

# 5. Stokes formula

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

and similarly with  $X$  replaced by  $U$  and  $X_\alpha$  replaced by  $U \cap X_\alpha$ . Using this and the exact sequence 4.2 we get that

$$\lim_{\rightarrow} D_c^c(X_\alpha, U \cap X_\alpha; \mathbf{C}) = D_c^c(X, U; \mathbf{C})$$

from which the result follows by passing to homology. Q.E.D.

Let us also notice that in case  $X$  is the disjoint union of a family  $(X_\alpha)$  of open subsets we have that

$$(4.9) \quad \bigoplus_{\alpha} H_c^c(X_\alpha, U \cap X_\alpha; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H_c^c(X, U; \mathbf{C}).$$

## 5. STOKES FORMULA

Let us consider the open subset  $U$  of the  $n$ -dimensional smooth manifold  $X$  and the resulting exact sequences

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_p^c(X, \mathbf{C}) & \rightarrow & H_p^c(X, U; \mathbf{C}) & \xrightarrow{b} & H_{p-1}^c(U, \mathbf{C}) & \xrightarrow{j_*} & H_{p-1}^c(X, \mathbf{C}) & \rightarrow \\ \leftarrow & H^p(X, \mathbf{C}) & \leftarrow & H^p(X, U; \mathbf{C}) & \xleftarrow{\partial} & H^{p-1}(U, \mathbf{C}) & \xleftarrow{j^*} & H^{p-1}(X, \mathbf{C}) & \leftarrow \end{array}$$

where the first is discussed in the previous section and the second is the sheaf cohomology sequence. The relative term in the second sequence is often written

$$(5.2) \quad H_Z^p(X, \mathbf{C}) = H^p(X, U; \mathbf{C}), \quad Z = X - U.$$

We can now extend the biduality theorem (2.1).

(5.3) **THEOREM.** *The cohomology sequence above is dual to the homology sequence. In particular we have a Stoke's formula*

$$\langle b\alpha, \omega \rangle = \langle \alpha, \partial\omega \rangle$$

for  $\alpha \in H_p^c(X, U; \mathbf{C})$  and  $\omega \in H^{p-1}(U, \mathbf{C})$ .

*Proof.* The first sequence arises from the following short exact sequence of complexes, compare (4.2) and (4.7),

$$0 \rightarrow \Gamma_c(U, \Omega^{\bullet \vee}) \xrightarrow{j_*} \Gamma_c(X, \Omega^{\bullet \vee}) \rightarrow \Gamma_c(Z, \Omega^{\bullet \vee}) \rightarrow 0.$$

In order to calculate the second sequence we depart from the flabby resolution  $\Omega^{\bullet \vee \vee}$  of  $\mathbf{R}$  established in the proof of the biduality theorem (2.1).

The basic philosophy being that flabby sheaves are acyclic for local cohomology, [5] II. 9.3. Thus we can calculate the cohomology sequence (5.1) from the short exact sequence

$$0 \leftarrow \Gamma(U, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \xleftarrow{j^*} \Gamma(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \leftarrow \Gamma_Z(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \leftarrow 0.$$

According to formula (2.4) we may identify the arrow marked  $j^*$  with the linear dual of the arrow marked  $j_*$ . Simple evaluation according to (2.4) will be written

$$\langle T, l \rangle, \quad T \in \Gamma_c(X, \Omega^{\bullet \vee}), \quad l \in \Gamma(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}).$$

This notation is compatible with the symbol introduced in section 1 taking the biduality morphism (2.6) into account. We leave the remaining details with the reader. Q.E.D.

## 6. POINCARÉ DUALITY

Let  $X$  be a  $n$ -dimensional *oriented* smooth manifold. A compactly supported  $(n-p)$ -form  $\alpha$  on  $X$  defines a compact  $p$ -chain  $P\alpha$  given by

$$(6.1) \quad \langle P\alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta, \quad \beta \in \Gamma(X, \Omega^p).$$

(6.2) **THEOREM.** *For a smooth oriented  $n$ -dimensional manifold  $X$ , the transformation  $P$  induces an isomorphism*

$$P: H_c^{n-p}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_p^c(X, \mathbb{C}), \quad p \in \mathbb{N},$$

*from de Rham cohomology with compact support to de Rham homology.*

*Proof.* The following diagram is commutative

$$(6.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_c(X, \Omega^{n-p}) & \xrightarrow{P} & D_p^c(X, \mathbb{C}) \\ \downarrow (-1)^n d & & \downarrow (-1)^{p-1} b \\ \Gamma_c(X, \Omega^{n-p+1}) & \xrightarrow{P} & D_{p-1}^c(X, \mathbb{C}) \end{array}$$

as it follows from the relation

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{n-p} \alpha \wedge d\beta, \quad \alpha \in \Gamma_c(X, \Omega^{n-p}), \beta \in \Gamma(X, \Omega^p),$$