-1} J_i']. \qquad (6,4)$$

Il en résulte une Hamiltonienne avec le potentiel bien connu

$$\sum_\mu \sum_\nu V_2^{\mu\nu} = \frac{g^2}{2}\int d\vec{x}^{\,3}\{-(\mathrm{rot}\,\vec{S}_i, Z^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{S}_i) + J_i Z^{-1} J_i - 4\pi J_i l^{-2} J_i\}$$
$$\to \infty + \sum_{\mu>\nu} (\tau^\mu \tau^\nu)\left(g^2 + f^2\left[(\vec{\sigma}^\mu, \vec{\sigma}^\nu) + l^{-2}\left(\vec{\sigma}^\mu, \frac{\partial}{\partial \vec{q}^\mu}\right)\left(\vec{\sigma}^\nu, \frac{\partial}{\partial \vec{q}^\nu}\right)\right]\right)\frac{e^{-l r^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu}} \qquad (6,5)^{*})$$

(6,5) n'est valable que pour autant que les τ_i^μ et les composantes du vecteur $\vec{\sigma}^\mu$ sont constantes. S'ils dépendent des variables intérieures a^μ, b^μ, le processus de Lie, décrit au chapitre 5, doit être appliqué et l'on retrouve l'expression (6,5) pour le terme en g^2.

En effet, la première substitution de Lie, qui correspond à (5,4) est $U' = gU_1$ avec le U_1 de (6,4,) mais où, naturellement, toutes les grandeurs portent un prime. Le résultat d'une telle

---

*) Au moment où les particules se « touchent », le premier et le dernier terme de la formule exacte donnent lieu à des termes supplémentaires du type constante $\times\,\delta(\vec{q}^\mu - \vec{q}^\nu)$. Ils peuvent être éliminés d'une façon covariante, comme l'un de nous l'a démontré (Stueckelberg, Phys. Rev. **54**, 889, 1938).

substitution est qu'en plus de $\sum_\mu \sum_\nu V^{\mu\nu}$, le H contiendra un V^{lin} et un V^{bilin}, dont le premier terme est

$$V^{\text{lin}} = g^3 \int d\vec{x}^{\,3} \{(\vec{P}_i, Z^{-1} \operatorname{rot} \vec{R}_i) + P_i^0 Z^{-1} T_i + Q_i (lc)^{-1} T_i\}. \tag{6,6}$$

Les abréviations $\vec{R}_i$ et T_i sont

$$\begin{aligned} R_i &= -(\operatorname{rot}(Z^{-1} \operatorname{rot} \vec{S}_k), \tilde{A}_{ik}) + \vec{A}_{ik} Z^{-1} J_k \\ T_i &= -(\operatorname{rot}(Z^{-1} \operatorname{rot} \vec{S}_k), \vec{A}_{ik}) + A_{ik} Z^{-1} \mathrm{J}_k \end{aligned} \tag{6,7*)}$$

Ici, la définition de $A_{ik}(\vec{x})$ est donnée par la paranthèse de Poisson (4,4), tandis que le vecteur $\vec{A}_{ik}$ est défini par

$$\vec{A}_{ik}(\vec{x})\, \varrho(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \{\vec{S}_i(\vec{x}), J_k(\vec{y})\}. \tag{6,8}$$

Le tenseur asymétrique (dont les indices α et β se rapportent aux trois axes spatiaux) est défini par

$$\tilde{A}_{ik}^{\alpha\beta}(\vec{x})\, \varrho(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \{S_i^\alpha(\vec{x}), S_k^\beta(\vec{y})\}. \tag{6,9}$$

Le produit intérieur d'un vecteur $\vec{B}$ avec $\tilde{A}_{ik}$ donne un vecteur $(\vec{B}, \tilde{A}_{ik}) = \vec{C}_{ik}$ de composante

$$C_{ik}^\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} B^\alpha A_{ik}^{\beta\alpha}.$$

Ce sont des produits semblables qui figurent dans (6,7).

La seconde transformation de Lie (analogue à (5,5)) est

$$\begin{aligned} U = g^3 U_3 = g^3 \int d\vec{x}^{\,3} \, [&(4\pi c^2)^{-1} (\vec{Q}_i, \operatorname{rot} Z^{-1} \vec{R}_i) \\ &- (4\pi c^2)^{-1} Q_i^0 \, Z^{-1} T_i - (lc)^{-1} P_i Z^{-1} T_i]. \end{aligned} \tag{6,10}$$

Elle nous amène à un potentiel

$$\begin{aligned} \sum_\mu \sum_\nu \sum_\alpha \sum_\beta V_6^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi c^2} \int d\vec{x}^{\,3} \, [&(\operatorname{rot} \vec{R}_i, Z^{-2} \operatorname{rot} \vec{R}_i) \\ &- T_i Z^{-2} T_i + 4\pi (l)^{-2} T_i Z^{-1} T_i]. \end{aligned} \tag{6,11}$$

En nous limitant à deux particules seulement, on arrive à un $V_6^{\mu\nu}$ que l'on doit ajouter à (6,5) et qui contient déjà des termes infinis (dépendant de la distance) alors que, dans la théorie scalaire, ils ne sont apparus qu'en $V_{10}^{\mu\nu}$. Exprimant ces coefficients infinis par $1/r_0^{-1}$ comme en (5,7), on arrive à une formule très compliquée. Nous avons pris pour la valeur moyenne de $(\sigma^{\mu\alpha}, \sigma^{\nu\beta})$ la valeur zéro lorsque $\alpha \neq \beta$ et la valeur $\frac{1}{3}(\vec{\sigma}^\mu, \vec{\sigma}^\nu)$ lorsque $\alpha = \beta$ (α et β

*) D'autres termes non écrits résultent encore. Mais ils sont éliminés en même temps que les termes $\delta(\vec{q}^\mu - \vec{q}^\nu)$, si on ajoute à l'Hamiltonienne (6,3) le terme invariant $2\pi g^2 l^{-2} \int d\vec{x}^3 J_i J_i$.

se référant aux axes spatiaux et μ et ν à deux particules). La formule pour V_2 (6,5) se réduit alors à l'approximation discutée dans l'introduction

$$V_2^{\mu\nu} = hcl\,(\tau\tau)\,[\gamma + \tfrac{2}{3}(\vec{\sigma}\vec{\sigma})\,\varphi]e^{-\xi}\xi^{-1}. \tag{6,12}$$

Nous avons introduit, dans le seul but de simplifier l'écriture, la variable sans dimension $\xi = rl$, et les constantes sans dimensions $\gamma = g^2/hc$ et $\varphi = f^2/hc$. Nous avons aussi supprimé les indices et la virgule dans les paranthèses (τ^μ, τ^ν) et $(\vec{\sigma}^\mu, \vec{\sigma}^\nu)$.

Dans la même approximation, on obtient*) pour V_6 la formule

$$V_6^{\mu\nu} = \overline{V}_6^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi_0} V_6^{0\,\mu\nu} \tag{6,13}$$

avec:
$$\begin{aligned}
(hcl)^{-1}\overline{V}_6^{\mu\nu} = {} & e^{-2\xi}\xi^{-2}\{\varphi^3[30 - 4(\tau\tau) - 4(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + \tfrac{1}{3}\,8(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + \gamma\varphi^2[16 - \tfrac{1}{3}\,16(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,8(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{9}\,64(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + \gamma^2\varphi\,[24 - 8(\tau\tau) + 16(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,16(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + \gamma^3[12 - 4(\tau\tau)]\} \\
& - e^{-3\xi}\xi^{-2}\{\varphi^3[8(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,28(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] + \gamma\varphi^2[64 - \tfrac{1}{3}\,64(\tau\tau) \\
& \quad - \tfrac{1}{3}\,32(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + \tfrac{1}{9}\,80(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] + \gamma^2\varphi\,[24(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 8(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau) \\
& \quad + \gamma^3[12 - 4(\tau\tau)]\} \\
& + e^{-2\xi}\xi^{-3}\varphi^3[72 - 16(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + e^{-3\xi}\xi^{-3}\{\varphi^3[16(\tau\tau) + 8(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 4(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& \quad + \gamma\varphi^2[32 - \tfrac{1}{3}\,32(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,64(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + \tfrac{1}{9}\,256(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& \quad + \gamma^2\varphi\,[56(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,56(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] + \gamma^3[24 - 8(\tau\tau)]\} \\
& + e^{-2\xi}\xi^{-4}\varphi^3[180 - 40(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,80(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& - e^{-3\xi}\xi^{-4}\varphi^3[8(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 32(\tau\tau) - 20(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& \quad + \gamma\varphi^2[96 - 32(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + e^{-2\xi}\xi^{-5}\varphi^3[216 - 48(\tau\tau) - 32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + e^{-3\xi}\xi^{-5}\varphi^3[24(\tau\tau) + 40(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + 20(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& \quad - \gamma\varphi^2[48 - 16(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,16(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + e^{-2\xi}\xi^{-6}\varphi^3[108 - 24(\tau\tau) - 16(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& + e^{-3\xi}\xi^{-6}\varphi^3[72(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + 12(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
& - e^{-3\xi}\xi^{-7}\varphi^3[8(\tau\tau) - 40(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 4(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)]
\end{aligned}$$

*) Ces longs calculs ont été effectués par J. C. P.

$$\begin{aligned}
\text{et: } (hcl)^{-1} V_6^{0\mu\nu} = &- e^{-2\xi}\xi^{-2}\{\varphi^3[66 - 12(\tau\tau) - 4(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) + 8(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
&+ \gamma\varphi^2[32 - \tfrac{1}{3}\,32(\tau\tau) - \tfrac{1}{3}\,8(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{9}\,128(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
&+ \gamma^2\varphi[48 - 16(\tau\tau) + 32(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)] \\
&+ \gamma^3[24 - 8(\tau\tau)]\} \\
&- e^{-2\xi}\xi^{-3}\varphi^3\{120 - 16(\tau\tau) + 16(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)\} \\
&- e^{-2\xi}\xi^{-4}\varphi^3\{300 - 40(\tau\tau) + 40(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{3}\,80(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)\} \\
&- e^{-2\xi}\xi^{-5}\varphi^3\{360 - 48(\tau\tau) + 48(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 32(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)\} \\
&- e^{-2\xi}\xi^{-6}\varphi^3\{180 - 24(\tau\tau) - 24(\vec{\sigma}\vec{\sigma}) - 16(\vec{\sigma}\vec{\sigma})(\tau\tau)\}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc séparé $V_6^{\mu\nu}$ en deux termes $\overline{V}_6^{\mu\nu}$ et $\xi_0^{-1} V^{0\mu\nu}$ pour bien marquer la partie qui tend vers l'infini, si r_0 (et donc ξ_0) tend vers zéro.

En plus de la supposition $(\tau_i^\mu)^2 = 1$ qui provenait de la théorie des quanta, nous avons fait certaines suppositions sur les expressions bilinéaires des $\vec{\sigma}^\mu$, dans le seul but de simplifier cette formule. Ces suppositions supplémentaires seront discutées au chapitre suivant. Elles ne modifient pas fondamentalement les résultats, mais seulement les coefficients numériques des différents termes.

Le rapport $V_6^{\mu\nu}/V_2^{\mu\nu}$, tracé dans la figure 2, montre que la convergence d'une telle série est très mauvaise en comparaison avec la convergence de la théorie scalaire.

Si nous posons $f = 0$, d'où $\varphi = 0$, nous aurons, en première approximation, le potentiel de la théorie scalaire, mais changé de signe:

$$V_2^{\mu\nu} = (\tau^\mu\tau^\nu)\, g^2 \frac{e^{-l r^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu}}.$$

La seconde approximation, par contre, contiendra des termes en $1/r_0$ qui ne se trouvaient pas dans le potentiel de la théorie scalaire. La formule (4,10) est remplacée par la relation:

$$V_6^{\mu\nu} = \frac{g^6}{h^2c^2l}[12 - 4(\tau^\mu\tau^\nu)]\left\{\frac{e^{-2lr^{\mu\nu}} - e^{-3lr^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu 2}} + \frac{2\,e^{-3lr^{\mu\nu}}}{l r^{\mu\nu 3}} - \frac{2}{l r_0}\,\frac{e^{-2lr^{\mu\nu}}}{r^{\mu\nu 2}}\right\}.$$

Comme le facteur $[12 - 4(\tau^\mu\tau^\nu)]$ est toujours positif, le sens de la correction sera toujours le même. A une grande distance, le terme prépondérant étant

$$-\frac{2}{l r_0}\,\frac{e^{-2lr}}{r^2}$$

il y aura renforcement de l'attraction alors qu'aux petites distances (plus faibles que r_0) une forte répulsion sera produite par le terme

$$2\,\frac{e^{-3lr}}{lr^3}\,.$$

Les deux termes qui sont déjà apparus dans la théorie scalaire n'ont pas une grande influence. La convergence de la série dépendra de la valeur de lr_0. Pour obtenir une comparaison rapide, pour $lr=1$

$$\frac{V_6^{\mu\nu}}{|V_2^{\mu\nu}|} \cong -\,0{,}0589\,\frac{1}{lr_0}\,.$$

Pour la valeur de $lr_0 = 1/10$, ce rapport est plus grand que 0,5. La convergence de la théorie scalaire n'existe donc plus, si on remplace le scalaire par la quatrième composante d'un quadrivecteur.

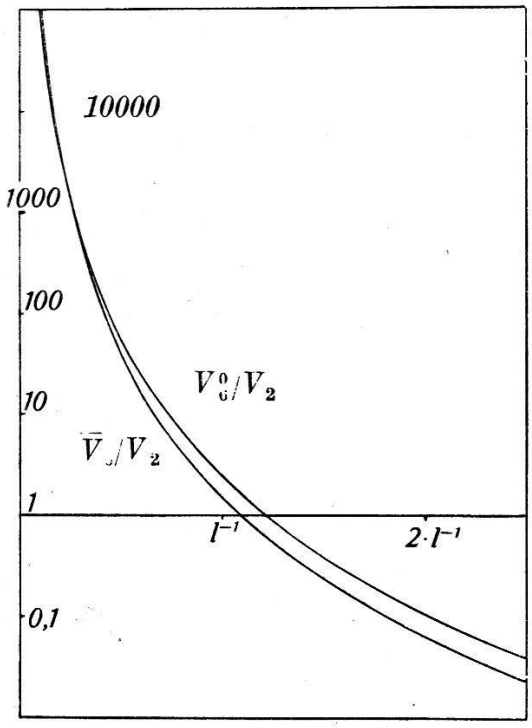

Fig. 2.

Rapport entre la deuxième approximation vectorielle et le potentiel de Yukawa.

Cette figure représente, à une échelle logarithmique, les valeurs absolues des deux rapports $\overline{V}_6/V_2$ et V_6^0/V_2 en fonction de r. Le premier de ces rapports est négatif. Les valeurs numériques que nous avons choisies sont données par la résolution du problème du deutéron par le potentiel de Yukawa: $(\tau^\mu, \tau^\nu) = -3$, $(\sigma^\mu, \sigma^\nu) = 1$, $f^2/hc = 1/10$, $g^2/hc = 1/40$. Ces rapports sont plus grands que un, même pour des distances de l'ordre de l^{-1}. La théorie semble donc divergente, même pour ces distances. Remarquons enfin que le rapport entre cette seconde approximation et le potentiel de Yukawa est donné par la formule

$$\frac{V_6}{V_2} = -\left|\frac{\overline{V}_6}{V_2}\right| + \frac{1}{lr_0}\,\frac{V_6^0}{V_2}$$

7. L'influence de la théorie des quanta.

Dans la théorie des quanta, le calcul des orbites est remplacé par celui, plus simple, des valeurs propres de l'opérateur de l'énergie H.

On associe aux variables canoniques P_i, Q_i, $\vec{p}^{\mu}$, $\vec{q}^{\mu}$, des opérateurs qui satisfont aux règles de commutation suivantes: ($[F, G]$ est le commutateur $FG - GF$ de deux opérateurs).

$$[P_i^{\alpha}(\vec{x}), Q_k^{\beta}(\vec{y})] = \frac{h}{j}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\vec{p}^{\mu}, f(\vec{q}^{1} \cdots \vec{q}^{\mu})] = \frac{h}{j}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{q}^{\mu}} \tag{7,1}$$

j est un opérateur, qui commute avec tout opérateur et dont le carré vaut -1. En prenant comme opérateur l'expression H de la théorie classique, on arrive à une théorie quantique qui est covariante, si l'on définit les opérateurs $\dot{F}$ par

$$\dot{F} = \frac{j}{h}\,[H, F]. \tag{7,2}$$

Ainsi les relations entre les espérances mathématiques des opérateurs $\dot{F}$, $\dot{G}$, $\cdots$ et F, G, $\cdots$ sont les mêmes qu'entre les grandeurs classiques correspondantes.

Essayons de trouver l'analogue quantique d'une substitution de Lie: Premièrement on vérifie facilement qu'aux parenthèses de Poisson correspondent les commutateurs:

$$\{F, G\} = \frac{j}{h}\,[F, G]. \tag{7,3}$$

On peut prévoir que la substitution (analogue à (5,3))

$$F = F' + \frac{j}{h}\,[U', F'] + \frac{1}{2!}\left(\frac{j}{h}\right)^2 [U', [U', F']] + \cdots \tag{7,4}$$

est canonique.

L'opérateur U' est l'opérateur correspondant à la fonctionnelle U' de la théorie classique dans laquelle les variables classiques ont été remplacées par leurs opérateurs.

La démonstration que (7,4) est canonique se fait rapidement alors qu'il eût été très long de donner la preuve qu'une substitution de Lie avait cette propriété. En effet, si Ω^{-1} est l'opérateur réciproque ($\Omega\,\Omega^{-1} = \Omega^{-1}\,\Omega = 1$) de Ω, toute substitution

$$F = \Omega F' \Omega^{-1} \tag{7,5}$$

laisse invariantes les relations de commutation (7,1) et donc aussi les opérateurs gouvernant l'évolution temporelle (7,2). Si l'on considère l'opérateur $\Omega(U', j)$ comme série de puissance de U' et de j, il est nécessaire que $\Omega(U', -j) = \Omega^{-1}(U', j)$ pour que les espérances mathématiques de F et de F' soient en même temps des nombres réels. Le seul opérateur satisfaisant à cette condition est la série

$$\Omega = 1 + \frac{j}{h} U' + \frac{1}{2!}\left(\frac{j}{h}\right)^2 U'^2 + \cdots = \exp\left(\frac{j}{h} U'\right) \tag{7,6}$$

Alors, en substituant cette série dans (7,5), on trouve immédiatement la série (7,4).

En vertu de la validité des transformations classiques, on pouvait penser que la théorie des quanta n'introduit que des changements de détails. Toutefois, nous verrons que les termes bilinéaires de l'Hamiltonienne (transformée) vont jouer un rôle, alors que nous avons pu les éliminer en théorie classique.

Discutons tout d'abord les détails. Premièrement, la valeur propre minimale de H^{ch} devient infinie (zéro point énergy). Cela introduit une constante additionnelle sans intérêt. Secondement, la charge $\lambda^\mu = 2\,\tau_3^\mu - 1$ et le spin $\vec{M}^\mu$ sont quantifiés. Ce fait s'exprime par les relations cycliques

$$j\,\tau_1^\mu = \tau_2^\mu\,\tau_3^\mu = -\,\tau_3^\mu\,\tau_2^\mu \tag{7,7}$$

(valables pour les trois τ_i^μ et les trois $\sigma^{\mu\alpha}$) et donne comme valeurs propres 0 et 1 pour la charge électrique et $\pm\, h/2$ pour les composantes de $\vec{M}^\mu$. Pour que les commutations qui découlent de (7,7) ne soient pas en contradiction avec la loi de correspondance (7,3), il faut que la constante h introduite dans la théorie classique soit égale à celle figurant dans (7,1) (constante de Planck divisée par $2\,\pi$). Ainsi, les $V^{\mu\nu}$ (proprement symétrisés) ont la même forme qu'en théorie classique. Le terme $V_6^{\mu\nu}$ de la théorie vectorielle dans le paragraphe précédent a été calculé en utilisant (7,7) et en prenant la valeur moyenne définie à la suite de (6,11).

Revenons maintenant aux termes bilinéaires. En théorie classique, les solutions $Q_i = P_i = 0$ étaient possibles dans l'approximation considérée, car les inhomogénéités des équations d'ondes pour les champs transformés disparaissaient pour $Q_i = P_i = 0$. Les termes V^{bilin} pouvaient alors être négligés en toute rigueur. En théorie quantique, on sait que les expressions bilinéaires contenant par exemple $P_i(\vec{x}) \cdot P_i(\vec{y})$ ne peuvent jamais être nulles (fluctuations du champ).

On doit donc tenir compte d'un terme en g^4 à ajouter à (4,10). L'un de ceux-ci a la forme

$$-\tfrac{3}{8}\, g^4 \int d\vec{x}^{\,3}\, (A_{ik} Z^{-1} P_k)\, Z^{-1} (A_{il} Z^{-1} P_l)\,. \tag{7,8}$$

En exprimant les opérateurs P_i par une série de Fourier et en introduisant aussi les opérateurs opérant sur le nombre de quanta contenu dans chaque onde plane, on montre que

$$(Z^{-1} P_i(\vec{x}))\, (Z^{-1} P_k(\vec{y})) = \frac{h}{\pi c} K_0\, (|\vec{x} - \vec{y}\,|\, l)\, \delta_{ik} \tag{7,9}$$

$K_0(z)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro définie par Watson[9]. (7,8) donne ainsi lieu à une interaction proportionnelle à g^4 ayant la forme

$$V_4^{\mu\nu} = -\frac{6}{\pi}\, (\tau\tau)\, \frac{g^4}{hc}\, \frac{e^{-lr}}{r}\, K_0(rl)\,. \tag{7,10}$$

Mais (7,10) n'est pas la seule contribution, proportionnelle à g^4, aux valeurs propres de H. Il y a en effet d'autres termes analogues à (7,8) mais qui contiennent le facteur infini $1/r_0^{-1}$. En plus, en calculant la « perturbation du second ordre » des termes bilinéaires proportionnels à g^2, on trouvera des déplacements des niveaux d'énergie dus à l'émission et à la réabsorption de paires de quanta, termes analogues à ceux calculés autrefois par Tamm et par Iwanenko[10], dans la théorie des forces nucléaires basée sur l'échange des paires de neutrinos et électrons entre proton et neutron.

En prenant, comme précédemment, $g^2/hc = 1/10$, (7,10) a une valeur beaucoup plus grande que le terme classique $V_6^{\mu\nu}$.

Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, la quantification des champs rend plus mauvaise encore la convergence de la théorie.

8. Conclusions.

Nous avons ainsi montré qu'il est possible de faire une théorie classique des « *forces d'échange* » entre les particules nucléaires. Cette théorie associe au transport de la quantité de mouvement d'une particule à l'autre, une autre propriété de cette particule, charge électrique ou moment angulaire du spin, par exemple. Ces grandeurs ne sont plus des constantes associées aux particules, mais deviennent des variables intérieures. Les résultats de cette théorie classique sont très intéressants car il apparaît certaines

difficultés inhérentes à la théorie des forces d'échange. Elles ne proviennent ni de la quantification des champs, ni de celle de la charge ou du spin. Les raisonnements qui donnent naissance à ces difficultés restent naturellement vrais dans la théorie des quanta. Celle-ci d'ailleurs introduit d'autres difficultés dues aux fluctuations du champ quantifié.

