Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 10 (1937)

Heft: VI

Artikel: Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips (dritte Mitteilung)

Autor: Scherrer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110758

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips

(dritte Mitteilung)

von **W. Scherrer**, Bern.

(19. XI. 37.)

I. Vorbemerkungen.

In der ersten Mitteilung[1]) habe ich die Grundzüge einer Wellenmechanik im vierdimensionalen Zeitraum skiziert. In der zweiten Mitteilung[2]) bin ich dazu übergegangen, die dieser Wellenmechanik korrespondierende Weltpunktdynamik zu entwickeln. Dabei wurde gezeigt, dass man aus dem vierdimensionalen Potential, welches die Grundlösung der Gleichung $\Box \Phi = 0$ bildet, durch einen wohl sinngemässen — wenn auch vielleicht etwas hart anmutenden — Grenzübergang das retardierte Coulombpotential gewinnen kann. Es ist wohl zu beachten, dass dieses Verfahren in einer Beziehung eine starke Abweichung von den in der ersten Mitteilung angegebenen Grundsätzen darstellt. Um dauernd ein Coulombpotential zur Verfügung zu haben, muss man auch voraussetzen, dass das Teilchen dauernd existiert. Es muss ihm also in einem gewissen Umfange eine Trägheit zugeschrieben werden, welcher die wirkenden Kräfte nichts anzuhaben vermögen. Diesen schwerwiegenden Kompromiss halte ich aber vorläufig aus heuristischen Gründen für notwendig, denn nur so erhält man einen kontinuierlichen Anschluss an die klassische Dynamik und ist damit in der Lage, die gewohnten Konstanten zu übernehmen. Der Kompromiss kann aber je nach Bedarf aufgehoben werden, indem man an Stelle der Weltlinien der Kerne Punkte treten lässt und das Coulombpotential durch ein vierdimensionales ersetzt.

In dieser dritten Mitteilung soll deshalb die Weltpunktdynamik unabhängig von der speziellen Natur des Potentials ausgebaut werden. Die Analyse hat gezeigt, dass es vor allem notwendig ist, den Ausfall des Vektorpotentials zu kompensieren. Als geeignetes Mittel dazu erweist sich die Einführung der Zahl der Wirkungspunkte auf den Weltlinien der Elektronen als Funktion der Bogenlänge. Es ist eben zu beachten, dass diese Welt-

[1]) Helvetica Physica Acta, Bd. **10**, Heft 2, 1937.
[2]) Helvetica Physica Acta, Bd. **10**, Heft 5, 1937.

linien in der der vierdimensionalen Wellenmechanik korrespondierenden Dynamik beibehalten werden müssen. Indem wir also irgendwo auf der Elektronenbahn einen Nullpunkt für die Messung der Länge und die Zählung der Teilchen wählen, führen wir folgende Bezeichnungen ein[3]:

$$\begin{aligned} s &= \text{Bogenlänge der Elektronenbahn} \\ \sigma &= \text{Zahl der Wirkungspunkte} \\ \frac{d\sigma}{ds} &= \text{lineare Wirkungsdichte} \end{aligned} \tag{1}$$

Bei der Aufstellung der dynamischen Gleichungen lassen wir uns leiten durch folgende Ausdrücke für die Trägheitskraft $\mathfrak{K}_t$ und die Feldkraft $\mathfrak{K}_f$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_t &= \frac{d}{ds}\left(mc^2 \frac{d\mathfrak{X}}{ds}\right) \\ \mathfrak{K}_f &= -\bar{e} \text{ grad } \Phi. \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei bedeutet

$$\mathfrak{X} = (x_1, x_2, x_3, \sqrt{-1}\, ct) \tag{3}$$

den Ortsvektor des Elektrons mit der Ladung $\bar{e}$.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Konstanten mc^2 und $\bar{e}$ durch variable Grössen zu ersetzen entsprechend der variablen Belegungsdichte $d\sigma/ds$. Das Potential Φ braucht nicht explizite verändert zu werden[4]. Die in den nächsten Abschnitten vorzunehmende Berechnung soll so gestaltet werden, dass sie unabhängig von meinen früheren Mitteilungen verstanden werden kann. Ich erwähne hier noch die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung:

1. Die zu entwickelnde Dynamik gehorcht einem Hamilton'schen Prinzip.

2. Die Quantisierung der Wirkung gibt in erster Näherung die Bohr'schen und in zweiter Näherung die Sommerfeld'schen Terme, falls man Φ durch das Coulombpotential ersetzt.

II. Die dynamischen Gleichungen.

Würden wir in (2) $\mathfrak{K}_t = \mathfrak{K}_f$ setzen, so ergäbe sich ein Widerspruch, da s die Bogenlänge darstellt. Diesen Widerspruch kann man vermeiden, indem man $\mathfrak{K}_f$ eine Zusatzkraft beifügt. Den

[3]) In Abänderung der in der zweiten Mitteilung verwendeten Bezeichnung, wo s als Parameter der Kernbahn erklärt war.

[4]) Der Einfluss einer variablen Kernbahnbelegung tritt erst in Erscheinung bei der expliziten Darstellung des Gradienten.

Ausdruck für die so sich ergebende Totalkraft findet man in meiner zweiten Mitteilung in den Formeln (24′) und (25′), die für variable Belegung der Quellinie gemäss (22) zu modifizieren sind[5]). Führt man die Bahnberechnung gestützt auf (25′) durch, so erhält man auch in zweiter Näherung Übereinstimmung mit der Sommerfeld'schen Lösung. Doch ergibt sich als unbefriedigender Nebeneffekt eine leise Variation des Drehimpulses[6]). Dies zur Illustration dafür, wie geringe Differenzen auf dem Spiel stehen.

Wir machen jetzt die anschaulich plausible Annahme, dass sowohl die Massenwirkung als auch die Ladungswirkung proportional sei zu $d\sigma/ds$, d. h. also zur Zahl der Wirkungspunkte pro Längeneinheit. Wir ersetzen daher mc^2 und $\bar{e}$ durch die Grössen $mc^2 K\, d\sigma/ds$ und $\bar{e} K\, d\sigma/ds$, wo K so gewählt werden muss, dass $K\, d\sigma/ds$ eine reine Zahl ergibt. Die Dimension von K stellen wir leicht fest, da σ eine Anzahl ist. Es ergeben sich so die Äquivalenzen

$$\frac{d\sigma}{ds} \sim \frac{d\sigma}{c\,dt} \sim \frac{\nu_0}{c} \qquad \Bigg| \qquad \sim \frac{h\nu_0}{hc} \sim \frac{mc}{h}$$

Also gilt:

$$\frac{h}{mc}\,\frac{d\sigma}{ds} = \text{reine Zahl}.$$

Die Grösse h/mc ist somit das gesuchte K.

Auf die Grössen mc^2 und $\bar{e}$ muss demnach folgende Substitution ausgeübt werden

$$\left.\begin{aligned} mc^2 &\longrightarrow hc\,\frac{d\sigma}{ds} \\ \bar{e} &\longrightarrow \frac{h\bar{e}}{mc}\,\frac{d\sigma}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und an Stelle von (2) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_t &= \frac{d}{ds}\left(hc\,\frac{d\sigma}{ds}\,\frac{d\mathfrak{X}}{ds}\right) \\ \mathfrak{K}_f &= -\frac{\bar{e}h}{mc}\,\frac{d\sigma}{ds}\,\operatorname{grad}\,\Phi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

[5]) Dabei ist Anmerkung 3 zu beachten.

[6]) Eine Aufklärung dieser Verhältnisse erhalten wir am Schluss von Abschnitt V.

