§4. The homotopy fibre of the plus construction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 4. The homotopy fibre of the plus construction

(4.1) Theorem. *Let $u : AX \to X$ be the fibre of $X \to X^+$ for a CW-space X. Then for any map $f : W \to X$ from an acyclic CW-space W into X, there is a map $f' : W \to AX$ with $uf' \simeq f$ and f is unique up to homotopy.*

Proof. We have the following diagram where the lower row is a fibre sequence.

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\
\Omega(X^+) \arrow[r] & AX \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "\theta"] & X^+
\end{tikzcd}$$

Since $\pi_1(W)$ is perfect and $\pi_1(X^+)$ contains no nonzero perfect subgroups, $\pi_1(\theta f)$ is zero and by (3.2) the map θf is null homotopic. Then there is a map $f' : W \to AX$ with $uf' \simeq f$. Two factorizations f' of f differ by the action of a map $W \to \Omega(X^+)$. Since again $\pi_1(W)$ is perfect and $\pi_1(\Omega(X^+))$ abelian, π_1 of this map is zero so by (3.2) the map is null homotopic. Hence f' is unique, and this proves the theorem.

(4.2) *Remark.* Dror introduced the map $AX \to X$ having the universal property given in the previous theorem and proved for each CW-space X the map $AX \to X$ existed. He used a Posnikov tower construction starting with the covering of X corresponding to the maximal perfect normal subgroup of $\pi_1(X)$. By (2.5) we see that we can recover $X \to X^+$ as the cofibre of $AX \to X$.

All the properties of AX listed in [D1, Theorem 2.1] can be shown using the fact that AX is the fibre of $X \to X^+$. For instance we will in (5.4) give a sharper version of [D1, Theorem 2.1 (iv)].

(4.3) *Remark.* The Posnikov tower construction for $AX \to X$, when done in the category of simplicial sets, is functorial for maps of simplicial sets. For CW-spaces we obtain a functorial $AX \to X$ for maps using the geometric realization of simplicial sets. Since we can choose $X \to X_N^+$ to be the cofibre of $A(\tilde{X}_N) \to X$, we obtain a sharper version of the functoriality in (3.7) and (3.8), namely on the level of spaces and maps.

(4.4) *Remark.* The group $\tilde{N} = \pi_1(A\tilde{X}_N)$ is a central extension of N (see the appendix) and, as $A\tilde{X}_N$ is acyclic, satisfies $H_1(\tilde{N}) = H_2(\tilde{N}) = 0$. Therefore $\tilde{N}$ is the universal central extension of N (see [K2]), namely one has the exact sequence $0 \to H_2(N) \to \tilde{N} \to N \to 1$. Therefore, if $f : X \to X'$ is a map such that $\pi_1(f)$ sends the perfect normal subgroup N of $\pi_1(X)$ isomorphically onto a normal subgroup N' of $\pi_1(X')$, then the induced map $Af : A\tilde{X}_N \to A\tilde{X}'_{N'}$ induces an isomorphism on the fundamental groups.

§ 5. k-SIMPLE ACYCLIC MAPS

In this section we study acyclic maps having simplicity properties. The first proposition generalizes some results of Dror [D1, Lemma 3.4].

(5.1) PROPOSITION. *Let $f : X \to Y$ be a map of path connected spaces with $\pi_1(f)$ an isomorphism, and let N be a perfect normal subgroup of $\pi_1(X) = \pi$. If f induces an isomorphism $H_*(X, \mathbf{Z}[\pi/N]) \xrightarrow{\sim} H_*(Y, \mathbf{Z}[\pi/N])$ and an isomorphism $\pi_i(X) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y)$ for $i \leqq k-1$, then*

(1) *$\pi_k(f) : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ is an epimorphism when N acts trivially on $\pi_k(Y)$, and*

(2) *$\pi_k(f) : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ is an isomorphism when N acts trivially on $\pi_k(X)$ and $\pi_k(Y)$.*

Proof. Let $F \to \tilde{X}_N$ be the homotopy fibre of the covering map $\tilde{f} : \tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$. By hypothesis it follows easily that $\tilde{f}$ induces an isomorphism on integral homology and on $\pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ for $i \leqq k-1$. From the Serre spectral sequence we have $H_0(\tilde{Y}_N, H_{k-1}(F)) = H_0(N, H_{k-1}(F)) = 0$. Since $H_{k-1}(F) = \pi_{k-1}(F)$ is a quotient of $\pi_k(Y)$ on which the perfect group N acts trivially, it follows that $\pi_{k-1}(F) = 0$, which proves (1).

Under the hypothesis of (2) we have $\pi_i(F) = 0$ for $i < k$ and $H_0(\tilde{Y}_N, H_k(F)) = H_0(N, \pi_k(F)) = 0$. Since N acts trivially on $\pi_k(X)$ the induced morphism $\pi_k(F) \to \pi_k(X)$ must be trivial, which proves the proposition.

The following lemma, proved in [D2, Lemma 2.6], follows easily from the homology exact sequence.