

# SOMMES DE BICARRÉS DANS $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ET $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{1}]$

Autor(en): **Revoy, Ph.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-50381>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SOMMES DE BICARRÉS DANS $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ ET $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{1}]$

par Ph. REVOY

La résolution du problème de Waring pour  $N$  est fondée sur des identités algébriques, dont la première est celle de Liouville pour les bicarrés:  $6(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} [(a_i + a_j)^4 + (a_i - a_j)^4]$ . De même, à la base des études sur le problème « facile » de Waring se trouvent toujours des identités algébriques ([1], [2]).

Nous montrons ici à l'aide de diverses identités que dans  $\mathbf{Z}[i]$  et dans  $\mathbf{Z}[\rho]$  où  $\rho^2 + \rho + 1 = 0$  tout entier qui est somme de bicarrés est somme d'au plus 12 bicarrés. Nous dirons qu'un élément  $a$  d'un anneau est  $B_n$  s'il est somme de  $n$  bicarrés d'éléments de l'anneau.

1. Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme  $a + 24bi$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$  est somme d'au plus 18 bicarrés et que tout entier de Gauss qui est  $B_n$  a sa partie imaginaire divisible par 24. Ici, nous allons établir:

**THÉOREME 1.** *Tout entier de Gauss de la forme  $a + 24bi$  est somme d'au plus 12 bicarrés.*

La divisibilité par 24 de la partie imaginaire provient de ce que  $\text{Im}(x + iy)^4 = 4xy(x^2 - y^2)$ : si  $xy \neq 0$  (2),  $x^2 - y^2 = 0$  (2) et si  $xy \neq 0$  (3),  $x^2 = y^2 = 1$  (3). Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme  $48z + 12$  ou de la forme  $48z + 24i + 36$  est  $B_{12}$  à l'aide de l'identité:

$$(1) \quad 6(X^2 + Y^2)^2 = 2(X + Y)^4 + 2(X - Y)^4 + (X + iY)^4 + (X - iY)^4.$$

En fait, on peut montrer le

**LEMME.** *Tout entier de Gauss de la forme  $24z + a$  avec  $a = 9, 10, 12$  ou 16 est  $B_{10}$ .*

Nous allons utiliser l'identité (1) en choisissant convenablement l'un des deux derniers bicarrés du second membre. Pour cela, notons que

$$2z + 1 = (z+1)^2 + (iz)^2 \quad \text{et} \quad 4z = (z+1)^2 + [i(z-1)]^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 8z + 2 &= [2(1+i)z+1]^2 + [2(1-i)z+1]^2 \\ &= [[(1+i)z+1]^2 + [(1-i)z]^2]^2 + [[(1-i)z+1]^2 + [(1+i)z]^2]^2. \end{aligned}$$

En multipliant par 6 et en utilisant (1), on obtient:

$$\begin{aligned} 48z + 12 &= 4(2z+1)^4 + 2(2z+i)^4 + 2(2z-i)^4 \\ &\quad + [2(1+i)z+1]^4 + [2(1-i)z+1]^4 + 2. \end{aligned}$$

En remplaçant  $2z$  par  $z$  on obtient:

$$\begin{aligned} 24z + 10 &= 4(z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4 \\ &\quad + [(1+i)z+1]^4 + [(1-i)z+1]^4 \end{aligned}$$

ce qui est l'un des résultats annoncés.

En partant de  $8z + 1 + 4i = (4z + 2i + 1)^2 + (4iz - 2)^2$ , on établit de la même façon que plus haut, l'identité suivante:

$$\begin{aligned} 24z + 9 &= (2z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4 + [(1+i)z]^4 \\ &\quad + 2[z(1+i)+1]^4 + 2[z(1-i)+1]^4. \end{aligned}$$

Les deux autres résultats s'obtiennent d'une autre façon: on a tout d'abord l'identité:

$$(2) \quad (x+3)^4 - 3(x+2)^4 + 3(x+1)^4 - x^4 = 24x + 36.$$

Comme  $-3 = (1+i)^4 + 1$  et  $-1 = (1+i)^4 + 3$ , on a

$$\begin{aligned} 24x + 12 &= (x+2)^4 + (x+1)^4 + 3x^4 + 3(x-1)^4 \\ &\quad + [(1+i)(x+1)]^4 + [(1+i)(x-1)]^4 \end{aligned}$$

qui est donc somme de 10 bicarrés.

Le dernier résultat provient d'une méthode mixte: on a  $(x+1)^4 - 2x^4 + (x-1)^4 = 12x^2 + 2$ ; comme  $-2 = (1+i)^4 + 2$ , cela montre que  $12x^2 + 2$  est  $B_5$ ; de même pour  $12(ix-i)^2 + 2$ . Donc  $12x^2 + 12(ix-i)^2 + 4 = 24x - 8$  est  $B_{10}$  ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarquons qu'on peut obtenir d'autres identités: ainsi

$$\begin{aligned} 8z+1 &= (4z+1)^2 + (4iz)^2 \\ &= [(2z+1)^2 + (2iz)]^2 + [(iz+1)^2 + (z+i)^2]^2. \end{aligned}$$

En utilisant (1), on voit que  $48z + 6$  est  $B_{12}$ ; mais comme  $(2z+1) + i(2iz) = 1$  et  $(iz+1) - i(z+i) = 2$ , on voit que parmi ces 12 bicarrés, on a  $1^4$  et  $2^4$ . On a donc  $48z + 37 = B_{10}$  avec la formule:

$$48z - 11 = 2 [2(1+i)z+1]^4 + [2(1-i)z+1]^4 + (4z+1)^4 \\ + 2 [(1+i)(z+1)]^4 + 2 [(1+i)(z-1)]^4 + (2z)^4,$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer  $z$  par  $(1+i)z$ .

Une autre identité donne  $48z + 4 = B_{10}$  à l'aide de  $12x^2 + 2 = B_5$  et  $12(ix-2i)^2 + 2 = B_{10}$ .

Pour déduire le théorème 1 du lemme, il suffit de montrer qu'en ajoutant à  $24z + 9, 10, 12$  ou  $16$ , un ou deux bicarrés, on obtient toutes les suites  $24z, 24z+1, \dots, 24z+23$ . Pour cela, on utilise les congruences suivantes modulo 24:  $1^4 = 1, 2^4 = 16, 3^4 = 9 \pmod{24}, (1+i)^4 = 20 \pmod{24}, [2(1+i)]^4 = 8 \pmod{24}, [3(1+i)]^4 = 12 \pmod{24}, (2+i)^4 = 17 \pmod{24}$  et  $(3+i)^4 = 4 \pmod{24}$ . Ces congruences permettent de vérifier que sauf pour  $24z+7, +15$  et  $+23$ , tout entier de Gauss de la forme  $24z + a, 0 \leq a \leq 23$  est  $B_{11}$ ; les trois restants sont donc bien  $B_{12}$  et le théorème est démontré.

2. Soit  $\rho$  une racine cubique primitive de l'unité, de sorte que  $0 = \rho^2 + \rho + 1$ . Si dans l'identité de Liouville, on fait  $x_2 = x_3 = x_4$ , on trouve l'identité:

$$(3) \quad 2(X^2 + XY + Y^2)^2 = X^4 + (X+Y)^4 + Y^4,$$

qui va permettre d'étudier les sommes de bicarrés dans  $Z[\rho]$ . En effet, on a l'identité:

$$u^2 + u(\rho u + v) + (\rho u + v)^2 = uv(1+2\rho) + v^2.$$

En prenant  $v = 1 + 2\rho$ , on trouve en changeant  $u$  en  $u - 1$ ,

$$-3u = (u-1)^2 + (u-1)[\rho(u+1)+1] + [\rho(u+1)+1]^2.$$

On a donc d'après (3):  $18u^2 \in B_3$ ; comme tout élément de  $Z[\rho]$  est somme de 3 carrés, on en déduit que tout multiple de 18 est  $B_9$ . De la même façon, en prenant  $v = 1$ , plus haut, on voit que  $2[u(1+2\rho)+1]^2 = B_3$ , ce qui donne

$$12(1+2\rho)u = 2[u(1+2\rho)+1]^2 + 2[u\rho(1+2\rho)+\rho^2]^2 \\ + 2[u\rho^2(1+2\rho)+\rho]^2 = B_9;$$

on a donc montré:

LEMME. *Tout multiple de 18 ou de  $12(1+2\rho)$  dans  $\mathbf{Z}[\rho]$  est  $B_9$ . Cela va nous permettre de démontrer le:*

THÉOREME 2. *Tout élément de  $\mathbf{Z}[\rho]$  est somme d'au plus 12 bicarrés.*

Il s'agit d'après le lemme ci-dessus de montrer que si  $z \in \mathbf{Z}[\rho]$ , l'équation diophantienne  $z = X^4 + Y^4 + Z^4 + 18T$  a une solution  $(X, Y, Z, T)$  dans  $\mathbf{Z}[\rho]$ ; pour cela, il suffit de montrer que tout élément de  $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$  est somme d'au plus 3 bicarrés. L'anneau  $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$  est produit direct de  $F_4$  et de  $A = \mathbf{Z}[x]/(9, x^2+3)$  car  $(9) = (1+2\rho)^4$ : dans  $F_4$ , tout élément est une puissance 4ème et dans  $A$ , les bicarrés sont les éléments congrus à 1 modulo  $x$  (d'après le lemme de Hensel) de sorte que 3 suffisent pour exprimer tout élément de  $A$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HARDY, G. and E. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers*. Clarendon Press, Oxford (1945), § 27-28.
- [2] MORDELL, L. *Diophantine Equations*. Academic Press, London and New York (1969), § 21.
- [3] NIVEN, I. Sums of fourth powers of Gaussian integers. *Bull. Amer. Math. Soc.* 47 (1941), pp. 923-926.

(Reçu le 21 décembre 1978)

Philippe Revoy

Institut de Mathématiques  
Place Eugène-Bataillon  
F-34060 Montpellier