

6.1. Un problème de gestion optimale

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉOREME 5.3. Pour $g \in L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, le problème (5.45) admet une solution $\phi(g)$ unique dans $L^p(\Omega)$.

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier $g \in L^2(\Gamma)$, alors la solution faible de (5.44) vérifie : $\phi \in L^2(\Omega)$, $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$ (donc $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$).

Il ne semble pas que l'on puisse définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans ces conditions. Mais si $g \in L^p(\Gamma)$, $p > 2$, alors on peut définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans un espace de distributions sur Γ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

6.1. Un problème de gestion optimale ¹⁾

Soit s l'instant initial, $s \in [0, T]$ et soit x le stock de produits à l'instant s .

On se donne un processus de Wiener $f(t)$ ($f(0) = 0$) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant t ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad E f(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

¹⁾ Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.

On se donne des temps d'arrêts en nombre fini mais quelconques, avec:

$$(6.3) \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_i \leq \tau_N \leq T \quad \text{p.s.}$$

et des v.a. $w_1, \dots, w_i, \dots, w_N$ avec w_i adaptée à $f(t)$, $t \in [0, \tau_i]$.

La suite (finie) τ_i, w_i est la variable de contrôle (stochastique).

L'état $y(t)$ du système est donné par:

$$(6.4) \quad y(t) = x - (f(t) - f(s)) + \sum_{j=1}^i w_j, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}.$$

Soit $t \rightarrow N(t)$ une fonction de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 , > 0 , telle que $N(\tau)$ désigne le coût d'une commande de produits à l'instant τ .

La fonction coût du problème est alors:

$$(6.5) \quad J_s^x((\tau_i, w_i)) = E \left[\sum_i N(\tau_i) + \int_s^T l(y(t)) dt \right]$$

où

$$(6.6) \quad \left| \begin{array}{l} l(\lambda) \geq 0, \lambda \rightarrow l(\lambda) \text{ continue}, l(0) = 0, \\ l \text{ étant décroissante si } \lambda \leq 0, \text{ croissante si } \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

Pour fixer les idées:

$$(6.7) \quad l(\lambda) = c_1 \lambda^- + c_2 \lambda^+, \quad c_2 > 0, \quad c_1 \geq 0.$$

On pose:

$$(6.8) \quad w(x, s) = \inf_{(\tau_i, w_i)} J_s^x((\tau_i, w_i));$$

notre objet essentiel est d'obtenir une *caractérisation fonctionnelle* de w (fonction définie sur $\mathbf{R}_x \times]0, T[$).

Nous renvoyons à Bensoussan et Lions [2] pour la vérification du résultat suivant:

$$(6.9) \quad w(x, t) \leq N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t), \quad \forall x \in \mathbf{R}, t \in]0, T[,$$

$$(6.10) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(t) \frac{\partial w}{\partial x} \leq l(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \in]0, T[,$$

$$(6.11) \quad w(x, t) = N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t) \quad \text{pour } x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.12) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m(t) \frac{\partial w}{\partial x} = l(x) \quad \text{pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.13) \quad w(x, T) = 0.$$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction w (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en x sur w). L'unicité résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'existence d'une solution.

6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution

On introduit:

$$(6.14) \quad u = \frac{w}{N(t)}.$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

$$(6.15) \quad u(x, t) \leq 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t)$$

$$(6.16) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \leq f(x, t), \quad f(x, t) = \frac{l(x)}{N(t)},$$

$$(6.17) \quad u(x, t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t), \quad x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.18) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f \text{ pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.19) \quad u(x, T) = 0,$$

où $A(t)$ est défini par:

$$(6.20) \quad A(t)\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi.$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

Remarque 6.1.

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbf{R}$, à croissance convenable à l'infini, et telles que: