

# §1. Définitions, propriétés élémentaires.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

nitions de  $Z(V; t)$ , l'énoncé (mais non la démonstration) du théorème 2, et le corollaire 1 de ce théorème 2 (on y utilise également les résultats des chapitres 5 et 6).

§ 1. *Definitions, propriétés élémentaires.*

1.1. Soit  $V$  un ensemble algébrique (affine ou projectif) défini sur  $k$ , et soit  $\mathbf{M}$  l'ensemble des cycles de dimension 0, premiers rationnels sur  $k$ , et portés par  $V$  (voir [15], chap. I, §§ 9.2 et 9.3); rappelons qu'un tel cycle  $m$  est une combinaison linéaire formelle  $\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m$  de points de  $V$  (algébriques sur  $k$ ) satisfaisant aux deux conditions suivantes:

(i)  $k(\mathbf{x}_1) = \dots = k(\mathbf{x}_m) = k_m$ ;

(ii) les  $\mathbf{x}_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) sont permutés transitivement par le groupe de Galois de  $k_m/k$ ;

l'entier  $m$  s'appelle *degré de  $m$* , on le note  $\deg(m)$ ; l'entier  $q^{\deg(m)} = \text{card}(k_m)$  est noté  $Nm$ ; cela étant:

DÉFINITION 1. — *On appelle fonction zêta (« minuscule ») de  $V$  la fonction d'une variable complexe  $s$  définie par*

$$(1.1.1) \quad \zeta(V; s) = \prod_{m \in \mathbf{M}} 1/(1 - Nm^{-s}).$$

(On verra plus loin que ce produit infini converge quand la partie réelle de  $s$  est suffisamment grande.)

Si  $V$  est une  $k$ -variété affine, il existe une bijection canonique de  $\mathbf{M}$  sur l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau de coordonnées  $A = k[V]$  (conséquence facile du théorème des zéros de Hilbert); faisons l'identification correspondante; si alors  $m \in \mathbf{M}$ ,  $A/m$  est isomorphe à  $k_m$ , avec  $m = \deg(m)$ , et on a  $Nm = \text{card}(A/m)$ ; la définition (1.1.1) de  $\zeta(V; s)$  à partir de  $A = k[V]$  et de l'ensemble  $\mathbf{M}$  des idéaux maximaux de  $A$  est dans ce cas entièrement analogue à celle de la fonction  $\zeta(K; s)$  d'un corps de nombres  $K$  à partir de l'anneau  $A = O_K$  des entiers de  $K$  et de l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ . (Ces deux définitions sont en fait des cas particuliers de la notion générale de fonction zêta d'un schéma de type fini sur  $\mathbf{Z}$ : voir [16], pp. 82-86).

1.2. La relation  $Nm = q^{\deg(m)}$  incite à faire le changement de variable  $t = q^{-s}$  et à poser une seconde définition:

DÉFINITION 2. — On appelle fonction zêta (« majuscule ») de  $V$  la fonction d'une variable complexe  $t$  définie par

$$(1.2.1) \quad Z(V; t) = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathbf{M}} 1/(1 - t^{\deg(\mathfrak{m})}).$$

(On verra que ce produit infini converge quand  $|t|$  est suffisamment petit.)

On a alors évidemment

$$(1.2.2) \quad \zeta(V; s) = Z(V; q^{-s}).$$

1.3. On va transformer la définition (1.2.1) de  $Z(V; t)$ . Pour tout  $j \geq 1$ , soit  $d_j$  le nombre de cycles  $\mathfrak{m} \in \mathbf{M}$  tels que  $\deg(\mathfrak{m}) = j$ : le nombre de points  $x \in V$  tels que  $[k(x):k] = j$  est évidemment égal à  $jd_j$ . Soit maintenant  $m$  un entier  $\geq 1$ ; le nombre de points  $x \in V$  rationnels sur  $k_m$  (c'est-à-dire tels que  $k(x) \subset k_m$ , donc que  $[k(x):k]$  divise  $m$ : chap. 1, prop. 4) est alors donné par

$$(1.3.1) \quad N_m = \sum_{j|m} jd_j.$$

D'autre part, l'égalité (1.2.1) peut s'écrire

$$(1.3.2) \quad Z(V; t) = \prod_{j \geq 1} 1/(1 - t^j)^{d_j}.$$

Considérons provisoirement  $t$  comme une indéterminée; dans l'anneau de séries formelles  $\mathbf{Q}[[t]]$ , le produit infini figurant au second membre de (1.3.2) est évidemment convergent, et il est de la forme  $1 + tG(t)$ , avec  $G(t) \in \mathbf{Z}[[t]]$ . Si  $D_j$  désigne le nombre de cycles positifs de dimension 0 et de degré  $d$  rationnels sur  $k$  (mais non nécessairement premiers) et portés par  $V$ , un calcul facile (analogue à celui qui permet de transformer en série de Dirichlet la fonction zêta de Riemann, supposée définie comme produit « eulérien » infini) montre d'ailleurs qu'on a de façon précise

$$(1.3.3) \quad Z(V; t) = 1 + \sum_{m \geq 1} D_m t^m.$$

Prenons alors, dans  $\mathbf{Q}[[t]]$ , les logarithmes des deux membres de (1.3.2); il vient

$$\log Z(V; t) = \sum_{j \geq 1} \sum_{n \geq 1} d_j t^{nj}/n,$$

soit, en multipliant par  $j$  le numérateur et le dénominateur du terme général, en posant  $m = nj$ , et en tenant compte de (1.3.1),

$$\log Z(V; t) = \sum_{m \geq 1} N_m t^m / m .$$

Ainsi :

PROPOSITION 1. — *Considérons  $Z(V; t)$  comme élément de  $\mathbf{Q}[[t]]$ . Alors*

(i)  *$Z(V; t)$  appartient à  $1 + t\mathbf{Z}[[t]]$ , et elle est donnée explicitement par la formule (1.3.3).*

(ii) *Si  $N_m$  désigne le nombre de points de  $V$  rationnels sur  $k_m$ , on a*

$$(1.3.4) \quad Z(V; t) = \exp \left( \sum_{m \geq 1} N_m t^m / m \right) .$$

La formule (1.3.4) est plus maniable que la formule (1.2.1), et c'est elle qu'on prend généralement comme *définition* de  $Z(V; t)$ ;  $\zeta(V; s)$  est alors *définie* par la formule (1.2.2).

**1.4.** Considérons à nouveau  $t$  comme une variable complexe, et  $Z(V; t)$  comme une fonction de variable complexe. Si on suppose  $V$  affine, plongé dans  $\mathbf{A}_n$ , l'entier  $N_m$  est majoré par le nombre de points de  $\mathbf{A}_n$  rationnels sur  $k_m$ ; on a donc  $N_m \leq (q^n)^m = (q^n)^m$ , et la série entière  $\sum_{m \geq 1} N_m t^m / m$  admet pour majorante la série entière  $\sum_{m \geq 1} (q^n t)^m / m = \log 1 / (1 - q^n t)$ , qui est holomorphe dans le disque  $|t| < q^{-n}$ ; ainsi,  $Z(V; t)$  est holomorphe (au moins) dans le disque  $|t| < q^{-n}$ . Même raisonnement et même conclusion si  $V$  est projectif, plongé dans  $\mathbf{P}_n$ ; on a alors  $N_m \leq (q^n)^m + (q^{n-1})^m + \dots + q^m + 1$ , et la série  $\sum_{m \geq 1} N_m t^m / m$  admet pour majorante la fonction  $\log 1 / (1-t)(1-qt) \dots (1-q^n t)$ , qui est holomorphe dans  $|t| < q^{-n}$ . Compte tenu de (1.2.2), on peut donc énoncer :

PROPOSITION 2. — *Si  $V$  désigne un ensemble algébrique défini sur  $k$  et plongé dans l'espace affine ou projectif de dimension  $n$  sur  $k$ , la fonction  $Z(V; t)$  (supposée définie par (1.3.4)) est holomorphe (au moins) dans le disque  $|t| < q^{-n}$ ; la fonction  $\zeta(V; s)$  est holomorphe (au moins) dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(s) > n$ .*

On laisse au lecteur le soin de vérifier, en passant par l'intermédiaire de la formule (1.3.3), que le produit infini (1.2.1) converge pour  $|t| < q^{-n}$  (au moins) et que le produit infini (1.1.1) converge alors pour  $\operatorname{Re}(s) > n$  (au moins). Notons d'autre part que les majorantes introduites ci-dessus ne sont autres que les logarithmes des fonctions zêta de  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{P}_n$ ; ainsi

PROPOSITION 3. — *Considérons  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{P}_n$  comme variétés définies sur  $k$ ; alors*

$$(1.4.1) \quad Z(\mathbf{A}_n; t) = 1/(1 - q^n t);$$

$$(1.4.2) \quad Z(\mathbf{P}_n; t) = 1/(1 - t) (1 - qt) \dots (1 - q^n t).$$

Si  $V$  est une variété, le théorème 4 du chapitre 8 permet d'en dire plus:

THÉORÈME 1. — *Soit  $V$  une variété (affine ou projective) de dimension  $r$ , définie sur  $k$ . Alors*

(i)  $Z(V; t)$  est holomorphe dans le disque  $|t| < q^{-r}$ .

(ii) Elle se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe dans le disque  $|t| < q^{-r+(1/2)}$ .

(iii) Ainsi prolongée, elle n'admet aucun zéro, et elle a pour seule singularité un pôle simple en  $t = q^{-r}$ .

Démonstration. — D'après le chapitre 8 (sect. 4.1, th. 1, pour le cas projectif; sect. 4.3, pour le cas affine), on peut, pour tout  $m \geq 1$ , écrire

$$(1.4.3) \quad N_m = (q^m)^r + B_m (q^m)^{r-(1/2)},$$

et la suite  $B_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) est alors bornée; posons

$$H(u) = \sum_{m \geq 1} B_m u^m / m;$$

$H(u)$  est holomorphe dans le disque  $|u| < 1$ , et (1.4.3), joint à (1.3.4), permet d'écrire

$$(1.4.4) \quad Z(V; t) = \exp(H(q^{r-(1/2)}t)) / (1 - q^r t);$$

le numérateur et le dénominateur du membre de droite sont holomorphes dans le disque  $|t| < q^{-r+(1/2)}$ , et le numérateur ne s'y annule évidemment pas; comme par ailleurs le dénominateur ne s'annule dans ce disque qu'en  $t = q^{-r}$ , qui est un zéro simple, le théorème 1 se trouve établi.

Les assertions (i) et (ii) du théorème 1 restent vraies pour un ensemble algébrique  $V$  quelconque (en ce qui concerne (ii), on a déjà annoncé, et on démontrera au paragraphe 2, que  $Z(V; t)$  est une fraction rationnelle: elle se prolonge donc analytiquement à  $\mathbf{C}$  tout entier!); tel n'est plus le cas pour l'assertion (iii): par exemple, si  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , la  $k$ -variété projective définie dans  $\mathbf{P}_2$  (rapporté à un système de trois coordonnées homogènes  $x, y, z$ ) par l'équation  $X^2 + Y^2 = 0$ , et qui est formée de deux droites définies sur

$k_2$  et conjuguées sur  $k$ , a pour fonction zêta  $1/(1-t)(1-qt)(1+qt)$ , fraction rationnelle qui admet, dans le disque  $|t| < q^{-1/2}$ , les deux pôles  $t = q^{-1}$  et  $t = -q^{-1}$ .

## § 2. Rationalité des fonctions zêta.

**2.1. THÉORÈME 2** (théorème de Dwork). — *Quel que soit  $V$ , ensemble algébrique défini sur  $k$ ,  $Z(V; t)$  est une fraction rationnelle en  $t$ .*

Démonstration. — Soient  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  la clôture algébrique du corps  $p$ -adique  $\mathbf{Q}_p$ ,  $\Omega$  le complété  $p$ -adique de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ ,  $\text{ord}: \Omega^* \rightarrow \mathbf{Q}$ , la valuation  $p$ -adique de  $\Omega$ , normalisée par  $\text{ord}(p) = 1$ , et  $|\cdot|_p: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , la valeur absolue  $p$ -adique de  $\Omega$ , normalisée par  $|p|_p = p^{-1}$ ;  $\Omega$  est un corps algébriquement clos, complet pour  $|\cdot|_p$ : c'est l'analogie  $p$ -adique de  $\mathbf{C}$ . Soit maintenant  $R$  un nombre réel positif (ou  $+\infty$ ), et soit  $D$  le « disque » de  $\Omega$  défini par  $|t|_p < R$ . Une fonction (définie dans une partie de  $\Omega$ , à valeurs dans  $\Omega \cup \{\infty\}$ ) sera dite *holomorphe dans  $D$*  si elle est représentable dans ce disque comme somme d'une série entière convergente; elle sera dite *méromorphe dans  $D$*  si elle est égale dans ce disque au quotient de deux fonctions holomorphes. Cela étant, la démonstration du théorème 2 repose essentiellement sur le résultat suivant:

**PROPOSITION 1.** —  *$Z(V; t)$  est méromorphe dans  $\Omega$  tout entier.*

Indiquons le principe de la démonstration (d'après Dwork (1960), et Serre (1959)). La formule (1.3.4) montre que si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux sous-ensembles algébriques d'un même ensemble algébrique, et si on pose  $V_3 = V_1 \cup V_2$ ,  $V_4 = V_1 \cap V_2$ , les fonctions zêta de ces quatre ensembles algébriques sont liées par  $Z(V_1; t) Z(V_2; t) = Z(V_3; t) Z(V_4; t)$  (remarquer qu'on a, avec des notations évidentes,  $N_{1,m} + N_{2,m} = N_{3,m} + N_{4,m}$ ). Un argument combinatoire simple prouve alors qu'on peut se ramener au cas où  $V$  est une hypersurface affine d'équation  $F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{u \in U} a_u X^u = 0$  (notation analogue à celle du chapitre 7, section 2.2), et qu'on ne modifie pas le problème en remplaçant  $Z(V; t)$  par  $Z^*(V; t) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} N_m^* t^m / m\right)$ ,  $N_m^*$  désignant le nombre de points  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V$ , rationnels sur  $k_m$  et tels que  $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$ . Soit  $\beta_m$  un caractère additif non trivial de  $k_m$ , à valeurs dans  $\Omega$  (\*); un calcul semblable à celui fait au chapitre 5, section 1.3, montre qu'on a

\*) C'est-à-dire un homomorphisme non trivial  $k_m^+ \rightarrow \Omega^*$ .