Jetzt kann man $\mathfrak{K}_t$ und $\mathfrak{K}_f$ einander gleich setzen. An Stelle der aus (2) resultierenden Überbestimmung erhält man nun die Möglichkeit, die neu eingeführte Funktion $\sigma = \sigma(s)$ zu bestimmen. Indem wir auf beiden Seiten durch $c\, d\sigma/ds$ dividieren und $d\mathfrak{X}/ds$ durch $d\sigma/ds.\ d\mathfrak{X}/d\sigma$ ersetzen, gelangen wir zu der Gleichung

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{h\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right\} = -h\,\frac{\bar{e}}{mc^2}\,\mathrm{grad}\,\Phi\,. \tag{7}$$

Um den Parameter s vollends zu eliminieren, müssen wir den Vorzeichen der auftretenden Skalare Rechnung tragen. Es sei A irgend ein reeller, von Null verschiedener Skalar. Dann wollen wir unter $sg\,(A)$ entweder $+1$ oder -1 verstehen, je nachdem A positiv oder negativ ist. In diesem Sinne setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathfrak{X}}{ds}\right)^2 &= \eta^2 \quad ; \quad \eta^4 = 1 \\ sg\left[\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right] &= \omega^2 \quad ; \quad \omega^4 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nun erhalten wir

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \eta^2\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right)^{-2} \tag{9}$$

und damit an Stelle von (7)

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\eta^2 h\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right)^{-2}\cdot\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right] = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{h\bar{e}}{mc^2}\,\Phi\right). \tag{10}$$

Da nun aber aus (8) und (9) folgt

$$sg\left(\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right)^2\right) = \frac{\eta^2}{\omega^2} \tag{11}$$

empfiehlt es sich, statt (10) zu schreiben

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\eta h}{\omega}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right)^{-2}\cdot\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right] = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{\bar{e}h}{\eta\,\omega\,mc^2}\,\Phi\right). \tag{12}$$

Von nun an wollen wir die Ableitung nach σ auch mit einem Punkt bezeichnen. Dann ist

$$T = \frac{\eta}{\omega}\,h\,\mathrm{Lg}\left(\frac{\omega\,mc}{\eta h}\sqrt{\dot{\mathfrak{X}}^2}\right) \tag{13}$$

das kinetische Potential zu (12). Der Faktor im Logarithmus ist so gewählt, dass der Numerus als dimensionslose positive Grösse

angesehen werden darf. Wir können dann die Gleichungen (12) als Lagrange'sche Gleichungen auffassen:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0\\ L\equiv\frac{\eta}{\omega}\,h\,\mathrm{Lg}\left(\frac{\omega m c}{\eta h}\sqrt{\dot{\mathfrak{X}}^2}\right)-\frac{\bar{e}h}{\eta\omega m c^2}\,\Phi\end{gathered}} \tag{14}$$

III. Die Hamilton'sche Funktion.

Wir ermitteln jetzt einen *Impulsvektor* $\mathfrak{P}$. Sein Vorbild muss offenbar der Vektor

$$m c\,\frac{d\mathfrak{X}}{ds}$$

aus (2) sein. Er ist gemäss (5) zu ersetzen durch

$$h\,\frac{d\sigma}{ds}\,\frac{d\,\mathfrak{X}}{ds}.$$

Diesen Vektor wollen wir noch mit einer Einheit multiplizieren derart, dass sein Quadrat positiv ausfällt. Unter Berücksichtigung von (8) haben wir also zu setzen

$$\mathfrak{P}=\frac{h}{\eta\omega}\,\frac{d\sigma}{ds}\,\frac{d\mathfrak{X}}{ds}. \tag{15}$$

Die Elimination von s gemäss (9) ergibt dann

$$\boxed{\mathfrak{P}=\frac{\eta}{\omega}\,h\dot{\mathfrak{X}}^{-2}\cdot\dot{\mathfrak{X}}} \tag{16}$$

In Übereinstimmung mit (14) gilt also

$$\mathfrak{P}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \tag{17}$$

Quadrierung von (16) ergibt

$$\mathfrak{P}^2=\frac{\eta^2}{\omega^2}\,h^2\dot{\mathfrak{X}}^{-2}. \tag{18}$$

Eingesetzt in (18):

$$\dot{\mathfrak{X}}=\frac{\eta}{\omega}\,h\mathfrak{P}^{-2}\cdot\mathfrak{P}. \tag{19}$$

*

Dafür können wir auch schreiben

$$\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma} = \frac{\eta}{\omega} h \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\mathrm{Lg} \frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc} \right) \right) \tag{20}$$

Wiederum darf infolge unserer Wahl von $\mathfrak{P}$ der Ausdruck im Logarithmus als dimensionslose positive Grösse angesehen werden.

Setzt man andererseits (16) in (12) ein, so folgt:

$$\frac{d\mathfrak{P}}{d\sigma} = -\frac{h}{\eta\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{e} h}{m c^2} \Phi \right) \right). \tag{21}$$

Die Gleichungen (20) und (21) können offenbar zusammen aufgefasst werden als ein *Hamilton'sches System*:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d x_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \qquad \frac{d p_i}{d\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ &H \equiv \frac{\eta}{\omega} h \, \mathrm{Lg} \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc} \right) + \frac{\bar{e} h}{\eta \omega m c^2} \Phi \end{aligned}} \tag{22}$$

Wir vergleichen noch die Hamiltonfunktion H mit der Lagrangefunktion L. Die Einführung von (18) in (22) ergibt mit Rücksicht auf (14) unmittelbar*):

$$H \equiv -L \tag{23}$$

Schliesslich führen wir noch die *Wirkungsfunktion* ein:

$$\underline{S = \int_{\sigma 0}^{\sigma} L \, d\sigma .} \tag{24}$$

Die Variation von (24) ergibt in bekannter Weise auf Grund von (14)

$$\underline{\mathfrak{P} = \mathrm{grad}\, S .} \tag{25}$$

Wir weisen noch auf folgenden Punkt hin. Bei Durchlaufung einer wirklichen Bahn ist H konstant, also gilt

$$H = \frac{\eta}{\omega} h w \tag{26}$$

wo w eine reine Zahl ist. Dann folgt wegen (24) und (23)

$$S = -\frac{\eta}{\omega} h \, w \, (\sigma - \sigma_0) . \tag{27}$$

*) Diese Beziehung scheint mir bemerkenswert. Bekanntlich ist sie in der klassischen Dynamik *nicht* erfüllt.

Die entwickelte Dynamik passt sich also dem ursprünglichen geometrischen Bild gut an, insofern der numerische Wert der Wirkungsfunktion der Zahl der Wirkungspunkte $\sigma - \sigma_0$ proportional ist.

Die Einsetzung von (25) in (26) ergibt schliesslich die *Hamilton'sche partielle Differentialgleichung*:

$$H(\mathfrak{X}; \operatorname{grad} S) = \frac{\eta}{\omega} h w. \tag{28}$$

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass Gleichung (18) offenbar ein invariantes Analogon zu der *de Broglie'schen* Relation

$$u v = c^2. \tag{29}$$

zwischen der Teilchengeschwindigkeit v und der Wellengeschwindigkeit u darstellt. Dass in (18) auch der Wellenoperator angedeutet ist, sieht man, wenn man abgekürzt symbolisch schreibt

$$p = \frac{\eta}{\omega} h \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\eta}{\omega} h \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \tag{30}$$

IV. Invariante Quantisierung.

Zum Zwecke der Quantisierung spezialisieren wir Φ auf das Coulombpotential. Da wir den Kern als unendlich schwer voraussetzen wollen, handelt es sich darum, den Ausdruck

$$\Phi = \frac{Ze}{r} \tag{31}$$

in Analogie zu (5) zu transformieren. Bezeichnen wir Bogenlänge und Wirkungszahl der Kernbahn mit $\bar{s}$ und $\bar{\sigma}$, so haben wir offenbar (31) zu ersetzen durch

$$\Phi = \frac{Ze}{r} \frac{h}{mc} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{s}}. \tag{32}$$

Da ein unendlich schwerer Kern keine Rückwirkung erleidet, muss der hinzugetretene Faktor eine Konstante sein, deren Grundeinheit natürlich wieder das in (8) eingeführte ω ist. Wir setzen direkt

$$\frac{h}{mc} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \omega. \tag{33}$$

Darin steckt die von vorneherein keineswegs erlaubte Annahme,

dass der Betrag der fraglichen Konstanten 1 ist. Doch hat man immer die Möglichkeit, einen Fehler im Betrag durch passende Wahl von Z zu kompensieren. Wir setzen also unbedenklich

$$\Phi = \frac{Ze\omega}{r} = \varphi. \tag{34}$$

Weiter soll nun der Geschwindigkeitsvektor $d\mathfrak{X}/ds$ als zeitartig angenommen werden. Gemäss (8) hat man demnach die Wahl

$$\eta = i \tag{35}$$

zu treffen und erhält so an Stelle von (22) die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{ih}{\omega} \operatorname{Lg}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc}\right) - \frac{ih\bar{e}}{\omega mc^2}\varphi \tag{36}$$

oder an Stelle von (26) die „Energiegleichung"

$$\operatorname{Lg}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc}\right) - \frac{\bar{e}}{mc^2}\varphi = w. \tag{37}$$

Nun muss infolge der getroffenen Vorzeichenbestimmungen das Argument des Logarithmus bei kleinen Geschwindigkeiten in der Nähe von 1 liegen. Wir entwickeln also

$$\operatorname{Lg}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc}\right) = \operatorname{Lg}\left[1 + \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc} - 1\right)\right] = \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc} - 1\right) + \ldots$$

und erhalten die Näherungsgleichung

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{mc} - 1 = w + \frac{\bar{e}}{mc^2}\varphi$$

oder

$$\mathfrak{P}^2 = m^2c^2\left(1 + w + \frac{\bar{e}}{mc^2}\varphi\right)^2. \tag{38}$$

Gestützt auf (25) und nach Einführung ebener Polarkoordinaten folgt

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2c^2\left(1 + w + \frac{\bar{e}}{mc^2}\varphi\right)^2. \tag{39}$$

Entsprechend den Vorschriften der klassischen Quantendynamik haben wir zu setzen

$$\frac{\partial S}{\partial \psi} = \frac{kh}{2\pi}. \tag{40}$$

Als weiteres Separationsintegral fügen wir hinzu

$$\frac{\partial S}{dt} = i\, m\, c^2\, u \tag{41}$$

wo u eine reelle Zahl ist. Die Verwendung des Faktors i ist notwendig, falls für die in Betracht kommenden Grössenordnungen $\mathfrak{P}^2$ im Sinne unserer früheren Festsetzungen positiv ausfallen soll.

Führen wir schliesslich noch die negative Elektronenladung

$$\bar{e} = -e \tag{42}$$

sowie die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \tag{43}$$

ein, so ergibt die Berechnung des Radialimpulses

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}} \tag{44}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= -[u^2 - (1+w)^2]\, m^2 c^2 \\ B &= (1+w)\, mc \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot Z\omega\alpha \\ C &= -\frac{h^2}{4\pi^2}(k^2 - Z^2\omega^2\alpha^2) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Für die Auswertung der Quantenbedingung

$$\oint \frac{\partial S}{\partial r}\, dr = (n-k)\, h \tag{46}$$

haben wir offenbar eine Konstante zuviel. Darin kommt das Provisorische der Beschränkung auf nicht abbrechende eindimensionale Ladungsverteilungen zum Ausdruck.

Bei der nun zu treffenden Auswahl kommen wohl in erster Linie folgende Fälle in Betracht:

$$\text{I.} \quad u = 1; \qquad w \neq 0. \tag{47}$$

Durch (46) sollen also die Werte der invarianten Grösse w bestimmt werden. In diesem Falle wird man demnach von einer „invarianten Quantisierung" sprechen können.

$$\text{II.} \quad u \neq 1; \qquad w = 0. \tag{48}$$

Durch (46) sollen die Werte der relativen Grösse u bestimmt

werden. Man wird also passend von einer „relativen Quantisierung" sprechen.

Die weitere Berechnung kann man direkt aus der Literatur entnehmen[7]). Dabei erweist sich die Festsetzung

$$\omega^2 = 1 \tag{49}$$

als zulässig. Nach (8) bedeutet dies, dass $d\sigma/ds$ als reelle lineare Dichte aufgefasst werden kann. Der Fall I (invariante Quantisierung) liefert genau die Sommerfeld'sche Termformel

$$1 + w = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n-k+\sqrt{k^2 - Z^2 \alpha^2})^2}}}$$

Fall II dagegen nicht.

Die Verhältnisse bei der relativistischen Wellengleichung liegen gerade umgekehrt. Dort steht das Potential auf der linken Seite als ein mit dem Impuls verknüpfter Vektor und deshalb liefert die „relative Quantisierung" die richtigen Terme. Bei uns hingegen steht das Potential rechts als skalare Invariante.

V. Beziehung zum elektromagnetischen Feld.

Um die gefundenen dynamischen Gleichungen mit den Bewegungsgleichungen eines Teilchens im elektromagnetischen Feld zu vergleichen, gehen wir aus von der Gleichung (7):

$$\frac{d}{d\sigma}\left[h\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right] = -h\,\frac{\bar{e}}{mc^2}\,\mathrm{grad}\,\Phi \tag{7}$$

und eliminieren den Parameter σ. Führen wir an Stelle des Symbols d/ds den üblichen Strich ein, so erhalten wir nach leichter Umformung:

$$mc^2\,\mathfrak{X}'' = -mc^2\,\frac{\sigma''}{\sigma'}\,\mathfrak{X}' - \bar{e}\,\mathrm{grad}\,\Phi. \tag{51}$$

Auf Grund von (9), (14), (23) und (26) folgt weiter

$$mc^2\,\frac{\sigma''}{\sigma'} = -\frac{\bar{e}}{\eta^2}\,\Phi'. \tag{52}$$

Diesen Wert setzen wir unter Beachtung von (8) in (51) ein und gelangen so zu

$$mc\,\mathfrak{X}'' = -\bar{e}\,\mathfrak{X}'^{-2}\,(\mathrm{grad}\,\Phi \cdot \mathfrak{X}'^{\,2} - \Phi' \cdot \mathfrak{X}'). \tag{53}$$

---

[7]) Siehe etwa Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien.

Bringen wir hier schliesslich die Normierung auf zeitartige Geschwindigkeit

$$\mathfrak{X}'^2 = -1 \tag{54}$$

zur Geltung, so folgt

$$mc^2 \mathfrak{X}'' = \bar{e}\,(\text{grad}\,\Phi \cdot \mathfrak{X}'^2 - \Phi' \cdot \mathfrak{X}') \tag{55}$$

wobei (54) innerhalb der Klammer absichtlich nicht eingesetzt worden ist. Dann kann nämlich Gleichung (55) folgendermassen geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} mc^2\, x_i'' &= \bar{e}\, G_{ik}\, x_k' \\ G_{ik} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, x_k' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\, x_i' \end{aligned}} \tag{56}$$

Die *formale* Analogie zur bekannten Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld liegt auf der Hand. Dieselbe kann ja bei der von uns benutzten orthogonalen Schreibweise dargestellt werden in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} mc^2\, x_i'' &= \bar{e}\, F_{ik}\, x_k' \\ F_{ik} &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{d x_k} \end{aligned}} \tag{57}$$

Sachlich sind natürlich die „Feldstärken" G_{ik} von den F_{ik} sehr verschieden. Aus unseren Ausführungen geht bis jetzt nur hervor, dass die Gleichungen (56) beim Einelektronenproblem die Gleichungen (57) näherungsweise ersetzen können. Ob es möglich sein wird, mit ihrer Hilfe die magnetischen Wirkungen eines stromdurchflossenen Leiters darzustellen, ist also eine durchaus offene Frage. Dies ist vermutlich dann *nicht* der Fall, wenn man sie in vollkommener Analogie zu den Gleichungen (57) auswerten wollte. In erster Linie wird man wohl versuchen müssen, auf Grund von plausibeln Vorstellungen über die wirkliche Ladungsverteilung einen geeigneten Ausdruck für Φ zu erhalten.

Nun sind wir auch in der Lage, die zu Beginn von Abschnitt II kurz geschilderten Verhältnisse aufzuklären. Die daselbst erwähnte und in Formel (24′) der zweiten Mitteilung angegebene

Totalkraft ist nämlich identisch mit der rechten Seite von (53). Diese rechte Seite kann ja geschrieben werden als[8])

$$\mathfrak{K} = -\bar{e}\,\mathrm{grad}\,\Phi + \bar{e}\,\Phi'\,\mathfrak{X}'^{-2}\cdot\mathfrak{X}'. \tag{58}$$

Die Zusatzkraft ist gerade diejenige Kraft, welche notwendig ist, um in widerspruchsfreier Weise den Ansatz

$$mc^2\mathfrak{X}'' = \mathfrak{K}$$

und die daraus folgende Gleichung

$$0 = \mathfrak{K}\mathfrak{X}'$$

zu erfüllen.

Für die resultierende Dynamik ist es also vollkommen gleichgültig, ob man das Ausgangssystem (2) im Sinne von (58) korrigiert, oder ob man das System (2) gestützt auf die Vorstellung der variablen Belegungsdichte durch (6) ersetzt. Trotzdem ist natürlich das zweite Verfahren vorzuziehen, da es für die einzelnen Operationen eine inhaltliche Deutung liefert und zwangsläufig auf den richtigen Impuls führt. Gerade bei der Wahl des Impulses lässt einen das erste Verfahren im Stich, da ja kein ersichtlicher Grund besteht, vom Vektor $mc\,\mathfrak{X}'$ abzugehen.

VI. Schlussbemerkungen.

In den Vorbemerkungen wurde schon erwähnt, dass die in Abschnitt II und III entwickelte Dynamik unabhängig ist von der Natur des Potentials Φ. Es ist also möglich, Versuche mit dem in den beiden ersten Mitteilungen in Erwägung gezogenen Potential k/R^2 anzustellen. Die Aussichten sind jetzt insofern günstiger, als das Auftreten des logarithmischen Gliedes in (22) gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$\sqrt{\mathfrak{P}^2} = mc\,E^{w-\frac{\bar{e}}{\eta^2 mc^2}\Phi}. \tag{59}$$

Die der Gleichung (38) entsprechende Näherung

$$\mathfrak{P}^2 = m^2c^2\left(1 + w - \frac{\bar{e}}{\eta^2 mc^2}\Phi\right)^2 \tag{60}$$

enthält also gegenüber der in der ersten Mitteilung in Aussicht genommenen Gleichung (5) ein Zusatzglied.

---

[8]) Beachte wiederum Anmerkung 3. Die Zusatzkraft ist unabhängig von der Parameterwahl.

Falls man übrigens an der Potentialgleichung $\Box \Phi = 0$ konsequent festhalten will, ergeben sich für mehrere Zentren die weiteren Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \sum_i C_i \operatorname{Lg} R_i \\ 0 &= \sum_i C_i \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

wo mit R_i die Weltdistanz vom i^{ten} Zentrum (Quellpunkt) zum Aufpunkt bezeichnet ist. Ihre Verwendbarkeit hängt unter anderem natürlich davon ab, ob die Eindeutigkeitsfrage in befriedigender Weise beantwortet werden kann.

Zum Schluss möge noch die zentrale Frage nach der Rolle des Zeitablaufs erörtert werden. Die Erfahrungen an lebendigen Organismen zwingen uns mit sozusagen praktisch vollkommener Sicherheit, eine Einsinnigkeit des Zeitablaufs von der Vergangenheit in die Zukunft anzunehmen. Im Gegensatz dazu bieten alle bis jetzt aufgestellten Theorien über die leblose Materie nicht die geringste Handhabe zu einer derartigen Auszeichnung des Zeitablaufs. Vielmehr bedeutet der Übergang von der klassischen zur relativistischen Dynamik eine erhöhte Betonung der Symmetrie in Bezug auf Vergangenheit und Zukunft. Wenn wir in der zweiten Mitteilung zwecks Gewinnung des retardierten Coulombpotentials den Zukunftskegel ausgezeichnet haben, so war das eine Angelegenheit der freien Sinngebung. Bei einem unendlich schweren Kern ist die Retardierung ohne Einfluss. Man hätte ebensogut von dem „vordatierten" Potential ausgehen können, resp. von der Summe beider Potentiale. Beim Übergang von der Darstellung der Materie durch Weltlinien zur Darstellung durch Weltpunkte wird die ganze Frage noch drängender, denn eine der Einsinnigkeit des Zeitablaufs entsprechende Formulierung des dynamischen Geschehens würde in gewissem Sinne eine Unterdrückung der Gegenwarts- und Vergangenheitsgebiete, also des grösseren Teils aller in der Weltmetrik vorgebildeten Möglichkeiten, erfordern.

Man sieht sich daher vor folgende Alternative gestellt:

entweder 1. konsequente Berücksichtigung der Einsinnigkeit des Zeitablaufs,

oder 2. vollkommen symmetrische Behandlung des vierdimensionalen Zeitraums.

Die Verfolgung der ersten Möglichkeit begegnet aber gleichzeitig zwei ernsthaften Schwierigkeiten: Weder die bis jetzt in der Physik bewährten Grundsätze noch ihre formalmathematische Verfassung lassen eine Einsinnigkeit des Zeitablaufs erkennen. Sie

ernsthaft erörtern wäre möglicherweise gleichbedeutend mit einer Abkehr von den Grundsätzen der Weltmetrik, die Zeit müsste ja in entscheidender Weise vor dem Raum ausgezeichnet sein.

Bei der Verfolgung der zweiten Möglichkeit liegen die Dinge gerade umgekehrt. Die formal mathematische Verfassung der jetzigen Theorien zwingt uns beinahe, die Konsequenzen in dieser Richtung zum äussersten zu treiben. Man kann deshalb ganz ernsthaft die Ansicht vertreten, dass auch für diejenigen, welche die Einsinnigkeit des Zeitablaufs für unumgänglich halten, die konsequente Verfolgung der zweiten Möglichkeit den einfachsten Weg darstellt, um „modo tollendo ponens" eine Entscheidung zu erzwingen.

Ich möchte daher noch kurz erläutern, dass die Annahme der vollkommenen raumzeitlichen Symmetrie keineswegs zu Absurditäten zu führen braucht. Wir denken uns den allereinfachsten Fall, indem wir die Hypothese aufstellen, dass genau im Weltpunkt mit den Koordinaten

$$(x, y, z, \sqrt{-1}\, ct) = (0, 0, 0, 0)$$

eine Wirkung auftrete. Zu diesem Zentrum bestimmen wir ein über den ganzen vierdimensionalen Zeitraum zu erstreckendes Potential Φ und hierauf eine ebenfalls über dasselbe Gebiet zu erstreckende Wellenfunktion ψ. Nun kann man der Wellenfunktion ψ in Zukunft, Gegenwart und Vergangenheit folgende anschauliche Deutung geben:

a) ψ im Zukunftskegel bedeutet, dass auch später Wirkungen anzutreffen sein werden.

b) ψ im Gegenwärtsgebiet bedeutet, dass jede Wirkung mit Ausdehnung verbunden ist. Hier müssten also stark abklingende Lösungen gesucht werden, wie sie schon in der Schrödinger'schen Theorie zu finden sind.

c) ψ im Vergangenheitskegel bedeutet, dass schon früher Wirkungen vorhanden waren.

Gerade die wahrscheinlichkeitstheoretische Auffassung gestattet uns, absurde Vorstellungen zu vermeiden wie etwa die, dass die Gegenwart auf die Vergangenheit zurück wirke**).

Punkt b) lässt sich übrigens auch dahin formulieren, dass Wirkungen nie vereinzelt auftreten. Bei dieser Interpretation bietet sich vielleicht auch eine Möglichkeit, die Rolle der mathe-

**) Übrigens scheint mir rein begrifflich betrachtet das, was in diesen Dingen als „vernünftig" oder „absurd" anzusehen ist, keineswegs auf der Hand zu liegen.

matischen Singularitäten in der Physik zu verstehen[9]). Die Annahme einer vereinzelten in einem ganz bestimmten Weltpunkt vorhandenen Wirkung hat offenbar das Auftreten einer mathematischen Singularität zur Folge und hängt natürlich mit der notgedrungen schematisierenden Tätigkeit unseres Verstandes zusammen. Die Weltpunkte sind gewissermassen die Stellen, in denen das Schema des idealisierten Koordinatenraumes überspannt wird.

[9]) Vgl. dazu EINSTEIN, A.: Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie (Vieweg, Braunschweig 1922), S. 33, Anmerkung 1).