§2. Fonctions polynomiales.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La démonstration du lemme 2 donne une méthode effective pour calculer F^* à partir de F , et permet en outre d'énoncer:

THÉORÈME 2. — *Si F est un élément de $k[X]$, et si F^* est le polynôme réduit associé à F , on a l'inégalité $\deg(F^*) \leq \deg(F)$.*

§ 2. Fonctions polynomiales.

2.1. Soit A l'ensemble de toutes les applications de k^n dans k , et soit φ l'application qui, à tout polynôme $F \in k[X]$, fait correspondre sa fonction polynomiale associée. Il est clair que A est muni naturellement d'une structure de k -algèbre (ainsi d'ailleurs que $k[X]$) et que $\varphi: k[X] \rightarrow A$, est un homomorphisme de k -algèbres.

THÉORÈME 3. — (i) *L'homomorphisme φ est surjectif et a pour noyau l'idéal Γ ; φ donne donc lieu à un isomorphisme d'algèbres*

$$(2.1.1) \quad k[X]/\Gamma \simeq A.$$

(ii) *Soit φ_R la restriction à $R \subset k[X]$ de l'homomorphisme φ ; φ_R est un isomorphisme de l'espace vectoriel R sur l'espace vectoriel A . Si F est un élément de $k[X]$, on a $\varphi_R^{-1}(\varphi(F)) = F^*$.*

Démonstration. — (ii) est une conséquence immédiate de (i) et de l'égalité (1.3.1) (th. 1, (ii)). Prouvons (i): le noyau de φ est par définition égal à I ; mais $I = \Gamma$ (th. 1, (i)); le noyau de φ est donc bien Γ . Reste à établir la surjectivité de φ , c'est-à-dire le lemme suivant:

LEMME 3. — *Pour toute application $f: k^n \rightarrow k$, il existe dans $k[X]$ un polynôme F tel que $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x}$ de k^n .*

Prouvons ce lemme; pour tout point $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de k^n , notons $f_{\mathbf{a}}$ l'application de k^n dans k définie par

$$(2.1.2) \quad f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{a}; \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{a}. \end{cases}$$

La famille $(f_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in k^n}$ est évidemment une base sur k de l'espace vectoriel A ; par linéarité, on peut donc se limiter au cas où f est de la forme $f_{\mathbf{a}}$; mais il suffit alors de prendre pour F le polynôme

$$(2.1.3) \quad F_{\mathbf{a}} = (1 - (X_1 - a_1)^{q-1}) \dots (1 - (X_n - a_n)^{q-1})$$

(voir chap. 1, sect. 1.1). Ceci démontre le lemme 3, et achève de prouver le théorème 3.

2.2. Concrètement, le théorème 3 signifie ceci: toute application $f: k^n \rightarrow k$, est une fonction polynomiale, et on peut supposer que le polynôme F tel que $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x}$ de k^n est *réduit*; F est alors entièrement déterminé par f . Si on remarque que le polynôme $F_{\mathbf{a}}$ défini par (2.1.3) est réduit, on voit qu'on peut même écrire explicitement

$$(2.2.4) \quad F(X) = \sum_{\mathbf{a} \in k^n} f(\mathbf{a}) F_{\mathbf{a}}(X).$$

2.3. On a remarqué (sect. 1.1) que la dimension de l'espace vectoriel R est égale à q^n ; comme $k[X] = R \oplus \Gamma$, l'espace quotient $k[X]/\Gamma$ est aussi de dimension q^n . Par ailleurs, l'espace vectoriel A , qui admet pour base sur k la famille $(f_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in k^n}$ (sect. 2.1), est également de dimension q^n . L'homomorphisme injectif (2.1.1) est donc en fait bijectif, ce qui donne une deuxième démonstration de la surjectivité de φ . Exercice pour le lecteur: donner une troisième démonstration de la surjectivité de φ en utilisant la théorie des polynômes d'interpolation.

2.4. Le théorème 3 permet d'évaluer la « probabilité » pour qu'une équation $F = 0$ ($F \in k[X]$) admette au moins une solution dans k^n . Tout d'abord, on ne modifie pas l'ensemble des solutions de l'équation en remplaçant F par F^* ; on peut donc supposer F réduit, et on s'aperçoit ainsi qu'il existe essentiellement $\text{card}(R) = q^{q^n}$ équations distinctes. D'autre part, les polynômes réduits F tels que l'équation $F = 0$ n'ait aucune solution correspondent bijectivement par φ_R aux applications de k^n dans k^* ; il y en a donc exactement $(q-1)^{q^n}$, et il existe ainsi $q^{q^n} - (q-1)^{q^n}$ polynômes réduits F tels que l'équation $F = 0$ ait au moins une solution. En définitive, la « probabilité » cherchée est donc égale à $1 - (1 - q^{-1})^{q^n}$.

§ 3. Idéaux de polynômes.

3.1. Soit $F_1, \dots, F_s$ une famille de s éléments de $k[X]$, et soit J l'idéal de $k[X]$ engendré par les F_j ($j=1, \dots, s$); considérons le système d'équations

$$(3.1.1) \quad F_1 = 0, \dots, F_s = 0,$$

et soit V l'ensemble des solutions de (3.1.1) dans k^n , c'est-à-dire l'ensemble des zéros de J rationnels sur k . Soit enfin $I(V)$ l'ensemble des polynômes $G \in k[X]$ qui s'annulent en tout point de V ; $I(V)$ est évidemment un idéal de $k[X]$; $I(V)$ contient J , et aussi Γ ; $I(V)$ contient donc $J + \Gamma$; en fait: