Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 37 (1939)

Heft: 12

Artikel: Le théorème de Tissot et les lignes de déformation

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-197935

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

der Union nicht entsprochen hat, da die Übermittlung oft mehrere Monate gedauert hat, und

2. anzuregen, daß der Rat den « Service des Exchanges Internationaux » ersuchen möge, die prompte Übermittlung der Publikationen von Land zu Land und ihre unmittelbare Verteilung in den Empfangsländern zu gewährleisten.

Ich kann mich der Feststellung des Unionspräsidenten durchaus anschließen, daß der Kongreß einen vollen wissenschaftlichen Erfolg gehabt hat, trotz starker Reduktion der Delegationen. Den Organisatoren und den leitenden Männern sei wärmstens gedankt, daß sie den Mut aufgebracht haben, den Kongreß trotz des Krieges abzuhalten. Hoffen wir, daß die Union während des Krieges durchhalten kann und daß sie nach seiner Beendigung das ihre zur gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit und zur Versöhnung der Welt beitragen kann.

Am Nachmittag des 15. und des 16. September besichtigte ich noch Washington, wozu ich während des Kongresses, infolge ständiger Inanspruchnahme, nicht gekommen war. Washington ist eine sehr schöne Stadt. Die vielen Staatsgebäude sind meist in klassischem Stil gebaut. Im Gegensatz zu New York finden wir hier viele prächtige Pärke und große, breite Alleen.

Vom 17.–26. September weilte ich wieder in New York und führte dort die Besichtigung dieser Riesenstadt und ihrer engern und weitern Umgebung und der Weltausstellung weiter. Am 26. September, mittags, schiffte ich mich auf dem italienischen Dampfer „Conte di Savoia" ein. Nach sehr schöner Überfahrt langten wir am 5. Oktober vormittags, ohne Zwischenfall, in Genua an. Am Abend desselben Tages war ich wieder zu Hause. Im Rückblick auf die vielen neuen Eindrücke, die mir diese Reise nach den Vereinigten Staaten vermittelt hat, und auf den sehr interessanten Kongreß, bereue ich es nicht, daß ich die Reise unternommen habe, trotzdem es oft schwer war, ohne Nachrichten aus der Heimat die nötige Besinnlichkeit aufzubringen.

Le théorème de Tissot et les lignes de déformation.

Par *W. K. Bachmann*, géomètre off., Lausanne.

Le théorème de Tissot, relatif à la représentation d'une surface quelconque sur une autre, est passablement répandu. Ce théorème joue un rôle très important dans l'étude de toutes les projections non conformes; il est en effet à la base de l'étude des déformations linéaires, angulaires et superficielles. Sa démonstration est indiquée dans l'ouvrage „Die Netzentwürfe geographischer Karten" de Tissot (traduction allemande par E. Hammer). Quoique très simple, elle comporte cependant certains inconvénients. Je suis persuadé que ce théorème gagnerait beaucoup si l'on utilisait, non pas la démonstration de Tissot, mais une autre, basée d'une manière systématique sur la géométrie différentielle. Cette

dernière démonstration aura notamment les avantages suivants sur celle donnée par Tissot:

1° elle sera une simple application d'une théorie bien connue;

2° elle permettra la résolution de certains problèmes qui n'ont pas encore été envisagés jusqu'à présent et dont la solution ne peut être obtenue au moyen de la démonstration indiquée par Tissot.

1° Le théorème de Tissot.

Enoncé du théorème: Pour toute représentation ponctuelle, continue, non dégénérée et non conforme d'une surface quelconque sur une autre, il existe un réseau de courbes orthogonales et un seul sur l'une des surfaces tel que les courbes correspondantes sur l'autre surface forment également un réseau orthogonal.

Démonstration. Soit S une surface donnée sous forme paramétrique au moyen des relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Désignons les coordonnées de la seconde surface par $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Comme ces dernières seront des fonctions des paramètres u et v, la seconde surface $\bar{S}$ pourra être représentée par les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(u, v) \\ \bar{y} = \bar{y}(u, v) \\ \bar{z} = \bar{z}(u, v) \end{cases}$$

Les points homologues sur les deux surfaces sont ainsi caractérisés par les mêmes valeurs des paramètres u et v. Les lignes $u =$ constante et $v =$ constante constituent un système de coordonnées curvilignes sur chacune des deux surfaces. Pour simplifier les calculs, nous introduisons une représentation vectorielle des deux surfaces. L'équation de S peut s'écrire

$$(1') \qquad \vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

et celle de $\bar{S}$ devient

$$(2') \qquad \vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}(u, v).$$

L'équation vectorielle (1′) remplace donc les trois équations (1), tandis que (2′) remplace le système (2).

Nous introduisons en outre les désignations suivantes:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_1 \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_2 \qquad \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial u} = \vec{\bar{r}}_1 \qquad \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial v} = \vec{\bar{r}}_2$$

Considérons maintenant deux points P et $\bar{P}$, situés respectivement sur S et $\bar{S}$ et répondant aux valeurs u et v des paramètres. Donnons les accroissements du et dv aux paramètres; les accroissements correspondants des rayons vecteurs sont respectivement

$$d\vec{r} = \vec{r}_1 du + \vec{r}_2 dv \quad \text{et} \quad d\vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}_1 du + \vec{\bar{r}}_2 dv$$

En multipliant ces équations scalairement par $d\vec{r}$ et $d\vec{\bar{r}}$, et en posant $|d\vec{r}| = ds$, $|d\vec{\bar{r}}| = d\bar{s}$, nous obtenons

$$\begin{cases} ds^2 = \vec{r}_1^{\,2}\, du^2 + 2\,\vec{r}_1\vec{r}_2\, du\, dv + \vec{r}_2^{\,2}\, dv^2 \\ d\bar{s}^2 = \vec{\bar{r}}_1^{\,2}\, du^2 + 2\,\vec{\bar{r}}_1\vec{\bar{r}}_2\, du\, dv + \vec{\bar{r}}_2^{\,2}\, dv^2 \end{cases}$$

Introduisons en outre les désignations suivantes:

$$\vec{r}_1^{\,2} = E \qquad \vec{r}_1\vec{r}_2 = F \qquad \vec{r}_2^{\,2} = G \qquad \vec{\bar{r}}_1^{\,2} = \bar{E} \qquad \vec{\bar{r}}_1\vec{\bar{r}}_2 = \bar{F} \qquad \vec{\bar{r}}_2^{\,2} = \bar{G}$$

L'élément linéaire des surfaces S et $\bar{S}$ peut ainsi s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 \\ d\bar{s}^2 = \bar{E}\, du^2 + 2\, \bar{F}\, du\, dv + \bar{G}\, dv^2 \end{cases}$$

Ce sont les expressions bien connues de la première forme fondamentale.

Soient

$$\begin{cases} d\vec{r} = \vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv \\ \delta\vec{r} = \vec{r}_1\, \delta u + \vec{r}_2\, \delta v \end{cases}$$

deux déplacements infinitésimaux sur la surface S à partir du point $P(u,v)$. Déterminons l'angle α formé par ces deux directions. Nous avons

$$d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = dr \cdot \delta r \cdot \cos\alpha$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v}{dr\, \delta r}$$

L'angle α est droit si l'on a

$$(4) \qquad E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + \delta u\, dv) + G\, dv\, \delta v = 0$$

La condition d'orthogonalité pour les deux déplacements correspondants sur la surface $\bar{S}$ à partir du point $\bar{P}\,(u, v)$ est de même

$$(4') \qquad \bar{E}\, du\, \delta u + \bar{F}\,(du\, \delta v + \delta u\, dv) + \bar{G}\, dv\, \delta v = 0$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'orthogonalité des deux déplacements sur les deux surfaces est par conséquent l'existence simultanée des deux relations (4) et (4'). Posons

$$\frac{dv}{du} = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = \lambda_2$$

Les équations (4) et (4') deviennent après division par $du\, \delta u$

$$(5) \qquad \begin{cases} E + F\,(\lambda_1 + \lambda_2) + G\,\lambda_1\lambda_2 = 0 \\ \bar{E} + \bar{F}\,(\lambda_1 + \lambda_2) + \bar{G}\,\lambda_1\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Nous voyons que λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation du second ordre

$$(F\bar{G} - G\bar{F})\,\lambda^2 - (\bar{E}G - E\bar{G})\,\lambda + (E\bar{F} - F\bar{E}) = 0$$

En posant $\lambda = \frac{dv}{du}$, cette dernière prend la forme suivante

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} dv^2 & -dv\,du & du^2 \\ E & F & G \\ \overline{E} & \overline{F} & \overline{G} \end{vmatrix} = 0$$

Nous avons alors trois cas à considérer:

a) L'équation (6) peut avoir une racine double. On montre facilement que ce cas ne peut se présenter pour les surfaces réelles à paramètres réels; par conséquent nous l'excluons ici.

b) L'équation (6) peut avoir une infinité de racines. Il en est ainsi si l'on a identiquement

$$\frac{E}{\overline{E}} = \frac{F}{\overline{F}} = \frac{G}{\overline{G}}$$

Dans ce cas, il existe en tout point de S une infinité de directions orthogonales jouissant de la propriété demandée. On montre facilement que la projection est alors conforme; on a en effet

$$m = \frac{d\overline{s}}{ds} = \kappa\,(u, v)$$

La déformation linéaire est par conséquent une fonction de u et de v seulement; elle est indépendante du rapport $\frac{dv}{du}$ ce qui est la caractéristique des projections conformes.

c) L'équation (6) peut avoir deux racines distinctes. C'est ce dernier cas qui fait précisément l'objet du théorème de Tissot, et nous voyons que sa démonstration est tout simplement donnée par l'établissement de la relation (6). Dans les conditions énoncées au début, l'équation (6) a en effet toujours deux racines distinctes ce qui démontre le théorème.

2° L'ellipse indicatrice de Tissot.

En utilisant les résultats obtenus, nous arrivons facilement à la notion de l'ellipse indicatrice. Dans ce qui suit, nous considérerons des projections non conformes, jouissant des propriétés indiquées plus haut. Pour simplifier les calculs, nous choisissons un système particulier de coordonnées curvilignes. Supposons que l'on ait pris pour lignes de coordonnées les deux réseaux orthogonaux qui se correspondent sur les deux surfaces. On a dans ce cas $F = \overline{F} = 0$. Considérons maintenant les plans tangents aux deux surfaces aux points $P\,(u, v)$ et $\overline{P}\,(u, v)$. Donnons les accroissements du et dv aux paramètres. Les accroissements correspondants des rayons vecteurs sont respectivement

$$d\vec{r} = \vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv \qquad d\vec{\overline{r}} = \vec{\overline{r}}_1\,du + \vec{\overline{r}}_2\,dv \text{ (voir fig. 1)}$$

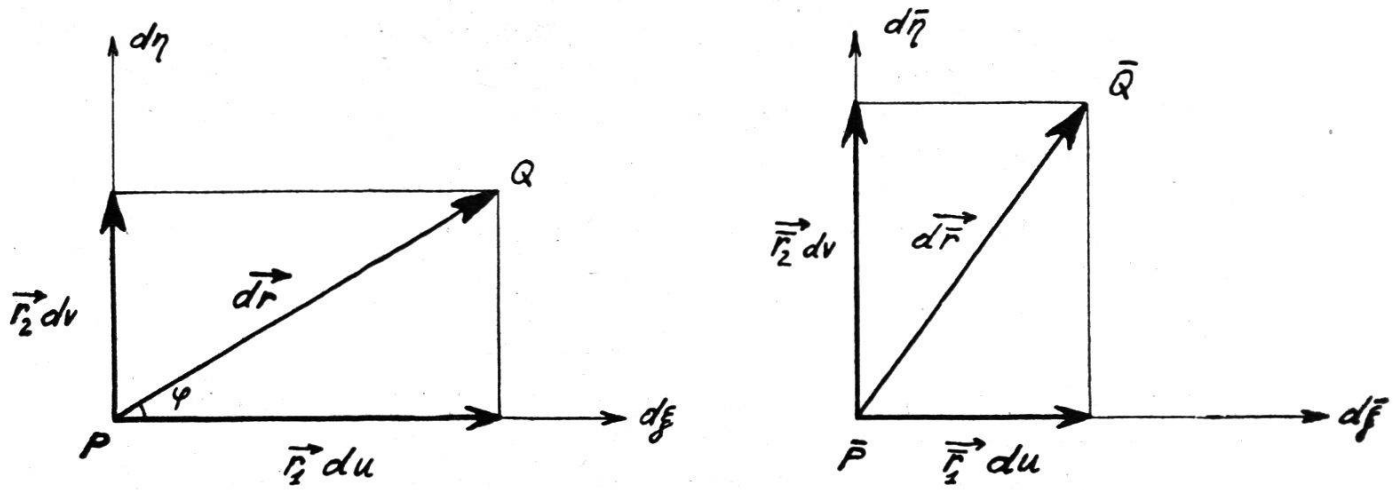

Fig. 1.

Supposons que le point Q décrive dans le plan tangent un cercle de rayon $ds = |d\vec{r}|$ ayant le point $P\,(u, v)$ pour centre et cherchons le lieu du point correspondant $\bar{Q}$ dans le plan tangent en $\bar{P}\,(u, v)$ à la surface $\bar{S}$. Nous avons d'une part

$$\begin{cases} d\xi = \sqrt{E}\,du = ds \cdot \cos\varphi \\ d\eta = \sqrt{G}\,dv = ds \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} du = \dfrac{ds \cdot \cos\varphi}{\sqrt{E}} \\ dv = \dfrac{ds \cdot \sin\varphi}{\sqrt{G}} \end{cases}$$

et d'autre part

$$\begin{cases} d\bar{\xi} = \sqrt{\bar{E}}\,du = \sqrt{\dfrac{\bar{E}}{E}}\; ds \cdot \cos\varphi \\ d\bar{\eta} = \sqrt{\bar{G}}\,dv = \sqrt{\dfrac{\bar{G}}{G}}\; ds \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

d'où en éliminant le paramètre φ

$$\frac{d\bar{\xi}^2}{\dfrac{\bar{E}}{E}} + \frac{d\bar{\eta}^2}{\dfrac{\bar{G}}{G}} = ds^2 \tag{7}$$

Comme les cœfficients E, $\bar{E}$, G et $\bar{G}$ sont essentiellement positifs, on voit que le point $\bar{Q}$ décrit une ellipse ayant pour axes

$$2\sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} \qquad \text{et} \qquad 2\sqrt{\frac{\bar{G}}{G}}$$

Nous remarquons en outre que les axes de cette ellipse coïncident avec les axes de coordonnées, ce qui résulte du choix particulier des coordonnées curvilignes. Cette ellipse se nomme «indicatrice de Tissot». Il est alors très simple de tirer toutes les propriétés relatives aux déformations angulaires, linéaires et superficielles des formules que nous

venons d'établir. Etant donné que *tous les résultats* indiqués par Tissot s'obtiennent ainsi sans aucune difficulté, je m'abstiens de les indiquer ici et je me bornerai dans ce qui suit à étudier certaines propriétés relatives aux déformations linéaires.

En utilisant le système de coordonnées curvilignes particulier que nous avons adopté, nous obtenons l'expression suivante pour la déformation linéaire:

$$m^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2} \tag{8}$$

Cette expression montre que la déformation linéaire est maximum ou minimum le long des lignes de coordonnées u = constante et v = constante. Ce fait résulte du reste immédiatement de la considération de l'indicatrice. Ainsi, les lignes de coordonnées jouent dans le cas considéré un rôle tout à fait particulier, en ce sens qu'elles sont, en tout point de la surface, tangentes aux axes de l'indicatrice. Nous appellerons par la suite les lignes jouissant de cette dernière propriété des *lignes de déformation.* Remarquons qu'il existe une grande analogie entre les lignes de déformation et les lignes de courbure d'une surface. Nous sommes ainsi amenés à déterminer les lignes de déformation pour une projection quelconque de deux surfaces arbitrairement données. N'oublions pas que nous avions adopté précédemment un système particulier de coordonnées curvilignes, et que c'est seulement grâce à ce fait-là que les lignes de coordonnées coïncidaient avec les lignes de déformation. Pour des raisons de calcul, il ne sera en général pas indiqué de choisir ce système particulier de coordonnées curvilignes. On choisira de préférence les lignes de coordonnées de telle sorte que les formules de transformation deviennent aussi simples que possible, et on déterminera ensuite les lignes de déformation par le procédé que nous indiquerons ci-après.

Toutes les questions relatives aux lignes de déformation n'ont jamais été envisagées jusqu'à présent et elles constituent, par conséquent, un problème de genre nouveau.

3° Généralités sur les lignes de déformation.

Nous supposons dans ce qui suit que l'on ait choisi sur chacune des surfaces S et $\bar{S}$ un système de coordonnées curvilignes absolument arbitraire et nous admettons que la projection de S sur $\bar{S}$ soit donnée par les relations (1) et (2). Cela étant, nous nous proposons de déterminer les lignes de déformation pour la projection ainsi définie. En introduisant les désignations précédentes, les éléments linéaires des deux surfaces sont donnés par les relations (3). En supposant que l'on projette la surface S sur la surface $\bar{S}$, la déformation linéaire est donnée par

$$m^2 = \frac{\bar{E}\,du^2 + 2\,\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} \tag{9}$$

Déterminons maintenant le rapport $\frac{dv}{du}$ pour lequel cette expression devient maximum ou minimum.

Nous obtenons

$$(10) \qquad m^2 = \frac{\overline{E}\,du + \overline{F}\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{\overline{F}\,du + \overline{G}\,dv}{F\,du + G\,dv}$$

d'où les deux équations

$$(11) \qquad \begin{cases} (\overline{E} - m^2 E)\,du + (\overline{F} - m^2 F)\,dv = 0 \\ (\overline{F} - m^2 F)\,du + (\overline{G} - m^2 G)\,dv = 0 \end{cases}$$

En éliminant du et dv entre les équations 11, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \overline{E} - m^2 E & \overline{F} - m^2 F \\ \overline{F} - m^2 F & \overline{G} - m^2 G \end{vmatrix} = 0$$

d'où en développant

$$(12) \qquad m^4 (EG - F^2) - m^2 (E\overline{G} - 2\,F\overline{F} + \overline{E}G) + (\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2) = 0$$

L'équation (12) nous fournit les deux valeurs m_1^2 et m_2^2 correspondant respectivement au maximum et au minimum de la déformation au point envisagé, c'est-à-dire que (12) permet la détermination des axes de l'indicatrice. Les directions de ces axes sont données par

$$\frac{\overline{E}\,du + \overline{F}\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{\overline{F}\,du + \overline{G}\,dv}{F\,du + G\,dv}$$

ou bien

$$(13) \qquad \boxed{(\overline{F}G - F\overline{G})\,dv^2 + (\overline{E}G - E\overline{G})\,du\,dv + (\overline{E}F - E\overline{F})\,du^2 = 0}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre et du second degré. Par intégration, nous trouvons les deux familles de courbes de déformation.

On vérifie aisément que (13) représente effectivement un réseau de courbes orthogonales sur chacune des deux surfaces. Considérons par exemple la surface S; la condition d'orthogonalité est

$$(14) \qquad E + F\left(\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + G\,\frac{dv}{du}\,\frac{\delta v}{\delta u} = 0$$

et les racines de l'équation (13) vérifient précisément l'équation (14). Pour la surface $\overline{S}$, la démonstration reste exactement la même à condition que l'on remplace E, F, G par $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ respectivement.

Pour une meilleure compréhension de la théorie précédente, nous allons considérer quelques applications simples.

4° Applications.

Considérons la projection de la sphère sur le plan au moyen des relations

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \varphi \\ y = \lambda \end{cases}$$

où φ et λ désignent, comme d'habitude, la longitude et la latitude sur la sphère. Cette projection est connue sous le nom de « cartes plates ». Les lignes φ = constante et λ = constante forment sur la sphère le système des méridiens et des parallèles, donc un réseau orthogonal. Le réseau correspondant dans le plan est également orthogonal. D'après ce qui précède, nous voyons que les lignes x = constante et y = constante sont les lignes de déformation pour la projection considérée.

Si nous considérons, au lieu de la transformation (15), la suivante

$$(16) \qquad \begin{cases} x = f_1(\varphi) \\ y = f_2(\lambda) \end{cases}$$

où f_1 et f_2 représentent deux fonctions arbitraires des variables φ et λ respectivement, nous constatons immédiatement que les lignes x = constante et y = constante sont encore les lignes de déformation.

Comme second exemple, nous considérons une projection quelconque de la sphère sur le plan, définie par les formules

$$(17) \qquad \begin{cases} x = x(\varphi, \lambda) \\ y = y(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

L'élément linéaire de la sphère est donné par $ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi \cdot d\lambda^2$

d'où $\quad E = 1 \quad F = 0 \quad G = \cos^2\varphi \quad EG - F^2 = \cos^2\varphi$

et l'élément linéaire du plan est

$$d\bar{s}^2 = (x_\varphi^2 + y_\varphi^2)\, d\varphi^2 + 2\,(x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda)\, d\varphi\, d\lambda + (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)\, d\lambda^2$$

d'où

$$\bar{E} = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 \qquad \bar{F} = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda \qquad \bar{G} = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$$

L'équation (13) devient dans ce cas

$$(18) \quad (x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda) \cos^2\varphi \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 +$$

$$+ \left[(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)\cos^2\varphi - (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)\right] \frac{d\lambda}{d\varphi} - (x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda) = 0$$

Nous utiliserons cette dernière relation ultérieurement.

5° Détermination des projections ayant des lignes de déformation données.

Dans cette partie, nous nous proposons de résoudre le problème suivant:

Soient S et $\bar{S}$ deux surfaces données et C un réseau de courbes orthogonales sur l'une d'elles. Déterminer toutes les projections de S sur $\bar{S}$ telles que les courbes données soient des lignes de déformation.

Avant d'aborder le problème général, nous allons considérer un cas particulier; nous étudierons la projection de la sphère sur le plan. Comme précédemment, nous nous donnons la projection au moyen des relations

(17) où les fonctions $x(\varphi, \lambda)$ et $y(\varphi, \lambda)$ restent pour le moment indéterminées. Le réseau de courbes est défini au moyen de l'équation

$$P(\varphi, \lambda)\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 - Q(\varphi, \lambda)\frac{d\lambda}{d\varphi} + R(\varphi, \lambda) = 0 \tag{19}$$

Ce réseau ne sera cependant formé de courbes orthogonales que si les cœfficients P, Q et R satisfont à une certaine relation que nous allons établir. La condition d'orthogonalité pour deux déplacements sur la sphère est en effet donnée par la relation (4) où nous avons $E = 1$, $F = 0$ et $G = \cos^2\varphi$; cette condition devient par conséquent

$$d\varphi\,\delta\varphi + \cos^2\varphi \cdot d\lambda\,\delta\lambda = 0 \tag{20}$$

L'équation (19) nous donne

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 - \frac{Q}{P}\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right) + \frac{R}{P} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\lambda}{d\varphi}\frac{\delta\lambda}{\delta\varphi} = \frac{R}{P}$$

En introduisant cette valeur dans (20), nous obtenons

$$P + R\cos^2\varphi = 0 \tag{21}$$

Cette dernière condition est nécessaire et suffisante. En tenant compte de (21), l'équation (19) peut s'écrire

$$\cos^2\varphi \cdot R \cdot \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + Q\frac{d\lambda}{d\varphi} - R = 0 \tag{22}$$

D'autre part, nous avons vu que le réseau des lignes de déformation est donné par l'équation (18). Etant donné que les équations (18) et (22) doivent représenter les mêmes courbes, nous devons avoir

$$\boxed{\frac{x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda}{R} = \frac{\cos^2\varphi \cdot (x_\varphi^2 + y_\varphi^2) - (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}{Q}} \tag{23}$$

Si les fonctions $x(\varphi, \lambda)$ et $y(\varphi, \lambda)$ satisfont à la relation (23), les lignes de déformation coïncident bien avec les lignes du réseau proposé. Il s'agit donc de savoir déterminer ces fonctions pour que (23) soit toujours vérifiée. Nous constatons immédiatement que le problème est encore indéterminé; nous pouvons en effet disposer de l'une quelconque de ces deux fonctions et l'équation (23) nous fournit alors une équation aux dérivées partielles permettant la détermination de l'autre fonction. Nous tirerons plus loin des conséquences de cette indétermination; pour le moment, nous nous contentons de montrer que l'on peut toujours trouver une infinité de fonctions satisfaisantes aux conditions du problème. Supposons par exemple que l'on ait choisi la fonction $x = x(\varphi, \lambda)$; l'équation (23) devient alors une équation aux dérivées partielles en y. Soit $y = y(\varphi, \lambda, a, b)$ l'intégrale complète de cette équation. En prenant $b = b(a)$ et en cherchant ensuite l'enveloppe de la famille de surfaces ainsi définie, nous obtenons l'intégrale générale qui dépendra d'une fonction arbitraire de φ et de λ. On peut alors profiter de ces fonctions arbitraires pour introduire certaines conditions initiales. Considérons maintenant une application simple.

Déterminons toutes les projections de la sphère sur le plan telles que les méridiens et les parallèles soient des lignes de déformation. Nous avons déjà vu que les cartes plates jouissent de cette propriété et nous allons naturellement les retrouver comme cas particulier. L'équation (22) devient dans ce cas

(24) $$d\varphi\, d\lambda = 0$$

et l'équation (23) donne la condition

(25) $$\boxed{x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0}$$

Nous apercevons immédiatement les solutions

$$\begin{cases} x = x(\varphi) \\ y = y(\lambda) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\varphi) \end{cases}$$

L'équation (25) peut cependant encore être vérifiée par d'autres fonctions. Pour fixer les idées, nous prenons par exemple

$$x = a\varphi + b\lambda + c_0$$

où a, b et c_0 sont des constantes. Nous nous proposons de déterminer y dans ces conditions. Dans le but d'obtenir les notations propres à la théorie des équations aux dérivées partielles, nous posons

$y_\varphi = p \qquad y_\lambda = q \qquad$ L'équation (25) devient $pq + ab = 0$

Les caractéristiques sont données par

$$\frac{d\varphi}{q} = \frac{d\lambda}{p} = \frac{dy}{2\,pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

ce qui nous donne les intégrales premières

$$p = K_1 \quad \text{et}$$
$$q = K_2$$

Intégrons donc le système

$$\begin{cases} pq = -ab \\ p = K \end{cases}$$

Ces deux équations sont, comme on le sait, en involution. Nous avons

$$dy = K d\varphi - \frac{ab}{K}\, d\lambda \qquad \text{d'où}$$

$$y = K\varphi - \frac{ab}{K}\,\lambda + c_1$$

Le système des deux équations

$$\begin{cases} x = a\varphi + b\lambda + c_0 \\ y = K\varphi - \dfrac{ab}{K}\,\lambda + c_1 \end{cases}$$

constitue donc une solution du problème proposé. Remarquons que les constantes c_0 et c_1 jouent un rôle secondaire, étant donné qu'elles correspondent à une translation des axes de coordonnées dans le plan. Le système précédent contient ainsi trois constantes essentielles. Le résultat

obtenu se vérifie immédiatement en cherchant les lignes de déformation de la projection ainsi définie.

Considérons maintenant le cas général. Donnons-nous les deux surfaces S et $\overline{S}$, et sur S un réseau de courbes orthogonales défini au moyen de la relation

$$Pdv^2 + Qdudv + Rdu^2 = 0 \tag{26}$$

Déterminons maintenant les projections admettant ces lignes comme courbes de déformation. Nous savons que les lignes de déformation satisfont toujours à l'équation (13). Etant donné que les équations (13) et (26) doivent représenter les mêmes courbes, nous devons avoir

$$\boxed{\frac{P}{\overline{F}G - \overline{G}F} = \frac{Q}{\overline{E}G - E\overline{G}} = \frac{R}{\overline{E}F - E\overline{F}}} \tag{27}$$

Ces relations doivent avoir lieu identiquement. Remarquons qu'elles expriment implicitement l'orthogonalité du réseau choisi. Si nous disposons par contre des cœfficients P, Q et R de telle sorte que le réseau soit formé de courbes orthogonales, nous n'aboutirons alors qu'à une seule équation (27) comme dans le cas de la projection de la sphère sur le plan que nous avons considéré plus haut. Nous constatons que le problème est de nouveau indéterminé et que nous pouvons encore trouver une infinité de projections satisfaisant aux conditions imposées. Il est clair que les conditions initiales que nous pouvons alors introduire pour déterminer complètement le problème, peuvent être de diverses natures. Nous pouvons par exemple demander que la projection fasse correspondre, à une ligne choisie sur la surface S, une ligne arbitrairement donnée sur la surface S; nous pouvons de même imposer que l'indicatrice prenne en un point donné une forme donnée d'avance, ou que la déformation le long d'une ligne soit une fonction donnée d'avance.

Les quelques exemples qui précèdent nous montrent que la théorie des lignes de déformation peut donner lieu à des applications très intéressantes. En utilisant les théories relatives aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, il sera facile d'aboutir à quelques théorèmes très intéressants, que je veux traiter plus tard.

Considerazioni pratiche sulla restituzione stereofotogrammetrica; sua azione fisiologica.

Mi sia permesso raccogliere alcune osservazioni e deduzioni, frutto di una pratica forse non molto lunga, ma intensa, nel campo della stereofotogrammetria.

Chi scrive ha avuto occasione di partecipare alla vita di parecchi studi privati di stereofotogrammetria di diverse Nazioni, e di collaborare come istruttore a due Corsi di Fotogrammetria tenuti al Politecnico di Zurigo.