2. Problèmes d'existence

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Problèmes d'existence

2.1. *Un problème de contrôle dans les coefficients*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ régulière. L'ensemble des contrôles est défini par [1]:

$$(2.1) \qquad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega),\ 0 < m \leqslant v(x) \leqslant M < \infty \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

($\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble des contrôles *ad*missibles).

Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, *l'état* $y(v)$ *du système* est défini par la solution du problème elliptique:

$$(2.2) \qquad \left| \begin{array}{l} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, v(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = f \text{ dans } \Omega, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où f est donné par exemple dans $L^2(\Omega)$ et où les a_{ij} sont donnés avec:

$$(2.3) \qquad a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha > 0.$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

$$(2.4) \qquad y(v) \in H_0^1(\Omega)\ ^2).$$

La *fonction coût* est par exemple:

$$(2.5) \qquad J(v) = \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2\, dx \right)^{1/2},$$

où z_d (état *d*ésiré) est donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème est alors *de minimiser* $J(v)$ *lorsque* v *parcourt* $\mathcal{U}_{ad}$.

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf. J(v)$, $v \in \mathcal{U}_{ad}$. On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est *négative* pour un problème très voisin du précédent.

---

[1]) *Toutes* les fonctions utilisées sont à *valeurs réelles*.

[2]) $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ et $H_0^1(\Omega)$ le sous espace des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels que $\varphi = 0$ sur Γ.

2.2. *Un contre exemple*

On considère le cas *unidimensionnel*

$$\Omega =]0,1[\tag{2.6}$$

$\mathcal{U}_{ad}$ étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \; M = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par $y(v) = y$ solution de:

$$-\frac{d}{dx}\left(v(x)\frac{dy}{dx}\right) + vy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \tag{2.7}$$

et la fonction coût par (2.5) avec $z_d = 1 + x^2$, i.e.

$$J(v) = \left(\int_0^1 \left| y(v) - (1+x^2) \right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

On va vérifier rapidement que:

$$\text{Inf } J(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{2.9}$$

et que:

$$\text{il n'existe pas } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(u) = 0. \tag{2.10}$$

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite v_n de $\mathcal{U}_{ad}$ telle que:

$$\left| \begin{array}{l} v_n \to v_0 = 1 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile,} \\ \\ \dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{w_0}, \; w_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{6}, \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile.} \end{array} \right. \tag{2.11}$$

(Prendre $v_n(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{6}\right)^{1/2}$ si $\dfrac{m}{n} < x \leqslant \dfrac{2m+1}{2n}$,

$$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2} \text{ si } \frac{2m+1}{2n} < x \leqslant \frac{m+1}{n},$$

$m = 0, 1, \ldots, n-1$).

Posons $y(v_n) = y_n$. On vérifie aussitôt que y_n est *borné* dans $H^1(\Omega)$ et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n, telle que:

(2.12) $$y_n \to y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \textit{ faible.}$$

Mais l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ étant compacte, il en résulte que:

(2.13) $$y_n \to y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort.}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec $v = v_n$, que:

$$\frac{d}{dx}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = v_n y_n \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

(2.14) $$v_n \frac{dy_n}{dx} \to \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort,}$$

et:

(2.15) $$-\frac{d}{dx}\chi_0 + v_0 y_0 = 0.$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) \to \frac{1}{w_0}\chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et comme $\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = \frac{dy_n}{dx} \to \frac{dy_0}{dx}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ faible (espace dual de $H_0^1(\Omega)$), on a donc:

$$\frac{1}{w_0}\chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

(2.16) $$-\frac{d}{dx}\left[w_0 \frac{dy_0}{dx}\right] + v_0 y_0 = 0$$

et (2.12) donne:

(2.17) $$y_0(0) = 1 \ , \ y_0(1) = 2.$$

On remplace v_0 et w_0 par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent $y_0(x) = 1 + x^2$ de sorte que $J(v_n) \to 0$.

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend $v = u$): $-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0$, d'où:

$$u = Cx^{-1/2} \exp.\left(\frac{x^2}{4}\right);\ C = \text{constante}; \tag{2.18}$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans $\mathcal{U}_{ad}$.

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$, on peut se demander *pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution.* Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. *Un résultat général d'existence*

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur $\mathbf{R}$ *uniformément réflexif*, dont la norme est notée $\|\ \|$, une fonction:

$$\left|\begin{array}{l} \varphi \to M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ \\ X \to \mathbf{R}\ ,\ M(\varphi) \geqslant c > -\infty, \end{array}\right. \tag{2.19}$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$S \text{ est fermé dans } X. \tag{2.20}$$

(en particulier *S n'est pas nécessairement convexe*).

On considère alors, pour $\xi \in X$, le problème

$$\inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|]. \tag{2.21}$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

THÉORÈME 2.1. *On peut choisir ξ dans un ensemble $\mathcal{X} \subset X$,* dense dans X, [1]) *de sorte qu'alors le problème* (2.21) *admette une solution* (i.e. il existe alors $\varphi_0 \in S$) *tel que*

$$J(\varphi_0) + \| \xi - \varphi_0 \| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|].$$

Si $J = 0$, c'est un théorème dû à Edelstein [1].

2.4. *Application au problème de contrôle dans les coefficients*

Pour $\xi \in L^2(\Omega)$, on introduit (l'état $y(v)$ étant donné par (2.2)):

$$J_\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 \, dx \right)^{1/2} + \varepsilon \| v - \xi \|_{L^2(\Omega)} \tag{2.22}$$

$$\varepsilon > 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend:

$$X = L^2(\Omega) \ , \ S = \mathcal{U}_{ad} \ ,$$

$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Donc: *On peut choisir ξ dans un ensemble dense de $L^2(\Omega)$ de manière qu'alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf J_\varepsilon(v) \ , \ v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les cœfficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

---

[1]) M[lle] F. Bidaut [1] a montré qu'il existe *x ensemble G_δ dense* avec la propriété.