Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **43 (1945)**

Heft 8

PDF erstellt am: **05.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-202950

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Par *A. Ansermet.*

Les calculs de compensation nécessitent de nombreux contrôles portant notamment sur l'expression $[pvv]$ qui doit être rendue minimum. Les v sont les résidus

$$l_i + v_i = f_i\,(xyz\ldots) \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

et les p les poids respectifs des quantités mesurées l_i. Il y a n observations, u inconnues $(xyz\ldots)$ et $n - u = r$ observations en excédent. Dans certains problèmes il est opportun d'éliminer les inconnues; les résidus v seuls subsistent dans un système de r équations.

Après compensation les expressions $(l_i + v_i)$ sont affectées de poids P_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ dont le calcul est souvent demandé. Un contrôle est donc utile; or une relation très simple existe entre les valeurs p_i et P_i:

la somme des quotients $p_i : P_i$ est égale au nombre des inconnues

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = u = n - r$$

Cette valeur est un extrêmum valable lorsqu'on applique le principe $[pvv] = \min$. La démonstration est aisée; considérons le système

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad (u = 3)$$

$$P_i = \text{poids de } (a_i x + b_i y + c_i z)$$

et appliquons les formules aux coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = a_i^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + b_i^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + 2\, a_i\, b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + \\ + 2 a_i\, c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2\, b_i\, c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]$$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = [paa] \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pab] \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pac] \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] \\ + [pab] \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbb] \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] \\ + [pac] \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pcc] \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 1 + 1 + 1 = u = 3$$

on peut aussi appliquer la forme sans coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = \frac{F_1^2}{[paa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} \cdots$$

où $\quad F_1 = a_i \qquad [F_2 \cdot 1] = b_i - \dfrac{[pab]}{[paa]}\, a_i \qquad$ etc. . . .

S'il s'agit d'observations conditionelles le calcul est analogue. Considérons le système

$$\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 \ldots + c_n v_n + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où $w_1\ w_2\ w_3 \ldots$ sont les discordances fonctions de $l_1\ l_2 \ldots l_n$. Le poids P_i de $(l_i + v_i)$ est donné par

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots.$$

où

$$\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right] = \frac{b_i}{p_i} - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\frac{a_i}{p_i} \qquad \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right] = \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]$$

$$\frac{p_i}{P_i} = 1 - p_i\frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i\frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - p_i\frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots.$$

et on vérifie sans peine que $\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n = n - 1 - 1 - 1 \ldots = n - r = u$

on peut aussi avoir recours aux cœfficients $Q_{11}\ Q_{12}\ Q_{13}\ Q_{22} \ldots$ qui sont à la base de la résolution indeterminée des équations normales (calcul des $K_1\ K_2\ K_3 \ldots$ en fonction de $w_1\ w_2\ w_3 \ldots$)

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{a_i}{p_i}L_1 - \frac{b_i}{p_i}L_2 - \frac{c_i}{p_i}L_3 \ldots. \qquad \text{([2] p. 62–66)}$$

ou

$$L_1 = \frac{a_i}{p_i}Q_{11} + \frac{b_i}{p_i}Q_{12} + \frac{c_i}{p_i}Q_{13} \ldots.$$

$$L_2 = \frac{a_i}{p_i}Q_{21} + \frac{b_i}{p_i}Q_{22} + \frac{c_i}{p_i}Q_{23} \ldots.$$

$$L_3 = \frac{a_i}{p_i}Q_{31} + \frac{b_i}{p_i}Q_{32} + \frac{c_i}{p_i}Q_{33} \ldots. \text{ d'où l'on déduit}$$

$$\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n =$$

$$= n - \left(\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{22} + \left[\frac{cc}{p}\right]Q_{33} + 2\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{12} + 2\left[\frac{ac}{p}\right]Q_{13} + 2\left[\frac{bc}{p}\right]Q_{23}\right)$$

pour $r = 3$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = n - r = u$$

Applications.

1° *Méthode des combinaisons binaires* (ou de Schreiber)

$$n = \frac{s(s-1)}{2} \qquad u = s - 1 \qquad r = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

(s visées mesurées)

$$p_i = 1 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Il faut distinguer, après compensation, les poids P_i au nombre de $(s-1)$ et P'_i au nombre de $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$

$$\left[\frac{1}{P_i}\right]_1^n = (s-1)\left(\frac{1}{P_i}\right) + \frac{(s-1)(s-2)}{2}\left(\frac{1}{P'_i}\right) = u = s - 1$$

relation verifiée pour $\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P'_i} = \frac{2}{s}$

2° *Nivellement.* Considérons le réseau compensé par M. Ad. Hunziker dans cette Revue (novembre 1944) comprenant 4 repères et 16 lignes ($u = 4$, $n = 16$):

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = 0.336; \quad \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = 0.347; \quad \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 0.273; \quad \left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = 0.257;$$

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = +0.075; \quad \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] = +0.016; \quad \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = +0.017; \quad \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] = +0.072;$$

$$\left[\frac{\beta\delta}{p}\right] = +0.078; \quad \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] = +0.096.$$

	$1 : P_i =$	p_i	$p_i : P_i =$
1	0.336	1.25	0.42
2	0.336	0.67	0.23
3	$0.336 + 0.347 - 2 \times 0.075 = 0.530$	0.67	0.35
4	0.336	0.53	0.18
5	0.347	0.62	0.22
6	0.347	0.36	0.13
7	$0.347 + 0.273 - 2 \times 0.072 = 0.476$	0.59	0.28
8	$0.347 + 0.257 - 2 \times 0.078 = 0.450$	0.72	0.32
9	0.347	0.33	0.12
10	0.273	0.67	0.18
11	0.273	0.62	0.17
12	0.273	1.00	0.27
13	$0.273 + 0.257 - 2 \times 0.096 = 0{,}338$	1.43	0.48
14	0.257	1.25	0.32
15	0.257	0.77	0.20
16	0.257	0.46	0.12
		$\left[p_i : P_i\right]_1^n$	$= 3.99$

(exactement 4.00)

La valeur moyenne du rapport $p_i : P_i = \frac{4}{16} = 0.25$. Ce quotient, dans les cas particulier, varie entre des limites relativement étendues et l'examen de ces résultats est intéressant (limites 0.12 et 0.48)

3⁰ *Compensation d'une station.* Considérons l'exemple traité par R. Helmert ([1], p. 159).

$v_1 = l_1$				$+ z$				poids	$= 9$		
$v_2 = l_2$						$+ t$		»	8		$n = 8$
$v_3 = l_3$				$- z$		$+ t$		»	7		$u = 4$
$v_4 = l_4$			$- y$			$+ t$		»	2		$r = 4 = n - u$
$v_5 = l_5$			$+ y$					»	2		
$v_6 = l_6$		$- x$		$+ z$				»	4		
$v_7 = l_7$		$+ x$						»	6		
$v_8 = l_8$		$- x$	$+ y$					»	2		

éliminons les 4 inconnues

$$
\begin{array}{lllllllll}
+ v_1 & - v_2 & + v_3 & & & & & & + w_1 = 0 \\
 & - v_2 & & + v_4 & + v_5 & & & & + w_2 = 0 \\
- v_1 & & & & & + v_6 & + v_7 & & + w_3 = 0 \\
 & & & & - v_5 & & + v_7 & + v_8 & + w_4 = 0
\end{array}
$$

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = 0.379, \quad \left[\frac{bb}{p}\right] = 1.125, \quad \left[\frac{cc}{p}\right] = 0.528, \quad \left[\frac{dd}{p}\right] = 1.167,$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = + 0.125, \quad \left[\frac{ac}{p}\right] = - 0.111, \quad \left[\frac{ad}{p}\right] = \left[\frac{bc}{p}\right] = 0, \quad \left[\frac{bd}{p}\right] = - 0.500,$$

$$\left[\frac{cd}{p}\right] = + 0.167, \quad \left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right] = 1.084, \quad \left[\frac{bc}{p} \cdot 1\right] = + 0.037,$$

$$\left[\frac{bd}{p} \cdot 1\right] = - 0.500, \quad \left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right] = 0.495, \quad \left[\frac{cd}{p} \cdot 2\right] = + 0.184,$$

$$\left[\frac{dd}{p} \cdot 2\right] = 0.936, \quad \left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right] = 0.868$$

$$p_i : P_i = 1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} - p_i \frac{\left[\frac{d_i}{p_i} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} \ldots$$

La valeur moyenne $p_i : P_i = 0.5$; les limites pour ce quotient sont ici 0.593 et 0.379. Ce sont encore les poids faibles qui sont amplifiés dans la proportion la plus forte. Les discordances w_1, w_2, w_3, w_4 ne jouent bien entendu aucun rôle dans ce calcul; leur valeur numérique ainsi que celle des termes absolues l_1, l_2 ... l_8 n'est donc pas donnée.

$i = 1$	$p_i : P_i$	$= 1$	$- 0.293$	$- 0.012$	$- 0.111$	$- 0.001$	$= 0.583$
2	»	$= 1$	$- 0.330$	$- 0.052$	$- 0.018$	$- 0.007$	$= 0.593$
3	»	$= 1$	$- 0.377$	$- 0.014$	$- 0.026$	$- 0.012$	$= 0.571$
4	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.130$	$= 0.408$
5	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.159$	$= 0.379$
6	»	$= 1$	0	0	$- 0.505$	$- 0.040$	$= 0.455$
7	»	$= 1$	0	0	$- 0.337$	$- 0.076$	$= 0.587$
8	»	$= 1$	0	0	0	$- 0.576$	$= 0.424$
sommes:		8	$- 1.000$	$- 1.000$	$- 0.999$	$- 1.001$	$= 4.000$
							$= u = n - r$

4⁰ *Méthode des secteurs* (Dr. H. Wild). Le contrôle des poids est ici très utile; désignons par p_s et p_i les poids respectifs des secteurs et des angles intermédiaires et par P_s et P_i les poids correspondants *après* compensation

$$\left[\frac{p_s}{P_s}\right] + \left[\frac{p_i}{P_i}\right] = u$$

Exemples: 3 secteurs, 6 angles intermédiaires (2 par secteur)

pour $p_s = p_i = 1$ on a

$$3 \times \frac{1}{P_s} + 6 \times \frac{1}{P_i} = 5 = u \qquad P_s = 2.25 \qquad P_i = \frac{18}{11}$$

4 secteurs, 8 angles intermédiaires (2 par secteur)

$$4 \times \frac{1}{P_s} + 8 \times \frac{1}{P_i} = 7 \qquad P_s = 2.00 \qquad P_i = \frac{8}{5}$$

Si on a recours à une compensation approchée le calcul est plus complexe car la détermination des poids présente une certaine ambiguité ([3] p. 124–129).

En *résumé* le contrôle $[p : P]$ des poids *avant* et *après* compensation peut rendre de réels services. La condition $[pvv] = \min$ entraîne $[p : P] = u$ et réciproquement.

Littérature

[1] R. Helmert, Ausgleichsrechnung.
[2] C. F. Baeschlin, Ausgleichsrechnung und Landesvermessung.
[3] Eggert-Jordan, Vermessungskunde I.
[4] Koll O., Methode der kl. Quadrate.
[5] Wellisch S., Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung.