§3. Equations diagonales quelconques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tement, puisque, pour tout $x \in k$, x^d est dans ce cas la norme de x dans l'extension $k/\mathbf{F}_p$: chap. 1, sect. 3.3). Ainsi:

COROLLAIRE 2. — Soit $k = \mathbf{F}_q$, $q = p^f$. Si $f \geq 2$, il existe au moins un exposant d tel que $k_d \neq k$.

(Il en existe même une infinité: car si d est tel que $k_d \neq k$, la même propriété est vraie pour tout multiple de d ; mais ceci n'a pas grande signification, car d intervient en réalité par l'intermédiaire de $\delta = (q-1, d)$, qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs).

Supposons toujours k fixé, avec $f \geq 2$, et soit d un entier tel que $k_d \neq k$; avec les notations du théorème 2, on a $k_d = \mathbf{F}_{q_1}$; si $b \in k^*$, on aura donc $b \in k_d$ si et seulement si $b^{q_1-1} = 1$; les parties (i) et (ii) du théorème donnent alors:

COROLLAIRE 3. — Si $b^{q_1-1} = 1$, et si $n \geq \delta$, l'équation diagonale $X_1^d + \dots + X_n^d = b$ admet une solution dans k^n .

(ii) Si au contraire $b^{q_1-1} \neq 1$, alors, si grand que soit n , l'équation $X_1^d + \dots + X_n^d = b$ n'admet aucune solution dans k^n .

Exemple: $k = \mathbf{F}_4$, $d = 3$; on a $k_d = \mathbf{F}_2 \neq k$; si $b \in \mathbf{F}_4$, $b \neq 0, 1$, l'équation $X_1^3 + \dots + X_n^3 = b$ n'a pas de solution sur $\mathbf{F}_4$, si grand que soit le nombre d'inconnues, n .

§ 3. Equations diagonales quelconques.

3.1. Passons maintenant aux équations diagonales quelconques, donc de la forme $F = b$, avec

$$F = a_1 X_1^{d_1} + \dots + a_n X_n^{d_n},$$

les $d_i \geq 1$, les $a_i \in k$ (on les supposera tous différents de zéro, ce qui ne diminue pas la généralité) et $b \in k$ (et éventuellement nul). Désignons par N le nombre de solutions de l'équation $F = b$ dans k^n , et par $\bar{N}$ le reste de division de N par p (ou encore, l'élément $N.1$ de $k = \mathbf{F}_q$). Enfin, pour simplifier les calculs, posons $\delta_i = (q-1, d_i)$ ($i=1, \dots, n$), puis

$$\Phi = a_1 X_1^{\delta_1} + \dots + a_n X_n^{\delta_n},$$

$a_0 = -b$, et $G = a_0 + \Phi$. Il est clair alors que le nombre de solutions dans k^n de l'équation $G = 0$ est égal au nombre de solutions dans k^n de $F = b$, donc à N (voir chap. 1, sect. 2.3; bien entendu, les ensembles de

solutions de ces deux équations sont en général distincts). En outre, dans le polynôme G , chaque exposant divise $q - 1$.

3.2. On peut alors évaluer N par la « méthode de Lebesgue » (chap. 3, § 2 et Notes). On a en effet (loc. cit.)

$$(3.2.1) \quad \bar{N} = \sum_{\mathbf{x} \in k^n} (1 - G(\mathbf{x})^{q-1}) = - \sum_{\mathbf{x} \in k^n} G(\mathbf{x})^{q-1}.$$

Ecrivons $G(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1^{\delta_1} + \dots + a_n x_n^{\delta_n}$, et développons $G(\mathbf{x})^{q-1}$; il vient

$$(3.2.2) \quad N = - \sum_{\mathbf{x} \in k^n} \sum_{\mathbf{j}} \binom{q-1}{\mathbf{j}} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} x_1^{\delta_1 j_1} \dots x_n^{\delta_n j_n},$$

la seconde sommation portant sur l'ensemble des vecteurs entiers $\mathbf{j} = (j_0, \dots, j_n)$ tels que (1) $j_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, n$; (2) $j_0 + \dots + j_n = q - 1$, et le symbole $\binom{q-1}{\mathbf{j}}$ désignant le « coefficient multinomial » $(q-1)! / j_0! \dots j_n!$ Mais (chap. 3, sect. 2.1) on a $\sum_{\mathbf{x} \in k} x^u = -1$ si $u > 0$ et si $q - 1$ divise u , et $\sum_{\mathbf{x} \in k} x^u = 0$ sinon; ceci permet de simplifier la formule (3.2.2) et d'énoncer:

LEMME 2. — Soit J l'ensemble des vecteurs entiers $\mathbf{j} = (j_0, \dots, j_n)$ tels que

- (1) $j_0 \geq 0, j_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$;
- (2) $j_0 + j_1 + \dots + j_n = q - 1$;
- (3) $(q-1)/\delta_i$ divise j_i pour $i = 1, \dots, n$;

alors $\bar{N}$ est donné par la formule

$$(3.2.3) \quad \bar{N} = (-1)^{n+1} \sum_{\mathbf{j} \in J} \binom{q-1}{\mathbf{j}} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}.$$

3.3. Première conséquence de ce lemme:

THÉORÈME 3. — Si les entiers δ_i satisfont à la condition

$$(H1) \quad 1/\delta_1 + \dots + 1/\delta_n > 1,$$

le nombre N de solutions de $F = b$ dans k^n est divisible par p .

Démonstration. — Si la condition (H1) est vérifiée, l'ensemble J défini dans le lemme 2 est vide, et on a bien $\bar{N} = 0$.

Ce théorème montre notamment que si les exposants de F satisfont à la condition

$$(H2) \quad 1/d_1 + \dots + 1/d_n > 1,$$

le nombre N est divisible par p . Si $d_1 = \dots = d_n = d$ (cas homogène), (H2) se réduit à l'inégalité $n > d$, et on retombe sur un cas particulier du théorème de Chevalley-Waring (chap. 3, th. 1). En revanche, dans le cas non homogène, la condition (H2) peut être réalisée en même temps que l'inégalité $n \leq d$:

Exemple: des équations diagonales telles que

$$X_1^2 + X_2^3 + X_3^5 + 1 = 0; \quad X_1^2 + X_2^3 + X_3^6 + X_4^6 = 0,$$

ont, sur un corps fini quelconque k , un nombre de solutions divisible par la caractéristique p de k (ce nombre est d'ailleurs non nul, donc $\geq p$, car la première équation a pour solution $(1, -1, 0)$, la seconde, $(1, -1, 0, 0)$); or, pour la première équation, $n = 3 \leq d = 5$; pour la seconde, $n = 4 \leq d = 6$.

3.4. Autre conséquence du lemme 2:

THÉORÈME 4. — *Supposons réalisées les deux conditions suivantes :*

$$(H3) \quad 1/\delta_1 + \dots + 1/\delta_n = 1;$$

$$(H4) \quad \text{Chaque } \delta_i (1 \leq i \leq n) \text{ divise } p - 1.$$

Alors, quel que soit $b \in k$, l'équation $a_1 X_1^{d_1} + \dots + a_n X_n^{d_n} = b$ admet au moins une solution dans k^n .

Démonstration. — Avec les notations des sections 3.1 et 3.2, il suffit de prouver que, dans le lemme 2, $\bar{N} \neq 0$. Mais la condition (H3) entraîne que J est réduit au seul élément $\mathbf{h} = (0, h_1, \dots, h_n)$, avec $h_i = (q-1)/\delta_i$ pour $i = 1, \dots, n$; le lemme donne donc

$$\bar{N} = (-1)^{n+1} \binom{q-1}{\mathbf{h}} a_1^{h_1} \dots a_n^{h_n};$$

comme les a_i ont été supposés non nuls, il reste à prouver que, sous l'hypothèse (H4), le coefficient $\binom{q-1}{\mathbf{h}}$ n'est pas divisible par p , ou encore, v_p désignant la valuation p -adique, que

$$v_p((q-1)!) = v_p(h_1!) + \dots + v_p(h_n!);$$

mais ceci résulte facilement de l'estimation bien connue

$$v_p(m!) = [m/p] + [m/p^2] + \dots$$

valable pour tout entier $m \geq 1$ (la notation [...] signifie: partie entière de ...; cette estimation se déduit immédiatement de l'écriture de m en base p).

Dans le cas homogène, le théorème 4 peut s'énoncer:

THÉORÈME 5. — Soit $F = a_1 X_1^d + \dots + a_n X_n^d$ une forme diagonale homogène de degré d à n variables; posons $\delta = (q-1, d)$; alors, si $n = \delta$, et si δ divise $p-1$, la forme F représente tout élément non nul de k .

Ce résultat étend le théorème 2 à des formes F non isotropes; signalons que le théorème 5 reste vrai si on remplace l'hypothèse (H4) par l'hypothèse plus faible: $\delta \leq p-1$ (voir Schwarz (1950)); en revanche, si $\delta \geq p$, le théorème 5 peut tomber en défaut: ainsi, dans l'exemple donné à la fin du paragraphe 2, la forme $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ sur $k = \mathbb{F}_4$ (avec $n=d=\delta=q-1=3$) représente seulement les éléments de $\mathbb{F}_2$; et de fait, $\delta = 3 \geq p = 2$.

Notons enfin que si $q = p$, les conditions: δ_i divise $p-1$, δ divise $p-1$, sont automatiquement vérifiées: sur un corps fini premier, les théorèmes 4 et 5 sont donc valables sans restriction.

§ 4. Equations multilinéaires.

4.1. Soit toujours k un corps fini à $q = p^f$ éléments, soient r et d deux entiers ≥ 1 , et soit $n = rd$. On se propose dans cette section de calculer le nombre $N(F, b)$ de solutions dans k^n de l'équation $F = b$ ($b \in k$), le polynôme F étant de la forme

$$(4.1.1) \quad F = a_1 X_1 \dots X_d + a_2 X_{d+1} \dots X_{2d} + \dots + a_r X_{n-d+1} \dots X_n$$

(un tel polynôme est parfois dit abusivement *multilinéaire*). Il est clair qu'on peut supposer tous les a_j non nuls (chap. 3, th. 5) et qu'on peut même (quitte éventuellement à multiplier les deux membres de l'équation par b^{-1} , et à faire une « homothétie » sur certaines variables) supposer $a_1 = \dots = a_r = 1$, et $b = 0$ ou 1 . On est ainsi ramené à calculer les nombres de solutions dans k^n des deux équations $F_{r,d} = 0$ et $F_{r,d} = 1$, avec

$$(4.1.2) \quad F_{r,d} = X_1 \dots X_d + X_{d+1} \dots X_{2d} + \dots + X_{n-d+1} \dots X_n,$$

nombres qu'on notera respectivement $N(r, d)$ et $N_1(r, d)$.

4.2. THÉORÈME 6. — Les nombres $N(r, d)$ et $N_1(r, d)$ sont donnés par

$$(4.2.1) \quad N(r, d) = q^{n-1} + (q-1) q^{r-1} A(q, d)^r,$$

$$(4.2.2) \quad N_1(r, d) = q^{n-1} - q^{r-1} A(q, d)^r,$$