L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE $x(x+1) = ky(y+1)$

Autor(en): **Barry, Abou-Dardaye**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-50370

L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE

$x(x + 1) = ky(y + 1)$

par Abou-Dardaye BARRY

I. INTRODUCTION

S. Thouvenot a résolu ici [6], aux notations près, l'équation diophantienne

(1) $$x(x+1) = ky(y+1) \quad (k = 1, 2, \text{ etc.}),$$

pour $k = 2$, ce que faisait Whitworth, dès 1900 [2]. D'ailleurs, Dickson, rendant compte d'un résultat dû à Boutin (1895), note dans sa célèbre Histoire [2], que (1) possède une infinité de solutions dans **N**, si k n'est pas un carré, mais seulement un nombre fini de solutions, si $k = k'^2$; en particulier $k' = 2(2h + 1)$ entraîne $x = 4h(h + 1)$, $y = h$. D'autre part, Schinzel a établi que (1) n'est vérifiée dans **N** que par la solution triviale $x = y = 0$, si $k = p^{2n}$ (p premier et n entier positif) [7].

Dans cet article, nous faisons retour sur (1), pour en déterminer *toutes* les solutions, quel que soit k, grâce aux équations de Pell-Fermat généralisées

(2) $$p^2 - kq^2 = m,$$

où m dépend de k. Dans une autre partie, nous donnerons un traitement spécial de la question, lorsque k est carré. Ce que nous résumerons par le résultat qui suit.

II. THÉORÈME. *La résolution dans* **N** *de l'équation diophantienne* (1) *peut se ramener à celle de l'équation de Pell-Fermat généralisée* (2), *où* $m \in D(k)$, *ensemble des diviseurs du facteur libre de tout carré* $(\neq 1)$ *de* $k(k-1)$.

Deux cas sont possibles :

1°) k *non carré*

Si (2) *possède des solutions entières (en nombre nécessairement infini) pour un* $m \in D(k)$, *alors toutes les solutions entières correspondantes de* (1) *sont contenues dans les formules*

(3) $$x = kq(q+p)/m\,, \quad y = q(kq+p)/m\,,$$

ou

(3′) $$x = p(kq-p)/m\,, \quad y = q(kq-p)/m\,.$$

2°) $k = k'^2$

Si $k = 1$, (1) *est trivialement satisfaite dans* **N** *par* $x = y$.

Si $k \neq 1$, (1) *a un nombre fini de solutions dans* **N**, *déterminées par* (2), (3) *ou* (3′), *ou encore, de façon équivalente et à une permutation près de* α *et* β,

(4) $$x = \alpha a - 1 \text{ ou } \beta b, \quad y = (c-1)/2\,,$$

où

$$\alpha\beta = k = k'^2, \ \alpha a - \beta b = 1 \text{ et } 4ab + 1 = c^2 \ (c \text{ entier impair}).$$

Inversement, étant donné des entiers naturels x, y *quelconques, définis par* (2), (3) *ou* (3′), *ou encore* (4), *l équation* (1) *est satisfaite pour ces éléments de* **N**.

Preuve. Partons du résultat élémentaire suivant, qui date de Diophante au moins [4]: *8 fois un nombre triangulaire augmenté de* 1 *est un carré.* En effet

(5) $$8 \cdot x(x+1)/2 + 1 = (2x+1)^2\,.$$

Ceci posé, mettons (1) sous la forme équivalente

$$8 \cdot x(x+1)/2 + 1 = 4ky(y+1) + 1\,,$$

ou, par (5),

(6) $$(2x+1)^2 = (2ky+1)^2 - k(k-1)(2y)^2\,.$$

Pour $k = 1$, (6) implique $x = y$, donc (1) est trivialement satisfaite dans **N**. *Inversément,* si $x = y \neq 0$ (l'hypothèse $x = 0$, ou $y = 0$ étant sans intérêt, puisque, quel que soit k, $x = 0$ équivaut à $y = 0$), il est évident que $k = 1$.

Supposons donc désormais $k \neq 1$

Dans ce cas, la décomposition en facteurs premiers de $k(k-1)$ permet de poser

(7) $$k(k-1) = h^2 mn\,,$$

les facteurs carrés de $k(k-1)$ étant regroupés dans h^2, et mn libre de tout carré *(square-free)*, ce qui implique en particulier $(m, n) = 1$.

Tout le problème se ramène alors à la résolution dans **N** de l'équation diophantienne

$$(8) \qquad (2ky+1)^2 - mn(2hy)^2 = (2x+1)^2 .$$

Pour cela, nous envisagerons deux cas:

1) *mn pair*

Il est alors nécessaire et suffisant de poser [3]:

$$2ky + 1 + 2hy\sqrt{mn} = \lambda(r\sqrt{m} \pm qh\sqrt{n})^2 ,$$

ou, y étant positif,

$$(9) \qquad 2ky + 1 = \lambda(mr^2 + nq^2h^2) , \quad y = \lambda rq ,$$

où r et q sont des entiers positifs tels que $(r, qh) = 1$ et λ un entier positif quelconque.

Mais λ, qui doit diviser à la fois y et $2ky + 1$, est nécessairement égal à 1. Donc, (9) équivaut à

$$(10) \qquad mr^2 - 2kqr + nq^2h^2 - 1 = 0 .$$

Par suite, r de (10) sera un entier positif si et seulement s'il existe un entier positif, p, premier avec q, tel que

$$k^2q^2 - m(nq^2h^2 - 1) = p^2 ,$$

i.e.

$$(k^2 - h^2mn)q^2 + m = p^2 ,$$

ou, compte tenu de (7), la relation annoncée

$$(2) \qquad p^2 - kq^2 = m .$$

2) *mn impair*

Il s'ensuit aussitôt que m et n sont tous deux impairs. D'autre part, (8) est réalisée dans ce cas dans **N** si et seulement si [3]:

$$2ky + 1 + 2hy\sqrt{mn} = (1/2)\lambda(r\sqrt{m} + qh\sqrt{n})^2 ,$$

c'est-à-dire

$$(11) \qquad 2ky + 1 = (1/2)\lambda(mr^2 + nq^2h^2) , \qquad y = (1/2)\lambda rq ,$$

où r et q sont des entiers positifs vérifiant $(r, qh) = 1$, et λ un entier positif quelconque.

Mais, comme m et n sont impairs, il résulte de (7) que h est pair. En outre, r est impair, puisque $(r, qh) = 1$, et il en est donc de même de $mr^2 + nq^2 h^2$. Par suite, il est nécessaire de supposer λ pair. En effectuant ainsi la substitution $\lambda \mapsto 2\lambda$ dans (11), et en posant $\lambda = 1$ (ce qui est nécessaire, comme précédemment), l'on est ramené au cas mn pair.

Occupons-nous à présent de résoudre effectivement (1) en entiers positifs. Tout d'abord, de (10) l'on tire

$$r = (kq \pm p) / m \,. \tag{12}$$

De plus, si l'on substitue dans (8) les égalités (9), avec $\lambda = 1$, il vient, compte tenu de (2),

$$(1 + 2kq(q \pm p)/m)^2 = (2x+1)^2 \,. \tag{8'}$$

Ainsi, (8′), (9) (avec $\lambda = 1$) et la forme

$$r = (kq + p) / m \tag{12'}$$

de (12) donnent

$$x = kq(q+p) / m \,, \quad y = q(kq+p) / m \,. \tag{13}$$

Comme, d'autre part, $q < p$ (sinon (2) serait impossible), (8′), (9) (où $\lambda = 1$) et

$$r = (kq - p) / m \tag{12''}$$

conduisent à la seconde classe de solutions

$$x = p(kq - p) / m \,, \qquad y = q(kq - p) / m \,. \tag{13'}$$

(Il va de soi que $kq - p > 0$, sinon nous aurions, ou $kq - p = 0$, ce qui est évidemment impossible, ou $m > k(k-1)$, ce qui n'est pas non plus.)

Pour préciser les résultats ainsi obtenus, il est nécessaire d'étudier de plus près (2). Les deux cas suivants y suffiront.

1) *k non carré*

Si $m = 1$, (2) n'est autre que l'équation de Pell-Fermat [5]. Elle admet une infinité de solutions dans **N**, et il en est donc de même de (1), dont les solutions sont définies par (13) ou (13′).

Si $m \neq 1$, (2) n'a en général pas de solutions dans **N**, comme le montre la théorie des corps quadratiques [8], ou celles des fractions continues [5].

Il reste maintenant à examiner si (13) et (13′) définissent effectivement des nombres entiers.

Observons tout d'abord que r, donné par (12′) et (12″), est un *entier*. Et comme, d'autre part, (13) et (13′) peuvent s'écrire respectivement

$$x = kqr - \frac{k(k-1)}{m} q^2 , \; y = qr \quad \text{et} \quad x = pr , \; y = qr ,$$

il est évident que x et y sont entiers, puisque m divise $k(k-1)$, par définition.

2) k *carré*

Posons $k = k'^2$.

Si $m = 1$, (2) admet pour toute solution entière $p = 1$, $q = 0$, et il en résulte $x = y = 0$.

Si $m \neq 1$, les solutions de (2) sont à chercher dans Q^+. En effet, pour $m = m_1 m_2$ ($m_2 < m_1$, par exemple et m_1, m_2 entiers), l'équation (2) se réduit au système

$$p + k'q = m_1 , \; p - k'q = m_2 ,$$

et nous en tirons

$$(S) \qquad p = (m_1 + m_2)/2 , \; q = (m_1 - m_2)/2k' .$$

Mais (S) définit en règle générale p et q dans Q^+. (Exemple : $k' = 6$, $m = 5$, $m_1 = 5$, $m_2 = 1$ donnent de (S) la forme $p = 3$, $q = 1/3$.) Donc le nombre de solutions de (1) est au plus égal au nombre de factorisations de m en deux facteurs, i.e. fini. Par exemple, comme $k' = 6$ et $m = 5$ entraînent $p = 3$, $q = 1/3$, il vient, par (13), $x = 8$, $y = 1$, solution que l'on retrouve, pour $m = 7$, si l'on utilise (13′).

Nous pouvons, cependant, résoudre (1) entièrement dans $\mathbf{N}$, sans le relais des rationnels. En effet, posons

$$(14) \qquad k = k'^2 = \alpha\beta .$$

Alors, à une permutation près de α et β, nous pouvons supposer que α et β divisent respectivement $x + 1$ et x, ou

$$(15) \qquad x + 1 = \alpha a , \; x = \beta b ,$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad \alpha a - \beta b = 1 ,$$

où a et b sont des entiers positifs (premiers entre eux) à déterminer, et α et β des *carrés*, puisqu'ils sont premiers entre eux et que leur produit est un carré.

Avec ces transformations, (1) se réduit à

$$ab = y(y+1),$$

donc

(17) $$4ab + 1 = (2y+1)^2,$$

ce qui définira un y de **N** si et seulement si $4ab + 1$ est un carré, i.e. s'il existe un entier impair positif c tel que

(18) $$4ab + 1 = c^2.$$

De (17) et (18), l'on déduit alors

(19) $$y = (c-1)/2.$$

Ainsi se trouve résolue, entièrement dans **N**, l'équation (1), lorsque k est un carré.

Cette même méthode permet d'ailleurs, de montrer que *le nombre de solutions de* (1) *est fini, lorsque* $k = k'^2 \neq 1$.

En effet, la résolution de l'équation diophantienne (16) donne

(20) $$a = \beta t + a_0, \; b = \alpha t + b_0 \quad (t \in \mathbf{N}),$$

où

(21) $$\alpha a_0 - \beta b_0 = 1,$$

et

$$a_0 < \beta, \; b_0 < \alpha\,[1].$$

D'autre part, compte tenu de (20), (18) devient, par des transformations élémentaires,

(22) $$(2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0)^2 + \alpha\beta(4a_0 b_0 + 1) - (\alpha a_0 + \beta b_0)^2 = \alpha\beta c^2.$$

Or, l'élévation au carré de (21) ramène (22) à

(23) $$(2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0)^2 + \alpha\beta - 1 = u^2,$$

où $u^2 = \alpha\beta c^2$ ($\alpha\beta$ étant un carré.)

Dès lors, la factorisation $\alpha\beta - 1 = \alpha_1 \beta_1$, où α_1 et β_1 sont de même parité et vérifient, par exemple, $\beta_1 < \alpha_1$, réduit (23) au système

$$u + (2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0) = \alpha_1 \,, \quad u - (2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0) = \beta_1 \,.$$

Il en résulte

$$2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0 = (\alpha_1 - \beta_1)\,/\,2 \,. \tag{24}$$

Or, les couples (α_1, β_1) étant en nombre fini, il en est de même des entiers t de (24). Donc, le nombre de solutions de (1) est bien fini, lorsque $k = k'^2$. Celles-ci, qui doivent correspondre aux $t \geqslant 0$, sont définies, compte tenu de (15), (18) et (19), par

$$x = \alpha a - 1 \text{ ou } \beta b \,, \ y = h \,, \tag{25}$$

où

$$ab = h(h+1) \,. \tag{26}$$

Dans les applications numériques, on utilisera successivement (20), (24), (26) et (25).

Inversement, supposons donnés des entiers positifs x, y vérifiant (13), où p et q sont définis par (2). Alors, (1) est satisfaite dans **N**.

En effet, si $k \neq 1$ (le problème étant trivial dans l'hypothèse contraire), (2) implique

$$k^2 q^2 + mk + p^2 = kq^2 + kp^2 + m \,.$$

D'où, en multipliant les deux membres de cette égalité par q et en leur ajoutant ensuite $2kq^2p + mp$, nous tirons

$$(q+p)\big(kq\,(q+p)+m\big) = (kq+p)\big(q\,(kq+p)+m\big) \,.$$

Mais ce résultat n'est autre que (1), puisque, par (13),

$$kq\,(q+p)\,/\,m = x \,, \ q\,(kq+p)\,/\,m = y \,.$$

Le problème se résout tout aussi simplement, si nous partons de (13′).

Et si maintenant x et y sont définis par (25), il est évident que $x\,(x+1) = \alpha\beta\, ab$, et (1) résulte alors de (26) et (14).

Ainsi, notre théorème est entièrement établi.

Il ne nous reste plus qu'à dire un mot sur les applications numériques.

III. Applications numériques

Le calcul effectif des solutions entières de (1) présente peu d'intérêt, quel que soit k donné. On observera, cependant, que pour $k = 2$ et $k = 3$, par exemple, une seule équation (2) fournit toutes les solutions de (1), alors qu'il en faut deux pour $k = 5$. Ce qui pose la question du nombre d'équations (2) nécessaire pour résoudre complètement (1), lorsque k n'est pas un carré.

D'autre part, pour $k = k'^2$, on peut trouver des paramétrisations des solutions de (1), analogues à celle que nous avons rappelée dans l'*Introduction*, à savoir

$$(27) \qquad k' = (4h+1)(4h+3)\,, \quad x = h(4h+3)(2h+1)^2\,, \quad y = h\,,$$

et

$$(28) \qquad k' = 4(2h+1)(8h^2+8h+1)\,, x = 16h(h+1)^2\,, \quad y = h\,.$$

Pour montrer (27), il suffit de poser dans (21)

$$(29) \qquad \alpha = \alpha'^2\,, \ \beta = (\alpha'+2)^2\,, \ b_0 = h\,, \ a_0 = h+1\,,$$

et il vient $\alpha' = 4h + 1$. Nous déduisons alors (27) de (14), (29), (26) et (25).

D'autre part, en posant dans (21),

$$(30) \qquad \alpha = (2\alpha'+1)^2\,, \ \beta = (4\beta')^2\,, \ a_0 = 1\,, \ b_0 = h(h+1)\,,$$

il vient

$$(31) \qquad \alpha'(\alpha'+1) = (2\beta')^2\, h(h+1)\,.$$

Or, d'après l'*Introduction*, (31) peut être résolue par

$$(32) \qquad \alpha' = 4h(h+1)\,, \ \beta' = 2h+1\,.$$

Les formules (28) résultent alors de (14), (30), (32), (26) et (25).

La méthode que nous venons d'exposer s'applique évidemment à tout k' congru à zéro modulo un entier quelconque. Elle peut aussi servir à résoudre (1), lorsque k n'est pas un carré.

Nous avons également noté qu'il nous suffisait d'une seule équation de Pell-Fermat, pour décrire entièrement les solutions de (1), lorsqu'en particulier $k = 2$. Il en a fallu deux à Thouvenot [6]. Mais, que l'on emprunte une voie ou une autre, l'essentiel est bien d'arriver à Rome, ou à ... Conakry!

BIBLIOGRAPHIE

[1] USPENSKY, J. V. and M. A. HEASLET. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, New York and London, 1939, p. 59.

[2] DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, vol. II. Chelsea, New York, 1971 (reprint) pp. 679-682.

[3] —— *Introduction to the Theory of Numbers*. Dover, New York, 1957, pp. 40-42.

[4] HEATH, L. *Diophantus of Alexandrie*, second (1910) edition. Dover, New York, 1964, pp. 125-127.

[5] PERRON O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Band I. Teubner, Stuttgart, 1954.

[6] THOUVENOT, S. Résolution en nombres entiers de l'équation diophantienne n (n+I) = 2 n' (n'+I). *Ens. Math. 16* (1970), pp. 203-215.

[7] SIERPINSKI, W. *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*. Hachette, Paris, 1972, p. 38 et p. 118

[8] ADAMS, Williams W. and Larry J. GOLDSTEIN. *Introduction to Number Theory*. Prentice-Hall, London, 1976, pp. 209-248.

(Reçu le 4 décembre 1978)

Abou-Dardaye Barry

B.P. 3547
Libreville (Gabon)

Publications de l'Enseignement Mathématique

Oeuvres scientifiques de Henri Lebesgue

Vol. 1. *Introduction. Intégration et dérivation.* 340 pages, 1972.
Vol. 2. *Intégration et dérivation (suite).* 444 pages, 1972.
Vol. 3. *Représentation des fonctions.* 406 pages, 1972.
Vol. 4. *Structure et aire des surfaces. Fonctions harmoniques. Analysis situs. Géométrie différentielle et analytique.* 392 pages, 1973.
Vol. 5. *Géométrie algébrique et élémentaire. Pédagogie. Analyses et notices.* 432 pages, 1973.

Prix: 60 Fr. suisses le volume relié, 275 Fr. suisses pour les cinq volumes.

Monographies

2. H. HADWIGER et H. DEBRUNNER, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*; 25 Fr. suisses.
3. J.-E. HOFMANN, *Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-Mathematik*; 20 Fr. suisses.
4. H. LEBESGUE, *Notices d'histoire des mathématiques*; 20 Fr. suisses.
5. J. BRACONNIER, *L'analyse harmonique dans les groupes abéliens*; 10 Fr. suisses.
15. K. KURATOWSKI, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*; 56 Fr. suisses, relié. (La vente de ce volume en France, Suisse, Canada, Belgique, Espagne et Amérique du Sud est assurée, en exclusivité, par les éditions Dunod.)
16. LEVY, MANDELBROJT, MALGRANGE, MALLIAVIN, *La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard*; 15 Fr. suisses.
* 18. L. HÖRMANDER, *On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations*; 69 pages, 14 Fr. suisses.
* 19. W. M. SCHMIDT, *Approximation to algebraic numbers*; 70 pages, 16 Fr. suisses.
* 20. J. L. LIONS, *Sur le contrôle optimal de systèmes distribués*; 45 pages, 15 Fr. suisses.
* 21. F. HIRZEBRUCH, *Hilbert modular surfaces*; 103 pages, 28 Fr. suisses.
22. A. WEIL, *Essais historiques sur la théorie des nombres*; 56 pages, 18 Fr. suisses.
23. J. GUENOT et R. NARASIMHAN, *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*; 214 pages, 44 Fr. suisses.
* 24. DAVID MUMFORD, *Stability of projective varieties*; 76 pages, 25 Fr. suisses.
* 25. A. G. VITUSHKIN, *On representation of functions by means of superpositions and related topics*; 68 pages, 23 Fr. suisses.
26. TOPOLOGY AND ALGEBRA, *Proceedings of a Colloquium in Honour of B. Eckmann*, Edited by M.-A. Knus, G. Mislin and U. Stammbach; 280 pages, 75 Fr. suisses.
27. CONTRIBUTIONS TO ANALYSIS, *Papers communicated to a Symposium in Honour of A. Pfluger;* 106 pages, 29 Fr. suisses.

* Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale.

Un escompte de 20% est accordé aux commandes payées d'avance et adressées à

L'Enseignement Mathématique, Case postale 124
CH-1211 GENÈVE 24 (Suisse)
(Compte de chèques postaux 12-12042)