Considérations théoriques sur la propagation de l'imbibition

Autor(en): **Guye, Ch. Eug.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **7 (1934)**

Heft VI

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110388

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Considérations théoriques sur la propagation de l'imbibition

par **Ch. Eug. Guye.**

(26. VI. 34.)

Résumé. Il résulte d'expériences antérieures que l'imbibition finale dans une bande verticale de papier buvard, dont la base plonge dans un liquide imbibant, tend à se répartir suivant une formule logarithmique, analogue à celle du gradient barométrique. (Ch. Eug. Guye et H. Saini). On peut expliquer cette répartition limite, soit en assimilant la progression de l'imbibition à une diffusion simple ascendante, soit en la considérant comme un phénomène d'hydrodynamique; mais dans ce dernier cas il convient d'introduire une supposition particulière sur le mode d'action de la viscosité dans une substance partiellement imbibée. Les diverses relations établies au cours de cette étude, l'ont été en vue de permettre ultérieurement une vérification expérimentale de ces vues théoriques.

Introduction.

Dans trois notes publiées antérieurement [1]), je m'étais efforcé de rechercher, en m'appuyant sur des considérations énergétiques, quelles pourraient être les limites d'ascension de la sève dans les végétaux de grande hauteur; et cela dans le cas où cette ascension aurait pour cause des phénomènes d'osmose ou d'imbibition ou même de capillarité; les trois sortes de problèmes pouvant au point de vue énergétique être traités de façon analogue.

Cette étude préliminaire m'avait alors conduit à établir diverses relations, dont je me suis efforcé plus tard de rechercher le degré de validité.

Dans un premier travail expérimental, effectué en collaboration avec M. H. Saini [2]), nous avons cherché à vérifier dans quelle mesure ces relations étaient en concordance avec l'expérience; et cela dans le cas de bandes de papier buvard imbibées par l'eau, le pétrole ou l'huile de vaseline.

---

[1]) Ch. Eug. Guye. Quelques problèmes d'énergétique en relation avec le problème de l'ascension de la sève (1ère Note) *Arch. des Sciences physiques et naturelles.* 5 périod. Vol. 7. 1925. *Supplém.* p. 39 (Séance du 6 mars 1925) — (2e Note) *idem. Supplém.* p. 63 (Séance du 16 Avril 1925 — Ascension spontanée d'un liquide de long de la paroi qu'il mouille, *idem. Supplém.* p. 78 (Séance du 7 Mai 1925).

[2]) Ch. Eug. Guye et H. Saini. Contribution expérimentale à l'étude énergétique des phénomènes d'imbibition. — *Helv. Phys. Acta* II. fasc. 7. p. 445—491. 1929. — Voir aussi Ch. Eug. Guye et Mlle J. Archinard. Contribution à l'étude dynamique de l'amalgamation. *Helv. Phys. Acta* II. p. 349. fasc. 5. 1929.

Ces recherches nous ont montré en premier lieu que les réserves d'énergie libérées dans l'imbibition étaient généralement énormes, mais que la fraction de cette énergie utilisée à vaincre la pesanteur et les forces de viscosité, dans la propagation ascendante, était extrêmement petite, du moins dans les conditions où nous avions expérimenté. Le rendement mécanique de l'imbibition dans le papier buvard, s'est trouvé extrêmement faible; la presque totalité de l'énergie libérée étant alors transformée inutilement en chaleur.

Nous avons reconnu de plus que les formules envisagées n'étaient applicables que dans d'étroites limites et que les suppositions, par trop simples, qui étaient à leur base devaient être corrigées.

Dans la supposition où toute l'énergie rendue disponible par l'imbibition serait intégralement utilisée au travail d'ascension du liquide (travail contre la pesanteur et les forces de viscosité) on aurait:

$$E_0 = \varrho\, g\, h + A\, \eta\, h\, v. \qquad \text{(a)}^{1)}$$

E_0 = énergie libérée par imbibition; ϱ = densité du liquide; η = coefficient de viscosité du liquide; h = hauteur atteinte; A = constante de résistance au déplacement du liquide; v = vitesse de ce déplacement.

Mais les expériences effectuées en collaboration avec M. H. Saini ont montré que pour tenir compte des dégagements considérables de chaleur qui se produisent, cette formule devait, dans le cas de l'imbibition ascendante, être remplacée par

$$E_0 - Jq = \varepsilon_0\,(1 + k\,h) = \varrho\, g\, h + A\, \eta\, h\, v. \qquad \text{(b)}^{2)}$$

J = équivalent mécanique de la chaleur; q = chaleur dégagée; k = coefficient de proportionnalité.[3])

Toutefois cette relation ne s'est trouvée en accord avec l'expérience que pour de petites hauteurs (15 à 20 cm. environ); ce qui n'a rien de surprenant, car elle suppose que l'imbibition en arrière du front de propagation est pratiquement complète, alors que les mesures par pesée ont montré qu'il n'en est plus ainsi pour des hauteurs plus considérables et que l'imbibition tend alors à décroître suivant une fonction logarithmique.

Pour résoudre le problème dans toute sa généralité, au point de vue énergétique, il nous aurait fallu connaître en par-

[1]) C. E. Guye, 7 mai 1925, loc. cit.

[2]) Ch. E. Guye et H. Saini, loc. cit.

[3]) La formule (b) a été récemment confirmée dans le cas de l'imbibition descendante par Mlle Berthier. C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, 30 avril 1934.

*

ticulier, dans quelle mesure le coefficient de résistance à la circulation du liquide et l'énergie disponible dépendaient du degré d'imbibition, lequel degré d'imbibition se trouve lui-même fonction de la hauteur h et de l'instant t. Bref, envisagé sous cette forme et en tenant compte des dégagements de chaleur, le problème se présente de façon particulièrement compliquée.

En présence de ces difficultés, j'ai donc renoncé provisoirement à envisager ces phénomènes du point de vue énergétique qui m'avait jusqu'alors guidé, pour les considérer d'un point de vue purement dynamique, en introduisant les hypothèses les plus simples que l'on puisse poser sur les forces qui déterminent le mouvement du liquide dans la substance imbibée.

L'hypothèse qui semblait la plus naturelle était de considérer la propagation du liquide par imbibition comme une sorte de diffusion simple et de traiter analytiquement le problème de façon analogue.

J'ai alors examiné successivement

1° le cas de l'imbibition dans une bande horizontale de longueur indéfinie; puis dans le cas d'une bande de longueur finie, dont l'une des extrémités est maintenue à l'état d'imbibition saturée et l'autre extrémité à l'état de dessication aussi complète que possible,

2° le cas d'une propagation de l'imbibition par diffusion ascendante, envisagée également pour une bande de hauteur indéfinie et pour une bande de hauteur déterminée.

En second lieu, j'ai envisagé la propagation de l'imbibition comme un phénomène d'hydrodynamique; en supposant d'une part que le mouvement du liquide se produit sous l'action d'une différence de pression, « proportionnelle en chaque point au gradient de l'imbibition » et d'autre part en admettant l'existence de forces de viscosité, opposées à la direction de propagation et dépendant à la fois » de la quantité de liquide en mouvement, de sa nature et de la vitesse de son déplacement ». Ces considérations hydrodynamiques nous ont paru devoir intervenir plus particulièrement lorsque la circulation du liquide est suffisamment intense, comme c'est le cas, par exemple, au début de l'imbibition du papier buvard.

Comme dans le cas de la propagation par diffusion, nous avons envisagé la propagation horizontale et la propagation ascendante 1° dans une bande de longueur indéfinie 2° dans une bande de longueur finie dont une extrémité est maintenue à l'état d'imbibition saturée et l'autre extrémité à l'état de dessication totale

ou partielle. — Dans cette seconde partie de notre étude, nous nous sommes borné à étudier le régime permanent qui semble permettre des vérifications expérimentales plus faciles ainsi que nous l'indiquerons plus loin.

Première partie.

1. *Propagation par diffusion horizontale.*

En premier lieu nous appellerons *degré d'imbibition* et nous désignerons par i, « le volume de liquide que renferme à un instant donné, l'unité de volume de la substance imbibée.» La *fraction d'imbibition* sera « le rapport entre le degré d'imbibition i et le degré d'imbibition maximum i_0 à saturation »; soit $\varkappa = \frac{i}{i_0}$.

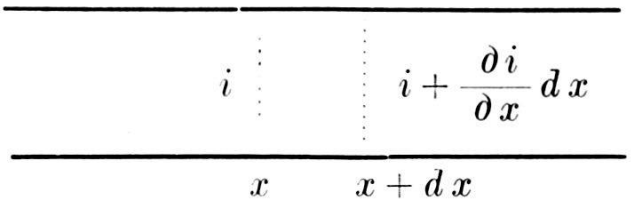

Fig. 1.

Nous admettrons alors que le volume de liquide qui traverse une section quelconque fig. (1) est à chaque instant proportionnel à ce que nous appellerons « la force d'imbibition »; laquelle serait elle-même proportionnelle au gradient de l'imbibition; soit $-A \frac{di}{dx}$[1]).

Quant au volume de liquide qui traverse, dans l'unité de temps, l'unité de section il aura pour expression $-(aA) \frac{di}{dx}$; a étant un facteur de proportionnalité, dépendant comme A des unités choisies.

En exprimant que la différence des volumes de liquide, qui pendant un temps déterminé entrent et sortent par les deux faces de l'élément dx, est égale à l'augmentation de l'imbibition de l'élément, on a par un mode de raisonnement bien connu la relation :

$$(aA) \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial i}{\partial t} \tag{1}$$

qui n'est autre que l'équation aux dérivées partielles de la diffusion.

[1]) Nous mettons le signe —, car une décroissance du degré d'imbibition i, crée une force dirigée dans le sens positif; c'est-à-dire de l'origine à l'extrémité de la bande.

Envisageons maintenant les principaux cas qui nous intéressent.

1er Cas. — Bande horizontale de longueur indéfinie, maintenue à son origine à l'état d'imbibition saturée.

Les conditions aux limites sont:

Pour $t = 0$ $i = 0$ pour toutes les valeurs finies de x
» $x = 0$ $i = i_0$ » » » » » de t.

La solution est alors de la forme

$$i = \frac{2\, i_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta = \frac{x}{2\sqrt{(a\,A)\,t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} \cdot d\,\beta\,.$$

Nous constatons en effet que pour $x = 0$ on a $i = i_0$[1]; pour $t = \infty$ on a $i = i_0$ pour toute valeur finie de x; enfin pour $x = \infty$, $i = 0$ pour toute valeur finie de t.

Pour toutes les autres valeurs de x, il faudra, si l'on veut connaître la valeur de i en fonction de t, avoir recours aux tables qui donnent les valeurs de l'intégrale définie $\int e^{-\beta^2} . d\,\beta$.

Pour vérifier dans quelle mesure l'expérience se trouve en accord avec les valeurs calculées par la formule (2), il conviendrait d'abord d'expérimenter sur des bandes assez longues pour qu'on puisse les considérer comme indéfinies. — Il suffirait alors, au bout d'un temps déterminé t, de couper la bande imbibée en segments et de déterminer par des pesées, ainsi que nous l'avons fait[2]), le degré d'imbibition des divers segments correspondant aux diverses abcisses x.

La formule (2) nous montre en outre que si, dans deux expériences successives, effectuées sur des bandes identiques, l'on choisit les limites de l'intégrale de façon que l'on ait $\frac{x^2}{t} = \frac{x'^2}{t'}$, l'imbibition aura pour ces deux abcisses la même valeur.

Or dans les expériences de propagation horizontale que nous avions faites antérieurement, nous avions en effet constaté que le front de propagation de l'imbibition progresse approximativement selon une formule parabolique; cela résultait vraisemblablement du fait que l'imbibition du front de l'onde conserve à peu près la même valeur, sauf lorsque les expériences ont une très longue

---

[1]) On sait en effet que

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2} . d\,\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

[2]) Ch. Eug. Guye et H. Saini, *loc. cit.*

durée. Dans ce dernier cas la ligne de démarcation du front de l'onde devient alors de moins en moins nette et la formule cesse d'être parabolique.

2e Cas. — Bande horizontale de longueur finie l dont l'une des extrémités est maintenue à saturation i_0 et l'autre à l'état de complète dessication $i = 0$.

A l'instant $t = 0$ (sauf pour l'abcisse $x = 0$) la bande est sèche sur toute sa longueur.

Les conditions aux limites sont alors:

pour	$t = 0$	$i = 0$	pour	toutes	les	valeeurs	finies	de	x.	
»	$x = 0$	$i = i_0$	»	»	»	»	»	»	t.	
»	$x = l$	$i = 0$	»	»	»	»	»	»	t.	

La solution générale de l'équation différentielle prend alors la forme assez complexe

$$i = i_0 \left\{ \frac{l-x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-(aA)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} (l-x \right\} \qquad (3)$$

qui satisfait en effet aux conditions imposées[1]).

Enfin lorsque le régime permanent est atteint ($t = \infty$), l'expression (3) se réduit à

$$i = i_0 \frac{l-x}{l} . \qquad (3 \text{ bis})$$

Le gradient de l'imbibition demeure alors constant sur toute la longueur de la bande; ou ce qui revient au même le degré d'imbibition i décroît linéairement en fonction de x.

D'une façon générale, et bien que la formule (3) se prête assez mal aux vérifications numériques, elle permettra cependant de calculer la valeur de i pour chaque valeur de x et de t en régime variable. Il serait alors possible, comme dans le cas précédent de comparer les valeurs expérimentales aux valeurs ainsi calculées.

---

[1]) Pour $t = 0$ le second terme du second membre a pour valeur $-\left(\frac{l-x}{l}\right)$ d'où $i = 0$. On sait en effet que d'une façon générale

$$\frac{u}{2} = \sin u - \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nu .$$

Pour $x = 0$ et $x = l$ le second terme du second membre de (3) s'annule avec le sinus.

On remarquera, en effet, que toutes les grandeurs qui entrent dans la formule (3) sont connues, sauf (aA) qui peut se déduire de la valeur du débit D « en régime permanent ». On a dans ce cas:

$$D = -(a\,A)\,\frac{d\,i}{d\,x} = \frac{a\,A}{l}\,i_0$$

$$(a\,A) = \frac{D\,l}{i_0}\,. \tag{3 ter}$$

Nous indiquerons plus loin comment ce débit D peut être mesuré expérimentalement.

2. *Propagation par diffusion ascendante.*

Le problème est ici plus complexe, car nous avons à tenir compte de la pesanteur qui tend à faire descendre le liquide.

En admettant toujours que la quantité de liquide qui pénètre à l'intérieur d'un élément de hauteur dh est proportionnelle à la somme des forces qui tendent à faire entrer et sortir le liquide, nous aurons:

$$a\left(A\,\frac{\partial^2 i}{\partial h^2} - \varrho\,g\,i\right) = \frac{\partial i}{\partial t} \tag{4}$$

dont nous allons chercher la solution dans le cas d'une colonne ou bande de hauteur indéfinie et dans celui d'une colonne ou bande de hauteur déterminée H.

1er Cas. Bornons-nous pour le 1er cas à rechercher quelle sera la répartition finale d'équilibre.

Dans la formule (4) nous aurons pour $t = \infty$; $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ soit en régime permanent

$$A\,\frac{d^2 i}{d\,h^2} - \varrho\,g\,i = 0$$

dont la solution pour $h = 0$, $i = i_0$ est:

$$i = i_0\,e^{-\sqrt{\frac{\varrho\,g}{A}}\,h} = i_0\,e^{-k\,h}\,. \tag{5}$$

Or les expériences de longue durée que nous avons effectuées[1]), nous ont en effet montré que la répartition de l'imbibition avait une tendance à satisfaire à une expression de cette forme.

[1]) Ch. Eug. Guye et H. Saini. *loc. cit.*

Mais, comme nous le verrons plus loin, l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placé ici, n'est pas la seule qui conduise à ce résultat.

2e Cas. Envisageons maintenant le cas d'une bande verticale de hauteur H dont l'une des extrémités est maintenue en permanence à imbibition saturée i_0, et l'autre extrémité à l'état de dessication complète $i = 0$.

Les conditions aux limites seront:

pour $h = 0$ $i = i_0$ quelque soit t
» $h = H$ $i = 0$ » » t
» $t = 0$ $i = 0$ pour toutes les valeurs finies de h.

La solution générale prend alors la forme très complexe

$$i = i_0 \left\{ \frac{e^{K(H-h)} - e^{-K(H-h)}}{e^{KH} - e^{-KH}} \right.$$

$$\left. -2\pi e^{-K^2(aA)t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + K^2H^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{H^2}(aA)t} \sin\frac{n\pi h}{H} \right\} \qquad (6)$$

La discussion de l'équation (6) nous montre immédiatement que pour $h = 0$, $i = i_0$; le premier terme de la parenthèse est égal à l'unité, le second s'annule avec le sinus; pour $h = H$ on a $i = 0$; les deux termes de la parenthèse sont alors séparément nuls.

