Problèmes d'images électriques dans les diélectriques. I

Autor(en): **Weigle, J.J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **5 (1932)**

Heft IV

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110170

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Problèmes d'images électriques dans les diélectriques I

par **J. J. Weigle.**

(29. VI. 1932.)

Résumé. On calcule les forces que les diélectriques exercent sur les charges ponctuelles: 1° Force due à une discontinuité dans le diélectrique; 2° Force due à une sphère diélectrique; 3° Force due à une couche finie de diélectrique et 4° Force sur une charge dans un diélectrique non homogène.

1. Introduction.

Une méthode expérimentale ingénieuse due à BECKER[1]) permet de déterminer les champs de force agissant sur les électrons au voisinage des solides. Il suffit en effet, pour obtenir ces renseignements, de mesurer le travail d'extraction des électrons, soit photoélectriquement, soit thermioniquement, avec différents champs électriques accélérateurs.

BECKER[1]), ainsi que LAWRENCE et LINFORD[2]), a pu vérifier pour les métaux purs qu'il existe une force attirant les électrons vers le métal, donnée, jusqu'à une distance de l'ordre de 10^{-7} cm., par

$$F = -\frac{e^2}{4x^2},$$

où e est la charge électrique placée à une distance x du métal. Cette force n'est autre que la force d'image.

Cette force d'image joue donc un rôle certain quoique peut-être petit dans les phénomènes thermioniques et photoélectriques. Il ne faudrait pas croire en effet qu'elle constitue à elle seule la force contre laquelle l'électron doive faire du travail pour s'échapper. En effet, pour $x = 0$, la force deviendrait infinie, ce qui signifierait que jamais les électrons ne pourraient sortir du métal. Il va de soi qu'aux distances atomiques, la force qui agit sur les électrons provient individuellement des atomes du métal et non plus des propriétés macroscopiques du conducteur. Si l'on calcule le travail à fournir contre la force d'image à partir de 10^{-7} cm. jusqu'à l'infini, on trouve 0,358 volt-électron, alors que le travail d'extraction des électrons est, pour le tungstène par exemple, de 4,52 volt-électrons. D'autre part, d'après la théorie de Sommerfeld,

[1]) BECKER et MULLER, Phys. Rev. **31**, 431, 1928.

[2]) LAWRENCE et LINFORD, Phys. Rev. **36**, 482, 1930.

le travail vrai qu'il faut fournir est plus considérable encore puisqu'une partie de l'énergie d'extraction est donnée par l'énergie cinétique des électrons à l'intérieur du métal et que cette énergie est beaucoup plus grande que celle admise par la théorie classique.

Les expériences de diffractions électroniques de RUPP[1]) peuvent, elles aussi, nous renseigner sur les forces agissant sur les électrons près des surfaces diffractantes. RUPP a montré que, pour les électrons de petites vitesses, il faut faire intervenir dans les calculs de diffraction la réfraction due au champ de force superficiel. Les expériences permettent de mesurer approximativement le potentiel intérieur des électrons. Or, les diffracteurs diélectriques semblent se comporter de façon opposée aux conducteurs.

Il pouvait donc sembler intéressant d'étudier d'une façon générale les forces d'images électriques dues à la présence de diélectriques puisque ces forces d'images jouent un rôle certain dans les phénomènes électroniques. Nous donnons dans cet article la solution de certains problèmes d'images qui nous ont semblé importants dans l'application pratique de cette théorie.

2. Forces d'images à la limite de deux diélectriques.

On trouve dans les traités d'électricité deux problèmes de diélectriques résolus au moyen de la théorie des images[2]): celui d'une charge ponctuelle e dans un diélectrique semi-infini de constante diélectrique K_1 placée à une distance a d'un autre diélectrique semi-infini de constante K_2, et celui de trois diélectriques séparés par des plans parallèles.

On trouve pour le premier de ces problèmes que le potentiel dans le premier diélectrique peut être considéré comme dû aux charges $\frac{e}{K_1}$ en a, et

$$e_{12} = \frac{e}{K_1}\,\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \tag{1}$$

placée en $-a$ (fig. 1).

Le potentiel en K_2 est dû à la charge

$$e'_{12} = \frac{2\,e}{K_1 + K_2}\,. \tag{2}$$

---

[1]) RUPP, Leipz. Vortr. 1930, p. 1.

[2]) Voir ABRAHAM et FÖPPL, Theorie der Elektrizität, dritte Auflage, Teubner, Leipzig, 1907, p. 153, et MASCART et JOUBERT, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, vol. 1, Masson, Paris, 1882, p. 153.

Ces charges sont des charges fictives (freie Elektrizität), ce qui explique la différence entre nos notations et celles du livre ABRAHAM[1]). Pour calculer la force qui agit sur la charge e, il suffit donc de considérer la charge e_{12} qui seule produit en K_1 un potentiel. On remarque que si $K_1 > K_2$, la charge e_{12} est positive,

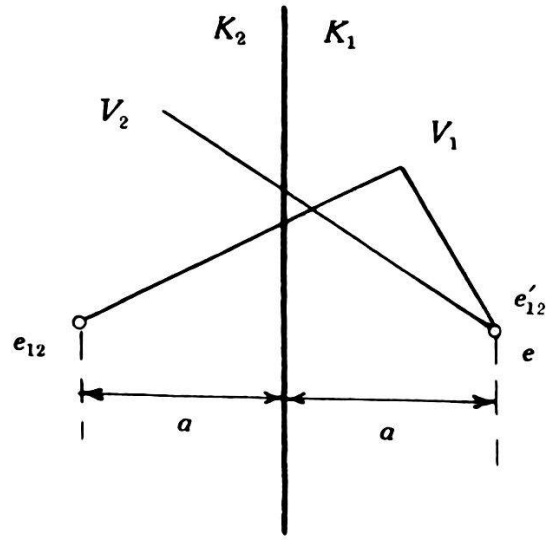

Fig. 1.
Charges d'images e_{12} et e'_{12} à la limite de deux diélectriques.

ce qui veut dire que la charge e sera repoussée par la discontinuité des diélectriques avec une force

$$F = \frac{e^2}{4\,a^2\,K_1}\,\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\,. \tag{3}$$

Dans le cas contraire, $K_2 > K_1$, la charge d'image e_{12} est alors négative et la force sur e est une attraction de valeur absolue

$$\frac{e^2}{4\,a^2 K_1}\,\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\,.$$

Ce résultat est intéressant; supposons en effet une charge placée dans l'air ($K_{\text{air}} = 1$) près d'un diélectrique de constante K_2. Comme $K_{\text{air}} < K_2$, la force est attractive; la charge alors, sous l'influence de cette force, ayant atteint la surface et pénétré à l'intérieur de K_2, se trouvera donc dans un milieu de constante diélectrique plus grande que celle régnant de l'autre côté de la discontinuité. Une force de répulsion agira donc, qui tendra à faire pénétrer de plus en plus loin à l'intérieur du diélectrique la charge considérée. Ce résultat est élémentaire, mais il nous a semblé suffisamment inconnu pour que nous le redonnions ici.

[1]) ABRAHAM et FÖPPL, loc. cit.

Considérons maintenant quelques applications de cet effet.

A) Tout d'abord, comparons les forces F_d dues aux diélectriques avec les forces d'images de conducteurs F_c. On trouve que

$$\frac{F_c}{F_d} = \frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} \quad (K_1 = 1)$$

Si K_2 est très grand, les deux forces sont égales. Si, par contre, K_2 est très peu différent de l'unité, la force d'image est très petite.

Comparons aussi les forces F_1 et F_2 agissant de chaque côté d'une discontinuité $K_1 K_2$. On trouve

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Autrement dit, plus la constante diélectrique du milieu où se trouve la charge est grande, plus la force agissant sur cette charge est petite.

B) Supposons que, dans une solution electrolytique très diluée, nous ayons des ions de charge $+ e$ et $- e$. Supposons aussi que la constante diélectrique du solvant ne soit pas affectée par la présence de ces ions (ce qui est vrai en première approximation à petites concentrations). A la surface libre de la solution, les forces d'images diélectriques tendent à pousser ces ions vers l'intérieur de la solution. Calculons alors la concentration en fonction de la distance à la surface libre. Il doit y avoir équilibre entre la force d'image et la force provenant de la pression osmotique,

$$p = nkT,$$

où n est le nombre d'ions par cm^3, k la constante de Boltzmann et T la température absolue. Si la concentration varie de point en point,

$$\frac{dp}{dx} = kT\frac{dn}{dx}$$

et la force agissant sur un élément de section q perpendiculaire à x et d'épaisseur dx sera

$$-\frac{dp}{dx}dxq$$

et la force agissant sur un ion devient

$$-\frac{dp}{dx}\frac{1}{n}.$$

Comme il doit y avoir équilibre entre cette force et la force d'image, on a

$$-\frac{dp}{dx}\frac{1}{n}+\frac{e^2}{4x^2kK}\frac{K-1}{K+2}=0$$

ou, en intégrant,

$$n=n_0e^{-\frac{e^2}{4x^2KkT}\frac{K-1}{K+2}},$$

où n_0 est la concentration à l'intérieur du liquide.

Table I.

Valeurs de x (distance à la surface de la solution) pour lesquelles la concentration a diminué de 9,5% et de 0,9% pour des constantes diélectriques 80 et 5 et pour des ions monovalents et bivalents respectivement.

	$K=80$		$K=5$	
$\frac{n}{n_0}$	$e=4{,}77\ 10^{-10}$ x (cm.)	$e=2\times4{,}77\ 10^{-10}$ x (cm.)	$e=4{,}77\ 10^{-10}$ x (cm.)	$e=2\times4{,}77\ 10^{-10}$ x (cm.)
0,905	$1{,}76\ 10^{-7}$	$0{,}7\ 10^{-6}$	$1{,}92\ 10^{-6}$	$0{,}77\ 10^{-5}$
0,991	$1{,}76\ 10^{-6}$	$0{,}7\ 10^{-5}$	$1{,}92\ 10^{-5}$	$0{,}77\ 10^{-4}$

En supposant $T=300^0$, on trouve alors les résultats contenus dans la table I. On voit donc que ces forces d'images diélectriques ne sont pas négligeables puisque, dans une solution de constante diélectrique 5 et d'ions bivalents, la concentration à 0,7 millièmes de mm. de la surface a diminué de 1%.

On pourrait aussi considérer les solutions faites d'ions de différentes charges, sur lesquels les forces d'images agiraient donc différemment. On voit immédiatement que les ions de plus grande charge seront plus fortement repoussés vers l'intérieur de la solution que les ions de plus petite charge.

3. Force d'image à la limite entre un conducteur et un diélectrique.

Supposons un conducteur au potentiel 0 limité à partir de $x=0$ par un diélectrique de constante K. Une charge e placée dans le diélectrique à une distance x du conducteur a pour image une charge $\frac{e}{K}$ placée à $-x$, comme on le voit immédiatement. La charge sera donc attirée par une force

$$F=\frac{e^2}{4x^2K}, \qquad (4)$$

c'est à dire une force K fois plus petite que si le diélectrique avait été absent.

Si le travail d'extraction des électrons est constitué en grande partie par le travail qu'il faut fournir contre la force d'image, ce travail sera fortement diminué par la présence du diélectrique. Il n'est pas impossible que cet effet joue un rôle important en thermionique ou en photoélectricité. Nous nous réservons de revenir sur ce point. Toutefois, nous ne pensons pas que les problèmes que l'effet des diélectriques pose puissent être résolus d'une façon quantitative. On sait combien les phénomènes thermioniques et photoélectriques sont sensibles aux conditions de surface et par conséquent on peut imaginer combien la présence d'un diélectrique adhérant à la surface du métal pourra changer les conditions d'émission des électrons indépendamment de l'effet d'image diélectrique dont nous parlons ici. Il est possible encore que l'effet photovoltaïque et le fonctionnement des piles dépendent en quelque façon de la diminution du travail d'extraction des électrons, produite par le diélectrique.

4. Images d'une sphère diélectriques.

Supposons une sphère de rayon a, constante diélectrique K placée dans un diélectrique de constante unité. Une charge e est à une distance $d > a$ du centre de la sphère (fig. 2).

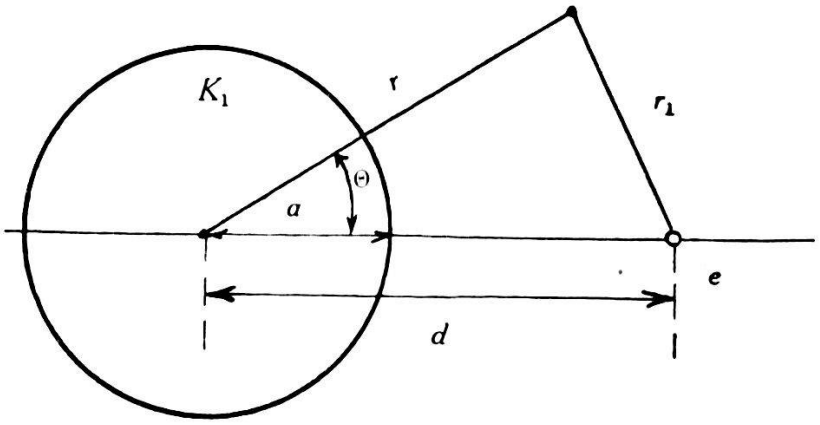

Fig. 2.
Sphère diélectrique dans le champ d'une charge e.

On cherche donc le potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.

Lorsqu'on tâche de résoudre ce problème par la méthode des images, on trouve qu'une seule image (comme dans le cas de la sphère conductrice) ne conduit pas au résultat cherché. Nous avons donc décidé de procéder par la méthode des fonctions de Legendre.

Nous supposerons donc le potentiel comme dû à la charge e et à une couche d'électricité fictive de densité σ à la surface de la sphère. Cette densité peut être développée en série de polynômes de Legendre:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n ,$$

où les C_n sont des constantes et les P_n les polynômes de Legendre.

Le potentiel V_e à l'extérieur de la sphère est alors donné par:

$$V_e = \frac{e}{r_1} + 4\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{C_n P_n}{2n+1}$$

et le potentiel à l'intérieur par:

$$V_i = \frac{e}{r_1} + 4\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} \frac{C_n P_n}{2n+1} .$$

r_1 est la distance de la charge e au point où l'on mesure le potentiel. On a donc:

$$r_1 = d \sqrt{\frac{r^2}{d^2} + 1 - 2\frac{r}{d}\cos\Theta}$$

et

$$\frac{e}{r_1} = \frac{e}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^{n} P_n .$$

Les conditions aux limites du problème sont:

$$\left.\begin{aligned} V_i &= V_e \\ K\frac{\partial V_i}{\partial r} &= \frac{\partial V_e}{\partial r} \end{aligned}\right\} \text{ à } r = a .$$

La première condition est réalisée immédiatement grâce à la supposition que nous avons faite (distribution d'électricité à la surface de la sphère). La seconde donne:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e}{d^2}\, n \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} + 4\pi \frac{n+1}{2n+1} C_n\right] P_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[K \frac{e}{d^2}\, n \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} + 4\pi K \frac{n}{2n+1} C_n\right] P_n .$$

Pour que ces deux expressions soient identiques, il faut que les coefficients des P_n soient égaux. On a donc:

$$C_n = -\frac{e}{d^2}\,\frac{K-1}{K+1+\frac{1}{n}}\left(\frac{a}{d}\right)^{n-1}\frac{2n+1}{4\pi}\,.$$

Et les potentiels deviennent alors:

$$V_e = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{d}\right)^n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\frac{K-1}{K+1+\frac{1}{n}}\,P_n$$

$$V_i = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^n\frac{K-1}{K+1+\frac{1}{n}}\,P_n\,.$$

On voit immédiatement que ces potentiels satisfont à l'équation de Laplace. Ils sont donc la solution de notre problème. On voit aussi que l'influence de la sphère sur le champ électrique n'est pas susceptible d'être mise sous la forme d'une image (charge ponctuelle). Il semble que la densité:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,P_n = -\frac{e}{4\pi d^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{d}\right)^{n-1}(2n+1)\,P_n$$

répandue sur toute la sphère soit la représentation la plus simple du phénomène.

On reconnaît facilement que cette solution redonne bien à la limite le cas connu de la sphère diélectrique placée dans un champ uniforme. Il suffit pour cela de faire tendre e et d vers l'infini, en sorte que $\frac{e}{d^2}$ tende vers une valeur finie $\frac{E}{2}$, E étant le champ uniforme dans lequel la sphère se trouve placée. Il faut évidemment supposer une autre charge $-e$ placée à $-d$. On trouve alors en négligeant les termes en $\frac{e}{a^n}$ $(n > 2)$.

$$V_e = E\,r\cos\Theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\,\frac{K-1}{K+2}\right)$$

et

$$V_i = E\,r\cos\Theta\,\frac{3}{K+2}\,.$$

D'autre part, il est facile de vérifier que si k tend vers l'∞ on retrouve les résultats du problème de la sphère conductrice.

Pour donner une idée de l'ordre de grandeur de la force avec laquelle une charge est attirée par une sphère diélectrique, nous avons calculé cette force au moyen des formules ci-dessus pour $k = 3$ et $d = 2\,a$. On trouve approximativement:

$$F = \frac{e^2}{(\sqrt{2}\,a)^2}\,.$$

On voit donc que la sphère attire la charge avec une force comparable à celle due à une autre charge placée à une distance $\sqrt{2}\,a$ de la première. Cette force n'est donc pas négligeable.

5. Images d'une couche de diélectrique.

Ce problème a déjà été résolu[1]), mais comme nos notations diffèrent de celles employées par Mascart et Joubert et que, dans un paragraphe suivant, nous aurons besoin de ces résultats, nous pensons bien faire en redonnant ici une démonstration simple.

Supposons donc l'espace occupé par trois diélectriques (fig. 3) K_1 s'étendant de $x = 0$ à $x = \infty$, K_2 de $x = 0$ à $x = -d$ et

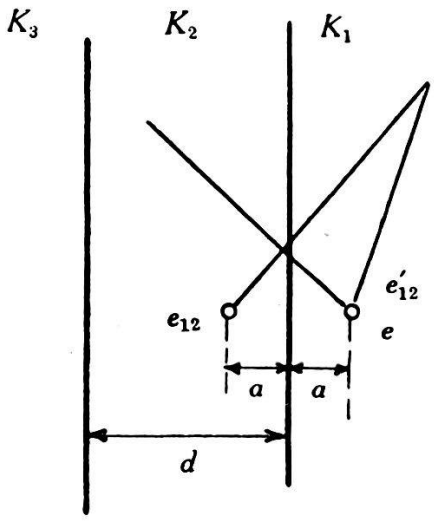

Fig. 3.
Images d'une couche de diélectrique

K_3 de $x = -d$ à $x = -\infty$. Une charge e est placée en $+\,a$. On pourrait facilement calculer le potentiel dans chacun des diélectriques, mais comme ce qui nous intéresse est la force agissant sur e, nous nous bornerons à obtenir celle-ci. Pour satisfaire aux conditions aux limites à $x = 0$, il faut prendre comme images deux charges e_{12} en $-\,a$ et e'_{12} en $+\,a$.

[1]) Mascart et Joubert, loc. cit.

$\frac{e}{K_1}$ et e_{12} donnent le potentiel en K_1 et e'_{12} celui en K_2. Nous avons vu au paragraphe 2 (éq. (1) et (2)) les valeurs de ces deux charges. Mais avec ces charges, les conditions aux limites ne sont pas vérifiées sur la surface $x = -d$, car le potentiel dû à e'_{12} n'est pas « équilibré » sur cette surface. Un raisonnement

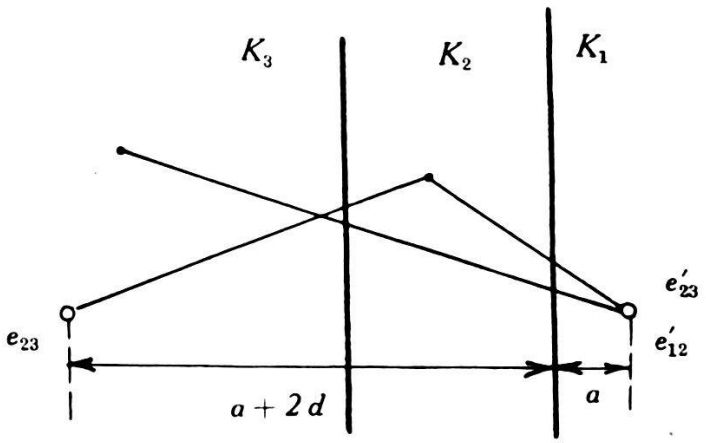

Fig. 4.

semblable à celui du paragraphe 2 nous oblige à introduire deux nouvelles charges (fig. 4) e_{23} en $x = -(a + 2d)$ et e'_{23} en $x = a$.

Ces deux charges sont données suivant les formules du paragraphe 2 par

$$e_{23} = e'_{12}\,\varepsilon_{23} \qquad \text{et} \qquad e'_{23} = e'_{12}\,\mu_{23}$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_i - K_j}{K_i + K_j} \qquad \mu_{ij} = \frac{2\,K_i}{K_i + K_j}\,. \tag{7}$$

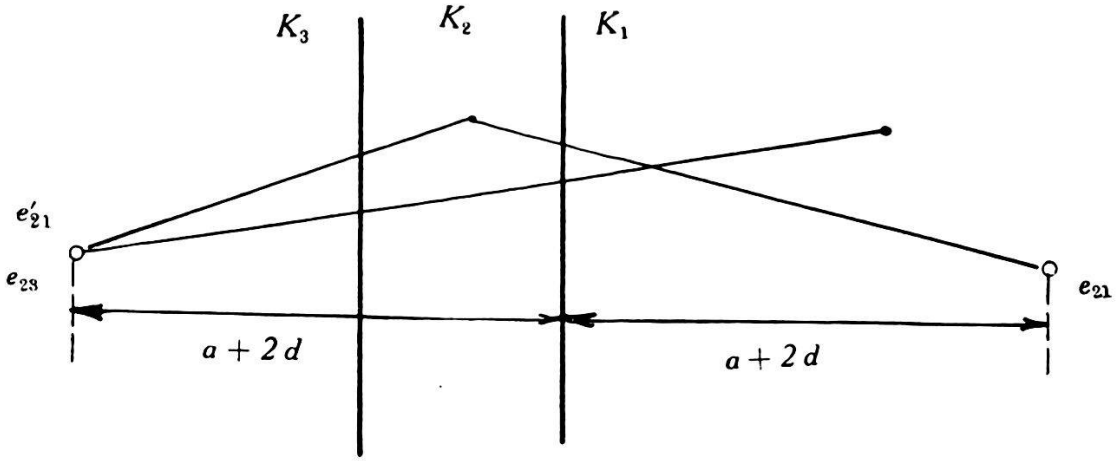

Fig. 5.

Mais nous avons introduit, avec la charge e_{23}, une nouvelle source de potentiel en K_2, qu'il nous faut « équilibrer » à $x = 0$. Ce qu'on fait en introduisant (fig. 5) deux nouvelles charges e_{21} et e'_{21}, qui sont données

par

$$e_{21} = e_{23}\varepsilon_{21} \qquad \text{et} \qquad e'_{21} = e_{23}\mu_{21}.$$

De nouveau, le potentiel dû à e_{21} en K_2 n'est plus « équilibré ». On est conduit finalement à introduire une série infinie d'images qui donnent les résultats suivants:

Distances:	Charges produisant un potentiel en K_1:
a	$\frac{e}{K_1}$
$-a$	$\frac{e}{K_1}\varepsilon_{12}$
$-(a+2d)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\varepsilon_{23}\mu_{21}$
$-(a+nd)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\mu_{21}\varepsilon_{23}(\varepsilon_{23}\varepsilon_{21})^{n-1}$.

Distances:	Charges produisant un potentiel en K_2:
a	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}$
$-(a+2d)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\varepsilon_{23}$
$+(a+2d)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{21}$
$-(a+2nd)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}(\varepsilon_{23}\varepsilon_{21})^{n-1}\varepsilon_{23}$
$+(a+2nd)$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}(\varepsilon_{23}\varepsilon_{21})^{n}$

Distances:	Charges produisant un potentiel en K_3:
a	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\mu_{23}$
$a+2d$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{21}\mu_{23}$
$a+2nd$	$\frac{e}{K_1}\mu_{12}(\varepsilon_{23}\varepsilon_{21})^{n}\mu_{23}$.

Ces séries infinies d'images suffisent à déterminer complètement les potentiels cherchés.

Calculons encore la force agissant sur la charge e. On trouve

$$F = \frac{e^2}{K_1}\left[\frac{\varepsilon_{12}}{(2\,a)^2} + \mu_{12}\,\mu_{21}\,\varepsilon_{23}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{21})^{n-1}}{[2\,(a+n\,d)]^2}\right]. \qquad (8)$$

Si la charge e avait été placée dans le diélectrique fini K_2 (voir

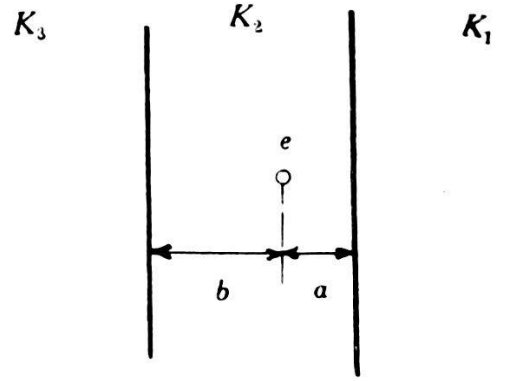

Fig. 6.

fig. 6), on aurait trouvé qu'en K_1 les potentiels sont dus aux images

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{e}{K_2}(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n\,\mu_{21} & \text{à} & x = -(a+2\,n\,d) \\ \text{et} & & \\ \dfrac{e}{K_2}\,\varepsilon_{23}\,\mu_{21}\,(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n & \text{à} & x = -(b+2\,n\,d) \end{array}\right\} n = 0, 1, 2 \cdots \infty$$

En K_3:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{e}{K_2}\,\varepsilon_{21}\,\mu_{23}\,(\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{21})^n & \text{à} & x = a + 2\,n\,d \\ \text{et} & & \\ \dfrac{e}{K_2}(\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{21})^n\,\mu_{23} & \text{à} & x = b + (2n-1)\,d \end{array}\right\} n = 0, 1, 2 \cdots \infty$$

Enfin, en K_2:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{e}{K_2}(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n & \text{à} & x = -(a+2\,n\,d) \\ \dfrac{e}{K_2}\,\varepsilon_{21}\,(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n & \text{à} & x = a + 2\,n\,d \\ \dfrac{e}{K_2}(\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{21})^{n+1} & \text{à} & x = b + (2\,n+1)\,d \\ \dfrac{e}{K_2}(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n\,\varepsilon_{23} & \text{à} & x = -[b+(2\,n+1)\,d] \end{array}\right\} n = 0, 1, 2 \cdots \infty.$$

La force agissant sur e devient donc (en comptant les forces dirigées suivant la direction positive des x comme positions):

$$F = \frac{e^2}{K^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n}{(2\,n\,d)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{21}\,(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n}{[2\,(a+n\,d)]^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{21})^{n+1}}{[2\,(n+1)\,d]^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{23}\,(\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23})^n}{[2\,(b+n\,d)]^2}\right].$$

6. Forces agissant sur une charge dans un diélectrique de constante diélectrique variable.

Les forces d'image à la limite entre deux diélectriques deviennent infinies. On ne peut donc calculer par exemple le potentiel de contact entre deux diélectriques. Il nous a semblé intéressant de calculer la force agissant sur une charge placée dans un diélectrique dont la constante varie (avec x seulement) de façon à tourner la difficulté introduite par la discontinuité. Supposons donc le diélectrique fait de couches minces d'épaisseur $d = \Delta x$. La constante diélectrique variera très peu d'une couche à l'autre et nous supposerons cette variation si petite que nous négligerons tous les termes qui contiennent cette différence à une puissance plus élevée que la première.

On trouve alors, après quelques calculs faciles, que les images non négligeables produisant un potentiel dans la région de la charge e (voir fig. 7):

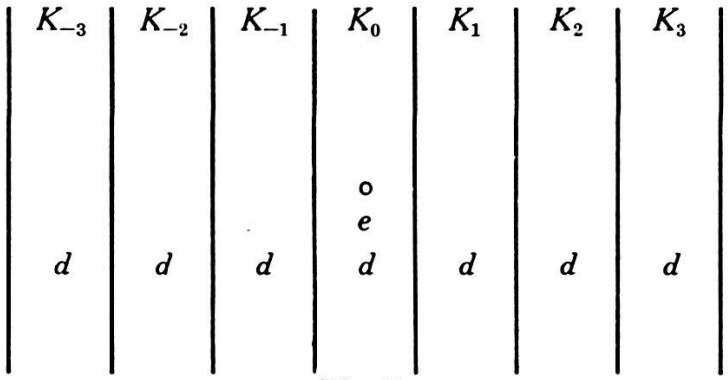

Fig. 7.

sont les suivantes:

distance de la charge e:	image:
Δx	$\frac{e}{K_0}\,\varepsilon_{01}$
$-\Delta x$	$\frac{e}{K_0}\,\varepsilon_{01-1}$

$$3\,\Delta x \qquad \frac{c}{K_0}\,\mu_{01}\,\varepsilon_{12}\,\mu_{01}$$

$$-3\,\Delta x \qquad \frac{c}{K_0}\,\mu_{0-1}\,\varepsilon_{-1-2}\,\mu_{-10}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(2n+1)\,\Delta x \qquad \frac{e}{K_0}\,\mu_{01}\,\mu_{12}\cdots\mu_{e\,n-2,\,2n-1}\,\varepsilon_{2n-1,\,2n}\,\mu_{2n-1,\,2n-2}\cdots\mu_{01}$$

et une expression semblable pour $x = -(2n+1)\,\Delta x$.

Les ε_{ij} et μ_{ij} ont les significations données au paragraphe 4, équation (6). La force agissant sur e sera donc:

$$F = \frac{e^2}{K_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{-n,\,-n(+1)}}{[(2n+1)\,\Delta x]^2}\prod_{i=0}^{n}\mu_{-i\,-(i+1)}\;\mu_{-(i+1)-i} - \right.$$

$$\left. -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n,\,n+1}}{[(2n+1)\,\Delta x]^2}\prod_{i=0}^{n}\mu_{i,\,i+1}\;\mu_{i+1,\,i}\right].$$

Mais, d'après la signification des μ_{ij} et le fait que la constante diélectrique varie très peu d'une couche à l'autre, les produits deviennent tous égaux à l'unité. D'autre part,

$$\varepsilon_{n,\,n+1} = -\frac{1}{2\,K(x)}\,\frac{dK}{dx}\,dx$$

et

$$F = \frac{e^2}{K_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\,K}\,\frac{1}{(2\,x)^2}\,\frac{dK}{dx}\,dx\,. \qquad (10)$$

On voit donc que tout se passe comme si les charges d'images étaient devenues une charge linéaire de densité:

$$\varrho\,(x) = \frac{e}{K_0}\,\frac{1}{8\,K(x)}\,\frac{dK}{dx}\,. \qquad (11)$$

Genève, Laboratoire de physique de l'Université.