Dans les théories données jusqu'ici, on s'est servi du potentiel statique de YUKAWA (et de sa généralisation vectorielle). Or nos résultats nous montrent que ce potentiel ne décrit l'interaction entre particules que pour autant que les variables intérieures restent constantes. Autrement dit, le potentiel de YUKAWA ne tient pas compte des échanges de charge ou de spin. Aussitôt que l'échange se produit, on peut encore, si l'on veut, décrire l'interaction par un potentiel, mais celui-ci est très différent, pour les distances intéressantes, du potentiel de YUKAWA.

Nous avons réussi à exprimer ce potentiel des forces d'échange sous forme d'une série grâce à la méthode des substitutions de LIE (théorie des groupes continus des transformations de contact).

Le premier terme de cette série est le potentiel de YUKAWA. Il n'est valable que pour de grandes distances entre les particules (plus grandes que le rayon d'action des forces nucléaires). Ainsi, toute conclusion quantitative se basant sur l'emploi de ce potentiel nous semble injustifiée.

Dans les régions intéressantes (rayon des forces nucléaires) la série de la théorie scalaire semble convergente. Pour la théorie vectorielle, par contre, le second terme est déjà plus grand que le premier. En plus, le troisième terme de la théorie scalaire et le second de la théorie vectorielle n'ont pu être rendus finis qu'en donnant aux particules un rayon fini.

En terminant nous aimerions remercier M. le professeur J. WEIGLE du grand intérêt qu'il a témoigné à nos recherches.

Institut physique de l'Université de Genève.

Bibliographie.

[1]) YUKAWA, Proc. Phys. Math. Soc., Japan **17**, 48 (1935). — YUKAWA et SAKATA, Proc. Phys. Math. Soc., Japan **19**, 1084 (1937). — YUKAWA, SAKATA et TAKETANI, Proc. Phys. Math. Soc., Japan **20**, 319 (1938). — YUKAWA, SAKATA, TAKETANI et KOBAYASI, Proc. Phys. Math. Soc., Japan **20**, 720 (1938). — STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 225 (1936). — STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 299 (1938). — KEMMER, Proc. Roy. Soc. **166**, 127 (1938). — FROELICH, HEITLER et KEMMER, Proc. Roy. Soc. **166**, 154 (1938). — BHABHA,

Proc. Roy. Soc. **166**, 501 (1938). — KEMMER, Proc. Camb. Phil. Soc. **34**, 354 (1938). — BELINFANTE, thèse de doctorat Leiden (1939). — BETHE, Phys. Rev. **55**, 1261 (1939); **57**, 260 (1940); **57**, 390 (1940).

[2]) STUECKELBERG, C. R. Acad. Sc., Paris **207**, 337 (1938). — STUECKELBERG, Phys. Rev. **54**, 889 (1938). — MØLLER et ROSENFELD, Nature **143**, 241 (1939). — STUECKELBERG, Nature **143**, 560 (1939). — STUECKELBERG et PATRY, Helv. Phys. Acta **12**, 299 (1939).

[3]) HEISENBERG, Z. für Physik **77**, 1 (1932).

[4]) cf. BETHE et BACHER, Rev. of Mod. Phys. **8**, 84 (1936).

[5]) LIE, Theorie der Transformationsgruppen I, Leipzig 1888.

[6]) PROCA, Journ. Phys. et Radium **7**, 347 (1936).

[7]) KEMMER, Proc. Roy. Soc. **166**, 127 (1938).

[8]) STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 299 (1938).

[9]) WATSON, Theory of Bessel Functions, Cam. 1922, p. 80.

[10]) TAMM, Nature **133**, 981 (1934). — IWANENKO, Nature **133**, 981 (1934).