Dans l'expression (6) K se déduit de l'équation (5) et la valeur de (aA) de la propagation horizontale en régime permanent (3 bis) soit $(aA) = \frac{Dl}{i_0}$ (3ter). Cette valeur pourrait d'ailleurs se déduire aussi de l'observation du débit D_a en régime permanent dans la propagation ascendante. Mais alors l'expression de (aA) prend une forme moins simple; on a

$$(aA) = \frac{D_a + a\varrho g i_0}{K i_0}. \qquad (6\text{ bis})$$

Comme d'autre part la constante K est égale à $\sqrt{\frac{\varrho g}{A}}$, on voit que la connaissance du débit ascensionnel en régime permanent jointe à cette relation, permet de déterminer séparément a et A[1]).

[1]) L'expression (6 bis) s'obtient en posant dans la relation

$$D_a = -(aA)\frac{di}{dh} - a\varrho g i \text{ (régime permanent)}; \quad i = i_0 \frac{e^{K(H-h)} - e^{-K(H-h)}}{e^{KH} - e^{-KH}}$$

et

$$\frac{di}{dh} = -K i_0 \frac{e^{K(H-h)} - e^{-K(H-h)}}{e^{KH} - e^{-KH}}$$

et en faisant ensuite $h = 0$ puisque, en régime permanent, le débit est indépendant de la hauteur h.

Envisageons maintenant le *régime permanent.* ($t = \infty$) l'expression (6) se réduit à son premier terme

$$i = i_0 \frac{e^{K(H-h)} - e^{-K(H-h)}}{e^{KH} - e^{-KH}} \tag{7}$$

qui représente la répartition finale de l'imbibition dans une bande verticale de hauteur H dont la base est maintenue à l'état d'imbibition saturée i_0 et le sommet à l'état d'imbibition nulle $i = 0$.

On remarquera que lorsque H devient très grand la relation (7) tend vers

$$i = i_0 \, e^{-Kh}$$

c'est-à-dire vers l'équilibre dans une bande de hauteur indéfinie (5).

Comme on le voit, l'équation (6), relative au régime variable, se prête plus mal encore que l'équation (3) aux vérifications numériques.

Toutefois, il serait aussi possible, en coupant la bande en segments après un temps déterminé et en pesant ces segments de rechercher expérimentalement la répartition de l'imbibition en régime variable et de comparer les résultats obtenus à ceux que donnerait la formule (6).

En résumé et d'une façon générale, nous voyons par les exemples qui précèdent que l'étude du régime variable conduit à des expressions généralement très compliquées, même dans l'hypothèse très simple où nous nous sommes placé. — Au contraire, la répartition de l'imbibition en régime permanent est plus simple et se prête mieux à des recherches expérimentales, ainsi que nous le montrerons plus loin.

Aussi, nous bornerons-nous dans ce qui suit à n'envisager que le cas du régime permanent.

Deuxième partie.

Au lieu d'assimiler la propagation de l'imbibition à une sorte de diffusion, nous allons maintenant l'envisager comme un phénomène d'« hydrodynamique »; et nous supposerons que dans une colonne ou bande plus ou moins complètement imbibée, le liquide circule en vertu d'une sorte de « pression hydrodynamique » qui s'exercerait entre les deux faces de chaque élément, « proportionnellement au gradient de l'imbibition ».

Dans ce cas, le déplacement du liquide fera naître des forces de viscosité qui tendront à s'opposer à son mouvement et qui en régime permanent feront équilibre à la différence des pressions hydrodynamiques.

Malheureusement, nous ne savons pas comment, dans une substance donnée, ces forces de viscosité varient en fonction du degré d'imbibition et de la nature du liquide. Toutefois, on peut admettre, avec quelque vraisemblance, qu'à l'intérieur de chaque élément, ces forces de viscosité agissent 1° *proportionnellement au coefficient de viscosité* η *du liquide;* 2° *proportionnellement au degré d'imbibition* i *de l'élément;* c'est-à-dire au volume de liquide qu'il contient; 3° *proportionnellement à la vitesse* v *de déplacement du liquide.* Cette triple hypothèse est en somme très conforme au mode d'action du frottement intérieur des liquides. Nous aurons donc dans ce cas pour représenter la force F de viscosité une expression de la forme

$$F = B\eta\ (i.\ v).$$

B étant un coefficient spécifique dépendant de la nature et de la structure de la matière imbibée; tandis que le produit $(i\,v)$ n'est autre que le débit D.

Mais, comme nous sommes en *régime permanent,* le débit D du liquide doit être le même à travers chaque section de la bande, d'où la condition $(i\ v) =$ constante.[1])

Il en résulte en définitive

$$F = B\,\eta\ (i\,v) = B\,\eta\,D = \text{constante}. \tag{8}$$

Mais il importe de remarquer que la « valeur de F varie chaque fois que l'on modifie les conditions du régime permanent ». Ce n'est donc pas une constante absolue, mais une constante pour un régime permanent déterminé. On remarquera de plus que la formule (8) reste valable même pour une colonne de section variable, à la condition, cela va sans dire, que l'on ne considère que le régime permanent pour lequel le produit $i\,v$ demeure constant.

1. Propagation horizontale.

Représentons par $-A\,\frac{d\,i}{d\,x}\,dx$ la force motrice qui détermine le mouvement du liquide dans un élément de longueur dx. Nous

[1]) On remarquera que cette condition demeure valable même si la totalité de la masse imbibante ne participe pas à l'écoulement; dans ce cas i est plus petit et v plus grand.

aurons en régime permanent pour représenter l'équilibre entre cette force et les forces résultant de la viscosité

$$-A \frac{di}{dx} dx = F dx.$$

D'où

$$i = -\frac{F}{A} x + C.$$

1er Cas. Bande horizontale dont l'une des extrémités est maintenue à l'état d'imbibition saturée i_0.

Nous aurons alors pour $x = 0$, $i = i_0$; d'où $C = i_0$; la relation devient

$$i = -\frac{F}{A} x + i_0. \tag{9}$$

Comme i ne peut avoir une valeur négative on voit immédiatement que l'imbibition ne pourra se propager qu'à une distance maxima $x = \frac{i_0 A}{F}$ laquelle dépendra de la valeur de F c'est-à-dire des conditions du régime permanent considéré.

2e Cas. Supposons maintenant que tout en maintenant la condition $i = i_0$ à l'origine, l'autre extrémité de la bande soit maintenue à l'état de dessication complète, l étant la longueur de la bande; soit pour $x = l$, $i = 0$.

L'équation (9) devient

$$O = -\frac{F}{A} l + i_0 \quad \text{d'où} \quad F = \frac{i_0 A}{l}.$$

En d'autres mots, si la longueur de la bande est donnée, le débit diminuera jusqu'à ce que la relation $F = \frac{i_0 A}{l}$ soit satisfaite. C'est donc la longueur de la bande qui fixe dans ce cas le régime.

On voit en outre par cette dernière formule que la force constante F doit être inversément proportionnelle à la longueur de la bande. Mais comme d'autre part nous avons $F = B\,(i\,v)$ et que $(i\,v)$ représente le débit en régime permanent soit D, on en tire

$$D = \frac{i_0 A}{B \eta l}$$

expression qui n'est autre que la loi de Poisenille, dans laquelle $(i_0 A)$ représente la différence totale des pressions qui agiraient

aux deux extrémités d'une colonne liquide; η le coefficient de viscosité et l la longueur de la colonne.

En définitive la formule (9) devient:

$$i = -\frac{i_0}{l} x + i_0 \tag{10}$$

qui nous donne la valeur du degré d'imbibition i pour chaque valeur possible de x.

Dans le cas où nous aurions une dessication partielle i, à l'extrémité de la colonne, il est facile de voir que la formule (10) deviendrait

$$i = -\frac{(i_0 - i_1)}{l} x + i_0 \tag{11}$$

i ne pouvant jamais prendre une valeur négative.

2. *Propagation ascendante.*

Nous aurons dans ce cas en régime permanent, à envisager l'équation

$$-A \frac{di}{dh} - \varrho g i - F = O$$

qui devient en séparant les variables

$$\frac{A\, di}{\varrho g i + F} = -dh.$$

Et en posant

$$\varrho g i + F = z \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{\varrho g}{A} dh \qquad z = z_0 e^{-\frac{\varrho g}{A} h}$$

d'où en remplaçant z par sa valeur

$$\varrho g i + F = (\varrho g i_0 + F) e^{-\frac{\varrho g}{A} h}. \tag{12}$$

Cette expression se réduit à $i = i_0 e^{-\frac{\varrho g}{A} h}$ lorsque les forces de viscosité F deviennent négligeables; c'est-à-dire lorsque le mouvement d'ascension devient extrêmement lent; en d'autres mots lorsque le débit devient très petit. Nous retrouvons donc alors une expression de même forme que celle à laquelle nous avait conduit la propagation ascendante par diffusion avec cette différence que le coefficient de h est maintenant $\frac{\varrho g}{A}$ au lieu de $\sqrt{\frac{\varrho g}{A}}$.

Si nous tirons la valeur de i de l'expression (12) nous obtenons

$$i = i_0 e^{-\frac{\varrho g}{A} h} - \left[\frac{1 - e^{-\frac{\varrho g}{A} h}}{\varrho g} \right] F. \qquad (12\,\text{bis})$$

Or, il est facile de voir que le second terme du second membre est toujours positif en valeur absolue; il en résulte que si les forces de viscosité interviennent, le degré d'imbibition i sera toujours plus petit à hauteur égale h que celui qui correspondait à l'équilibre final d'une colonne de hauteur indéfinie, représenté par le premier terme du second membre.

Nous allons maintenant envisager différents cas particuliers de régime permanent et calculer pour chacun d'eux la valeur de la constante F.

1er Cas — $i = 0$ pour $h = \infty$ d'où $F = 0$. (12a)

C'est le cas limite que nous venons d'envisager; on a

$$i = i_0 e^{-\frac{\varrho g}{A} h}.$$

2e Cas — $i = 0$ pour $h = H$

C'est le cas de la dessication complète au sommet

$$F = \varrho g\, i_0 \frac{e^{-\frac{\varrho g}{A} H}}{1 - e^{-\frac{\varrho g}{A} H}}. \qquad (12\text{b})$$

3e Cas — $i = i_H$ pour $h = H$.

C'est le cas d'une dessication partielle au sommet de la colonne; on a

$$F = \varrho g \left[\frac{i_0 e^{-\frac{\varrho g}{A} H} - i_H}{1 - e^{-\frac{\varrho g}{A} H}} \right]. \qquad (12\text{c})$$

En introduisant ces valeurs de F dans la formule (12bis) on obtient en définitive les trois relations (13) (14) (15) sous une forme qui met nettement en évidence l'influence de la viscosité, représentée par le second terme

1er cas

$$i = i_0 e^{-Kh}. \tag{13}$$

2e cas

$$i = i_0 e^{-Kh} - \left[\frac{i_0 e^{-KH}}{1 - e^{-KH}}\right](1 - e^{-Kh}). \tag{14}$$

3e cas

$$i = i_0 e^{-Kh} - \left[\frac{i_0 e^{-KH} - i_H}{1 - e^{-KH}}\right](1 - e^{-Kh}). \tag{15}$$

Ces relations permettront de calculer la répartition de l'imbibition en régime permanent; la constante $K = \frac{\varrho g}{A}$ pouvant se déduire de la valeur limite obtenue (13). *Cette répartition est, on le voit, indépendante du débit et ne dépend que des conditions imposées aux limites.*

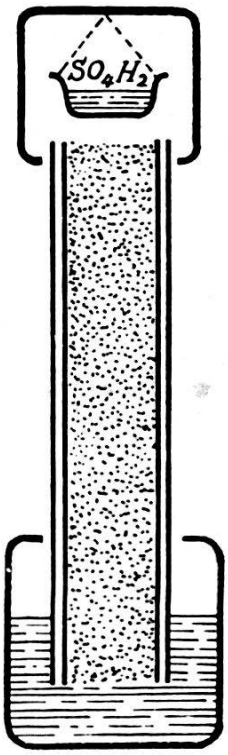

Fig. 2.

Débit ascensionnel en régime permanent (D_a).

D'une façon générale, le débit ascensionnel, c'est-à-dire le volume de liquide qui en une seconde traverse une section quelconque de la colonne est réglé par la puissance de dessication qui s'exerce à sa partie supérieure. C'est cette puissance de dessication qui donne à i_H une valeur d'autant plus petite qu'elle agit plus énergiquement.

En régime permanent le débit ascensionnel ($D_a = i\,v$) doit alors compenser exactement et à chaque instant le volume de liquide qui disparaît par évaporation au sommet de la colonne.

Or ce débit ascensionnel est directement accessible à l'expérience; c'est ce qui en fait l'intérêt. On peut le mesurer de diverses façons (par ex. fig. 2) par la perte de poids de l'appareil, après un temps déterminé de fonctionnement en régime permanent.

Nous avons vu précédemment que la connaissance de ce débit D_a permettait de déterminer la valeur de la constante (aA) de nos formules générales de propagation par diffusion.

Remarque. — Il est aisé de se rendre compte que *le système est autorégulateur.* En effet, si la puissance de dessication qui agit sur le sommet de la colonne vient à augmenter, la valeur de i_H diminue. Il en résulte une augmentation du gradient de l'imbibition sur toute la longueur de la colonne; et du même coup une augmentation de F c'est-à-dire du débit (formules 12b et 8). Le système est on le voit autorégulateur.

Rendement ascensionnel (ζ).

Nous appellerons rendement ascensionnel « le rapport entre l'énergie utilisée dans l'imbibition contre la pesanteur, à l'énergie totale libérée par l'imbibition ».

1er Cas. Rendement de l'équilibre final. — Désignons par $\varrho\, i_0$ la masse de liquide qui imbibe à saturation un cm³ de la substance.

La masse totale d'eau qui imbibera une colonne de hauteur indéfinie de 1 cm² de section sera:

$$M = \varrho\, i_0 \int_0^\infty e^{-Kh} \cdot dh = \frac{\varrho\, i_0}{K}\,.$$

D'autre part le travail effectué contre la pesanteur pour l'élévation du liquide aura pour expression

$$\tau = \varrho\, i_0\, g \int_0^\infty e^{-Kh}\, h \cdot dh = \frac{\varrho\, i_0\, g}{K^2}\,.$$

Enfin l'énergie totale E que libère l'imbibition de la masse M de liquide, énergie qui apparaît généralement pour la plus grande partie sous forme de chaleur sera en désignant par E_0 l'énergie totale libérée par unité de masse de liquide.

$$E = M\, E_0 = \frac{\varrho\, i_0\, E_0}{K}\,.$$

D'où pour le rendement ascensionnel

$$\xi = \frac{\tau}{E} = \frac{g}{K E_0}.$$ [1])

Comme K et E_0 sont tous deux accessibles à l'expérience, ce rendement ascensionnel peut être aisément évalué. Or les expériences effectuées jusqu'ici sur l'imbibition, du moins avec le papier buvard, ont montré que ce rendement est alors extrêmement petit et que dans son ensemble l'élévation d'un liquide par imbibition du papier buvard, constitue un mode élévatoire particulièrement dispendieux.

2e Cas. Rendement ascensionnel en régime permanent. — Le problème se présente alors différemment. Dans ce cas l'état d'imbibition de la colonne reste invariable et le dessèchement qui se produit à la partie supérieure aux dépens d'une source de chaleur extérieure (rayons solaires par ex.) a pour effet d'évaporer en un temps Δt une quantité Δm de liquide, laquelle doit être aspirée de la base au sommet. Le rendement ascensionnel devient alors

$$\xi = \frac{g H \cdot \Delta m}{E_0 \Delta m} = \frac{g H}{E_0} \tag{16}$$

H désignant comme d'habitude la hauteur de la colonne.

On voit alors, ce qui était évident a priori, que le rendement est d'autant plus élevé que la hauteur H de la colonne est plus grande.

Remarquons enfin que l'étude du rendement ascensionnel en régime permanent présente un intérêt particulier puisque le régime permanent se rapproche vraisemblablement davantage du processus que l'on peut invoquer dans l'imbibition des tissus végétaux.

Hauteur limite (H_0), (H_{lim}).

A ne considérer que la formule (5) relative à l'équilibre final, il semblerait que l'imbibition devrait pouvoir se propager jusqu'à une hateur infinie; le degré d'imbibition s'approchant asymptotiquement de zéro, au fur et à mesure qu'on s'élève.

En réalité d'autres considérations semblent devoir limiter pratiquement la hauteur d'ascension. En premier lieu, s'il n'y a pas d'autre apport d'énergie au système que celle qui résulte

[1]) Cette dernière formule suppose que l'énergie d'imbibition par unité de volume de liquide imbibant est indépendante de l'état d'imbibition i de la substance: elle n'est donc vraisemblablement qu'approximative.

de l'action desséchante qui s'exerce au sommet de la colonne en régime permanent, le rendement ascensionnel ne peut être supérieur à l'unité; d'où (16)

$$H_0 = \frac{E_0}{g} .$$

Mais c'est là vraisemblablement une limite qui pratiquement doit être loin d'être atteinte, si l'on en juge du moins par l'énorme dégagement de chaleur inutile qui accompagne parfois l'imbibition du papier buvard.

En second lieu, on n'a jamais au sommet H de la colonne une imbibition $i_H = 0$; soit du fait du contact immédiat de la couche terminale avec le reste de la colonne déjà imbibée, soit du fait que l'atmosphère dans laquelle débouche la colonne renferme elle-même de l'humidité; soit enfin du fait que la puissance de dessication qui s'exerce à la partie supérieure de la colonne n'est pas infinie. L'extrémité supérieure de la colonne n'aura donc jamais une imbibition nulle, mais une imbibition minima; soit $i_H = i_m$.

Il est alors possible d'évaluer la hauteur limite correspondant à cette imbibition minima. Dans le cas où la colonne est très haute, le débit devient très faible et la constante F tend vers zéro. On a alors comme limite $(F = 0)$

$$i_m = i_0 \, e^{-K\,(H_{\lim})}$$

d'où

$$H_{\lim} = -\frac{1}{K} \log \frac{i_m}{i_0} \tag{17}$$

quelle que soit d'ailleurs celle des deux hypothèses que l'on invoque.

Mais il se peut que le débit ascensionnel soit sensible et que l'on n'ait pas le droit de négliger la viscosité (F différent de zéro). La solution générale (12bis) de l'équation différentielle est alors

$$\varrho\, g\, i_m + F = (\varrho\, g\, i_0 + F)\, e^{-K\,H_{\lim}}$$

d'où

$$H_{\lim} = -\frac{1}{K} \log \frac{\varrho\, g\, i_m + F}{\varrho\, g\, i_0 + F} . \tag{18}$$

C'est donc la *hauteur limite pratique* pour un débit correspondant à F (8) et pour une dessication minima i_m au sommet de la colonne.

Si la dessication était totale au sommet de la colonne $(i = 0)$ cette hauteur limite serait pour un débit correspondant à F

$$H_{\lim} = -\frac{1}{K} \log \frac{F}{F + \varrho\, g\, i_0} .$$

On voit donc, par ce qui précède, que les hauteurs limites pratiquement atteintes sont représentées par les équations (17) et (18); la condition (16) résultant du principe de la conservation de l'énergie devant naturellement être en même temps satisfaite.

Résumé, conclusions et formules.

En résumé, nous avons été amené à considérer la propagation de l'imbibition à l'intérieur d'une substance, soit comme un phénomène de diffusion (1ère hypothèse) soit comme un phénomène d'hydrodynamique faisant intervenir des forces de viscosité (2ème hypothèse).

Notre premier but était d'étudier successivement en partant de ces deux hypothèses l'imbibition ascendante, à cause du rôle qu'elle pourrait jouer dans le mécanisme de l'ascension de la sève au sein des tissus végétaux. Mais incidemment, nous avons cependant traité le cas plus simple de la propagation horizontale où la pesanteur n'intervient pas.

Nous avons également traité [formules (2) (3) (6)] quelques cas de régime variable, relatifs à la 1ère hypothèse et montré que les formules établies bien que d'un maniement peu commode pourraient éventuellement être utilisées à la vérification de cette hypothèse, toutes les grandeurs qui interviennent dans ces relations pouvant être déterminées directement ou indirectement par l'expérience.

Mais notre but principal était d'établir les conditions du *régime permanent dans la propagation ascendante;* et cela dans les deux hypothèses théoriques que nous avons envisagées.

D'une part, comme nous l'avons dit, ce régime permanent semble présenter quelque analogie avec ce qui peut se passer dans l'ascension d'un liquide au sein d'un tissu végétal imbibé; et d'autre part il conduit à des expressions plus simples et à une facilité plus grande d'atteindre par l'expérience les diverses grandeurs qui interviennent dans les formules obtenues.

L'imbibition, nous le savons, est parfois susceptible de libérer une énergie considérable. Si donc, toute cette énergie était utilisée à produire l'ascension du liquide, cette ascension pourrait atteindre des hauteurs dépassant de beaucoup celle des végétaux, même les plus élevés.

Toutefois, les expériences effectuées sur l'imbibition du papier buvard par l'eau, le pétrole ou l'huile de vaseline ont montré que la fraction de l'énergie disponible utilisée pour vaincre la pesanteur était en général extrêmement petite et que le rendement

ascensionnel se trouvait de la sorte très minime. Il ne faudrait cependant pas en conclure que l'imbibition doive être définitivement exclue du mécanisme de l'ascension des liquides au sein des tissus végétaux.

Il se pourrait fort bien que la nature sache mieux utiliser cette énergie dans ses tissus. D'ailleurs, ainsi que le montre la formule (16) le rendement ascensionnel s'améliore, au fur et à mesure que l'on envisage des végétaux de plus grande hauteur.

Mais indépendamment de cette limite théorique qu'impose le principe de la conservation de l'énergie (16) il y a la limite pratique donnée par les formules (17) et (18) et qui résulte du fait que l'état d'imbibition n'est vraisemblablement jamais rigoureusement nul à la partie supérieure de la colonne.

D'une façon générale, nous avons été amené au cours de cette étude à définir et à préciser un certain nombre de grandeurs, qui interviennent dans nos formules et qui nous semblent particulièrement importantes au point de vue de l'étude expérimentale de l'imbibition. Ce sont principalement:

Le *degré d'imbibition (i)* défini numériquement par le « volume de liquide contenu dans un cm³ de la substance imbibée ». Cette valeur s'obtient d'une part par la différence des pesées de la substance sèche et de la substance partiellement ou totalement imbibée; et d'autre part de la connaissance de la densité ϱ du liquide imbibant. — A saturation le degré d'imbibition est i_0.

Le *débit ascensionnel (D)* est le « volume de liquide qui en une seconde traverse en régime permanent une section quelconque de la colonne imbibée ». Ce débit est directement accessible à l'expérience fig. (2).

L'*énergie disponible (E_0)* est « la quantité d'énergie qu'est susceptible de dégager, généralement sous forme de chaleur, l'imbibition d'un cm³ de liquide ». Cette grandeur s'obtient par des mesures calorimétriques[1]).

La *constante d'ascension (K)* définie par la relation (5)

$$K = -\frac{1}{h} \log \frac{i_h}{i_0} .$$

Elle peut se déduire de la connaissance du degré d'imbibition à la base et au sommet de la colonne imbibée.

La *hauteur limite théorique (H_0)* définie par la relation

$$H_0 = \frac{E_0}{g} .$$

[1]) H. Saini. — Contribution expérimentale à l'étude calorimétrique de l'imbibition. — *Helv. Phys. Acta* III. fasc. 1, p. 3—16, 1930.

Cette formule suppose que la totalité de l'énergie disponible est utilisée contre la pesanteur.

La *hauteur limite pratique* $H_{\lim}$ (1ère Hypothèse) définie par la relation

$$H_{\lim} = -\frac{1}{K} \log \frac{i_m}{i_0}.$$

La *hauteur limite pratique* (2ème Hypothèse)

$$H_{\lim} = -\frac{1}{K} \log \frac{\varrho\, g\, i_m + F}{\varrho\, g\, i_0 + F}.$$

F étant la force de viscosité agissante pour un régime permanent déterminé (voir plus loin). Cette formule se réduit à la précédente pour $F = 0$.

Le *rendement ascensionnel* (ζ)

$$\xi = \frac{g\, H}{E_0}.$$

La *force de viscosité (F)* (2ème Hypothèse)

$$F = B\, \eta\, (i\, v) = B\, \eta\, D = \varrho\, g\, \frac{(i_0\, e^{-K H} - i_H)}{1 - e^{-K H}}.$$

B coefficient dépendant de la nature et de la structure de la substance imbibée; η coefficient de viscosité du liquide imbibant; $(i\, v) = D$ débit ascensionnel en régime permanent.

La *Répartition du degré d'imbibition en fonction de h en régime permanent.*

(1ère Hypothèse). Elle est donnée par la relation

$$i = i_0\, e^{-K h} \tag{5}$$

pour une colonne de hauteur indéfinie dont la base est maintenue à saturation i_0.

Pour une colonne de hauteur H dont la base est maintenue au degré d'imbibition saturée i_0 et dont le sommet est soumis à une dessication complète $i = 0$, elle a pour valeur

$$i = i_0\, \frac{e^{K(H-h)} - e^{-K(H-h)}}{e^{K H} - e^{-K H}}. \tag{7}$$

Cette expression se réduit à (5) lorsque H devient très grand.

(2ème Hypothèse)

$$i = i_0 e^{-Kh} - \left[\frac{i_0 e^{-KH} - i_H}{1 - e^{-KH}} \right] (1 - e^{-Kh})$$

pour une colonne de hauteur H dont la base est maintenue à i_0 et le sommet au degré d'imbibition i_H. Si la dessication au sommet est complète $i_H = 0$.

Il importe enfin de remarquer que *toutes les formules qui précèdent ne contiennent que des grandeurs accessibles à l'expérience et peuvent par conséquent faire l'objet d'applications numériques dans les deux hypothèses que nous avons envisagées.*

Disons en terminant que les considerations théoriques que nous avons développées et les formules qui en découlent, ne peuvent encore, à l'heure actuelle, constituer une therme complète de la propagation de l'imbibition. On doit les considerer plutôt comme un point de départ, destiné à guider les recherches experimentales dans un domaine encore peu exploré; il est en effet probable que l'experience, qui généralement apporte dans chaque question des éléments nouveaux, conduirait à les modifier sur bien des points.

Remarque essentielle.

Dans toute cette étude, nous avons supposé que la force motrice qui détermine le mouvement d'ascension du liquide était due à l'imbibition $(-A \frac{di}{dh})$. On pourrait, tout aussi bien supposer que cette force motrice soit due à des phénomènes d'osmose $(A_c \frac{dc}{dh})$ [1]; ou même à une dessication partielle et progressive de la couche d'activité sensible qui tapisse les parois internes des vaisseaux; en désignant par ε une fonction de l'épaisseur de cette couche active, la force motrice serait $-A_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dh}$.

Au lieu donc d'avoir à faire intervenir le gradient de l'imbibition, il faudrait envisager le gradient de la concentration ou le gradient de la dessication. A cela près les formules et les conséquences qui en découlent demeureraient les mêmes.

Genève, juin 1934.

---

[1]) Nous affectons cette force du signe + car le mouvement du liquide tend alors à se produire dans le sens des concentrations croissantes de la base au sommet, $\frac{dc}{dh}$ est le gradient de la concentration.