6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

par $L\mathbf{s} = t\mathbf{e}_1$ (un tel vecteur existe puisque la matrice de L est régulière). On obtient

$$\Phi(t\mathbf{e}_1)\,\Phi\big(t\mathbf{e}_1 + u(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\big) = \Phi(t\mathbf{e}_1 + u\mathbf{a}_1)\,\Phi(t\mathbf{e}_1 - u\mathbf{a}_2)\,,$$

c'est-à-dire, grâce à (5.5) et (5.3),

$$\begin{aligned}(5.6) \qquad & \varphi_1(t)\,\varphi_1(t) \prod_{i=2}^{n} \varphi_i\big(u(a_{1i} - a_{2i})\big) \\ & = \varphi_1(t+u) \prod_{i=2}^{n} \varphi_i(ua_{1i})\,\varphi_1(t-u) \prod_{i=2}^{n} \varphi_i(-ua_{2i})\,.\end{aligned}$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_i\big(u(a_{1i} - a_{2i})\big) \neq 0$ pour tout i, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(5.7) \qquad \big(\varphi_1(t)\big)^2 = \varphi_1(t+u)\,\varphi_1(t - u\,\theta(u)\,.$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Dans l'étude des équations fonctionnelles des paragraphes précédents, nous nous étions systématiquement bornés à rechercher les solutions dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. Nous nous proposons maintenant d'étudier ces mêmes équations (ou des équations analogues) dans l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues définies dans $\mathbf{R}$.

Nous commencerons par l'équation fonctionnelle

$$(6.1) \qquad \big(f(t)\,|f(u)|\big)^2 = f(t+u)\,f(t-u)\,,$$

qui se réduit manifestement à l'équation (3.2) dans le cas où f est une fonction caractéristique.

(6.2) Théorème. *Soit* f *une application continue de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, *telle que* $f(0) = 1$.

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f *vérifie la relation* (6.1) *pour tout couple* t, u *de nombres réels ;*

(b) *il existe deux nombres réels* a, b *tels que l'on ait*

$$f(t) = \exp(at^2 + ibt)$$

pour tout nombre réel t.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

(6.3) LEMME. *Soit* H *une partie fermée de* $\mathbf{R}$ *possédant les propriétés suivantes :*

(a) 0 *appartient à* H;

(b) *si* t *appartient à* H, *alors* $-t$ *appartient à* H;

(c) $2t$ *appartient à* H *si et seulement si* t *appartient à* H;

(d) *si* $t+u$, $t-u$ *appartiennent à* H, *alors* t *appartient à* H.

Dans ces conditions on a, soit $H = \{0\}$, *soit* $H = \mathbf{R}$.

Démonstration du Lemme. Supposons que l'ensemble H possède un élément t_0 non nul. D'après (b), on pourra supposer t_0 positif. En vertu de (b) et de (c), il suffira de montrer que H contient l'intervalle $[0, t_0]$. Or il résulte de (c) que H contient tout nombre de la forme $t_0/2^n$ avec $n \geqq 0$. La propriété (d) entraîne alors que H contient aussi tout nombre de la forme $kt_0/2^n$ avec $0 \leqq k \leqq 2^n$. Puisque H est fermé, il contient l'intervalle $[0, t_0]$, ce qui achève la démonstration du Lemme.

Démonstration du théorème. Il suffit de démontrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons donc la propriété (a) vérifiée.

1) Plaçons-nous d'abord dans le cas où la fonction f est réelle et *positive.* La relation (6.1) devient alors

$$(f(t)f(u))^2 = f(t+u)f(t-u).$$

Puisque f est continue et non nulle à l'origine, il existe un nombre réel t_0 non nul tel que l'on ait $f(t_0) > 0$. Désignons par a la constante réelle déterminée par la condition $f(t_0) = \exp(at_0^2)$, et posons, pour tout nombre réel t,

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp(at^2)}.$$

On a alors $g(0) = 1, g(t_0) = 1$; en outre la fonction g vérifie la même équation fonctionnelle que f:

$$(g(t)g(u))^2 = g(t+u)g(t-u).$$

En particulier:

$$(g(u))^2 = g(u)\,g(-u)\,,$$
$$(g(t))^4 = g(2t)\,.$$

Il en résulte que l'ensemble fermé $H = \{t : g(t) = 1\}$ vérifie les hypothèses du Lemme (6.3).Comme d'autre part H contient le nombre réel non nul t_0, il coïncide avec **R**, ce qui revient à dire que l'on a $f(t) = \exp(at^2)$ pour tout t.

2) Supposons ensuite $|f| = 1$. L'équation (6.1) devient alors

$$(f(t))^2 = f(t+u)f(t-u)\,. \tag{6.4}$$

Puisque la fonction f est continue et qu'elle prend la valeur 1 à l'origine, il existe un intervalle ouvert I, centré à l'origine, dans lequel f ne prend jamais la valeur -1. Pour tout élément t de cet intervalle, désignons par $\theta(t)$ la détermination principale de l'argument de $f(t)$. La fonction θ est alors continue, nulle à l'origine et vérifie l'équation $2\,\theta(t) = \theta(t+u) + \theta(t-u)$ pour tout couple t, u de nombres réels tels que $t+u$ et $t-u$ appartiennent à I.

En d'autres termes, θ est une fonction linéaire affine: il existe donc une constante réelle b telle que l'on ait $\theta(t) = bt$ (c'est-à-dire $f(t) = \exp(ibt)$) pour tout élément t de I. Si l'on pose

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp\,(ibt)}\,,$$

la fonction g vérifie, elle aussi, l'équation (6.4), donc en particulier l'équation $(g(t))^2 = g(2t)$. Puisque d'autre part elle est identiquement égale à 1 sur I, il en résulte qu'elle est égale à 1 partout. En d'autres termes, on a

$$f(t) = \exp\,(ibt)\,.$$

3) Plaçons-nous enfin dans le cas général. Puisque f vérifie l'équation fonctionnelle (6.1), il en est de même de la fonction réelle positive $|f|$. Celle-ci a donc (d'après 1)) la forme:

$$|f(t)| = \exp\,(at^2)\,.$$

On peut alors considérer le rapport $f/|f|$; c'est une fonction de module égal à 1, vérifiant la même équation fonctionnelle que f. Par conséquent on a, d'après 2),

$$\frac{f(t)}{|f(t)|} = \exp(ibt).$$

Les deux dernières relations montrent que f a la forme désirée.

Remarque. De façon plus générale, on peut montrer que, si f est une application continue de **R** dans **C** vérifiant l'équation fonctionnelle (6.1) (mais non assujettie à la condition $f(0) = 1$), alors f est, soit identiquement nulle, soit de la forme

$$f(t) = \exp(at^2 + ibt + ic), \tag{6.5}$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

En effet, si l'on suppose $f(0) = 0$, l'équation (6.1) (pour $t = u$) montre que f est identiquement nulle. Supposons donc $f(0) \neq 0$. La même équation (pour $t = u = 0$) fournit alors $|f(0)| = 1$. Par conséquent la fonction $f/f(0)$ vérifie encore l'équation fonctionnelle (6.1); puisqu'elle prend la valeur 1 à l'origine, le théorème précédent entraîne qu'elle est de la forme $\exp(at^2 + ibt)$. Si donc on pose $f(0) = \exp(ic)$, on obtient

$$f(t) = f(0)\exp(at^2 + ibt) = \exp(at^2 + ibt + ic).$$

On remarquera qu'inversement la fonction (6.5) vérifie l'équation fonctionnelle (6.1) quelles que soient les constantes réelles a, b, c; cependant elle n'est une fonction caractéristique que dans le cas où la constante a est négative et la constante c est un multiple entier de 2π.

Occupons-nous à présent des deux autres équations fonctionnelles rencontrées au paragraphe 1, à savoir

$$\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c, \tag{6.6}$$

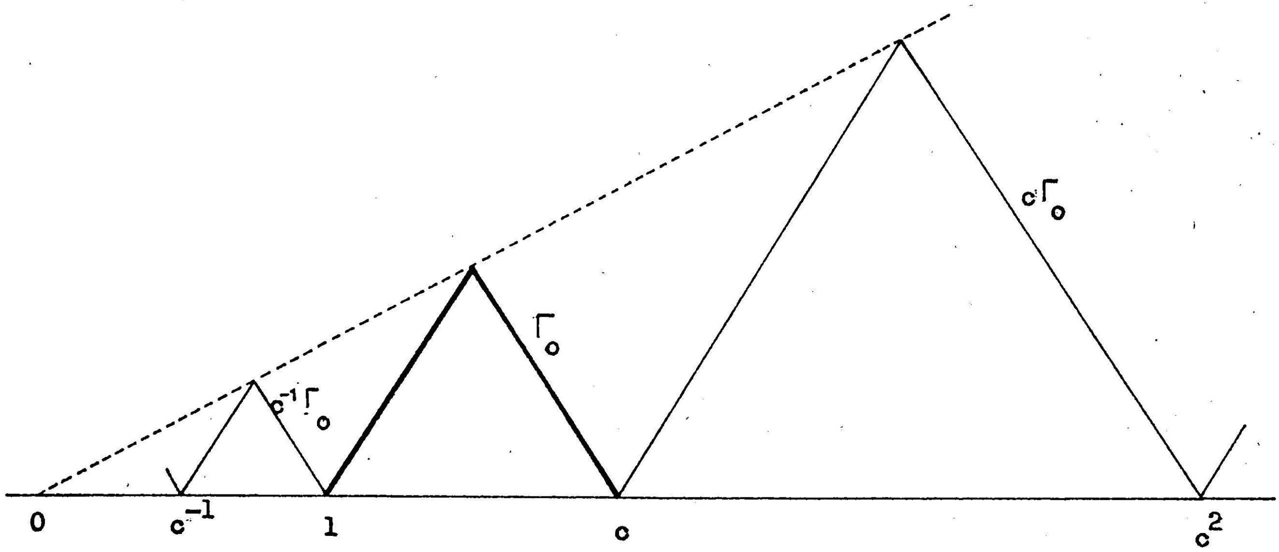
$$\varphi(t) = (\varphi(t/c))^c, \tag{6.7}$$

où c est une constante réelle, avec $c > 1$.

Dans chacune de ces deux équations la fonction inconnue φ sera supposée réelle, paire et strictement positive sur **R**. En considérant la fonction $f(t) = \operatorname{Log}\varphi(\sqrt{|t|})$ (resp. $f(t) = \operatorname{Log}\varphi(t)$), l'équation (6.6) (resp. (6.7)) se réduit à

$$f(t) = cf(t/c). \tag{6.8}$$

Dans cette dernière équation la fonction inconnue f est réelle, paire, nulle à l'origine: il suffit donc de s'intéresser à sa restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$. Or, si l'on désigne par Γ le graphe de cette restriction, l'équation (6.8) exprime le fait que Γ est invariant par rapport à l'homothétie de centre 0 et de rapport c, c'est-à-dire que l'on a $c\,\Gamma = \Gamma$. Pour avoir une solution, il suffit donc de se donner un graphe *arbitraire* Γ_0 sur l'intervalle $]1, c]$ et de poser ensuite $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} c^n \Gamma_0$. La figure ci-dessous fournit un exemple.[1])



Il est évident qu'en choisissant convenablement Γ_0, on peut obtenir des solutions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et tendant vers 0 à l'origine.

On peut d'ailleurs remarquer que chacune des équations (6.6), (6.7), (6.8) est de la forme $f = h \circ f \circ g^{-1}$ (où f est la fonction inconnue). Le résultat précédent est alors un cas particulier de la proposition suivante:

(6.9) Proposition. *Soient T, U deux ensembles, g une bijection de T sur lui-même, h une bijection de U sur lui-même. Considérons l'équation fonctionnelle*

$$f = h \circ f \circ g^{-1}, \tag{6.10}$$

où la fonction inconnue f est une application de T dans U.

Supposons qu'il existe une partie T_0 de T telle que $(g^n(T_0))_{n \in \mathbf{Z}}$ constitue une partition de T. Dans ces conditions, pour toute application f_0 de T_0 dans U, il existe une application unique f de T dans U qui prolonge f_0 et qui vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

Démonstration. Unicité. Soit f une solution de (6.10). On a alors, pour tout entier n,

$$f = h^n \circ f \circ g^{-n}$$

En particulier, si f prolonge f_0, on a, pour tout élément t de $g^n(T_0)$,

---

[1]) L'idée de cette construction nous a été suggérée par Ph. Artzner.

$$f(t) = h^n[f_0(g^{-n}(t))] .$$

Puisque $(g^n(T_0))_{n\in Z}$ est une partition de T, la formule précédente détermine univoquement f sur l'ensemble T tout entier.

Existence. Désignons par Γ_0 le graphe de f_0 et par H la bijection de $T \times U$ sur lui-même définie par $H(t, u) = (g(t), h(u))$. L'ensemble

$$\Gamma = \bigcup_{n\in Z} H^n(\Gamma_0)$$

est alors le graphe d'une application f de T dans U. Puisque Γ contient Γ_0, f prolonge f_0. On a en outre $H(\Gamma) = \Gamma$, et cette relation montre que f vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN, S. N. On a property characterizing the Gaussian Law. *Tr. Leningrad Politechn. Inst., 3* (1941), pp. 3-20.

[2] DARMOIS, G. Sur une propriété caractéristique de la loi de probabilité de Laplace. *C. R. Acad. Sc. Paris, 232* (1951), 1999-2000.

[3] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II, Wiley (1966).

[4] HENNEQUIN, P. L. et A. TORTRAT. *Théorie des probabilités et quelques applications.* Masson et Cie (1965).

[5] LUKACS, *Stochastic convergence.* Second edition, Academic Press (1975).

[6] SKITOVITCH, V. P. Linear forms in independent random variables and the normal distribution law. *Izvestia AN SSSR, Ser. Mat., 18* (1954), pp. 185-200.

(Reçu le 26 août 1977)

Aimé Fuchs
Giorgio Letta

Université de Strasbourg
Département de Mathématique
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg