

## §2. Groupe additif et groupe multiplicatif d'un corps fini.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**1.2.** Soient maintenant  $p$  un nombre premier,  $f$  un entier  $\geq 1$ , et posons  $q = p^f$ . Désignons par  $\Omega$  une clôture algébrique de  $\mathbf{F}_p$ , et notons  $k$  l'ensemble des racines dans  $\Omega$  du polynôme  $X^q - X$ . Ce polynôme ayant toutes ses racines simples (son dérivé vaut  $-1$ ), on voit que  $\text{card}(k) = q$ ; de plus,  $q$  étant une puissance de la caractéristique, on a, quels que soient  $a$  et  $b$  dans  $k$ ,  $(a+b)^q = a^q + b^q = a + b$ ; on a évidemment aussi  $(ab)^q = a^q b^q = ab$ , et  $k$  est un sous-corps de  $\Omega$ ; en particulier:

**PROPOSITION 3.** — *Quels que soient  $p$  premier et  $f \geq 1$ , il existe un corps fini possédant exactement  $q = p^f$  éléments.*

Ce corps est unique à isomorphisme près (prop. 2); on le note généralement  $\mathbf{F}_q$ .

**1.3.** Mêmes données que dans la section précédente. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux entiers  $\geq 1$ , et posons, pour  $i = 1, 2$ ,

$$q_i = p^{f_i}; \quad k_i = \mathbf{F}_{q_i} \subset \Omega;$$

on a alors évidemment  $[k_i : \mathbf{F}_q] = f_i$ . Si  $k_1 \subset k_2$ , la multiplicativité du degré montre que  $f_1$  divise  $f_2$ . Inversement, supposons que  $f_1$  divise  $f_2$ ; on peut écrire  $f_2 = mf_1$ , donc  $q_2 = q_1^m$ ; si  $a \in k_1$ , on a alors  $a^{q_1} = a$  (prop. 2), donc  $a^{q_1^m} = a^{q_2} = a$ , et par conséquent  $a \in k_2$  (prop. 2); ainsi,  $k_1 \subset k_2$ . Au total (et en conservant ces notations):

**PROPOSITION 4.** — *L'inclusion  $k_1 \subset k_2$  équivaut à la relation  $f_1$  divise  $f_2$ , donc à la relation  $q_2$  est une puissance de  $q_1$ .*

**COROLLAIRE 1.** — *Soient respectivement  $f'$  et  $f''$  le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de  $f_1$  et  $f_2$ . Posons  $q' = p^{f'}$ ,  $q'' = p^{f''}$ ,  $k' = \mathbf{F}_{q'}$ ,  $k'' = \mathbf{F}_{q''}$ . Alors l'intersection et le composé de  $k_1$  et  $k_2$  sont respectivement  $k'$  et  $k''$ .*

## § 2. Groupe additif et groupe multiplicatif d'un corps fini.

Soit  $k$  un corps fini à  $q = p^f$  éléments.

**2.1.** L'extension  $k/\mathbf{F}_p$  étant de degré  $f$ ,  $k$  est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbf{F}_p$ , et a fortiori en tant que groupe additif, au produit direct de  $f$  exemplaires de  $\mathbf{F}_p$ ; en conséquence:

**PROPOSITION 5.** — *Le groupe additif  $k^+$  de  $k$  est un groupe de type  $(p, \dots, p)$  ( $f$  fois).*

**2.2.** Passons au groupe multiplicatif  $k^*$ ; il est commutatif, d'ordre  $q - 1$ ; si  $N$  désigne le p.p.c.m. des ordres des éléments de  $k^*$ , on vérifie sans peine qu'il existe dans  $k^*$  un élément  $g$  d'ordre exactement égal à  $N$  (c'est là une propriété générale des groupes commutatifs d'ordre fini). Tout élément de  $k^*$  est évidemment racine du polynôme  $X^N - 1$ ; ce polynôme, de degré  $N$ , possède donc au moins  $q - 1$  racines, d'où  $N \geq q - 1$ ; or, par construction même,  $N$  divise  $q - 1$ ; ainsi,  $N = q - 1$ ; mais alors  $g$  est d'ordre  $q - 1$ , c'est un générateur de  $k^*$ , et on peut énoncer:

**PROPOSITION 6.** — *Le groupe multiplicatif  $k^*$  de  $k$  est un groupe cyclique d'ordre  $q - 1$ .*

Pour une autre démonstration de ce résultat, utilisant les propriétés de l'indicatrice d'Euler, voir [17], pp. 12-13.

**2.3.** Soit  $d$  un entier  $\geq 1$ ; on se propose d'étudier le groupe des puissances  $d$ -ièmes et le groupe des racines  $d$ -ièmes de l'unité dans  $k^*$ , c'est-à-dire l'image et le noyau de l'homomorphisme  $u_d: k^* \rightarrow k^*$ , défini par  $u_d(x) = x^d$  ( $x \in k^*$ ). Posons  $\delta = (q-1, d)$ ,  $u_\delta(x) = x^\delta$  ( $x \in k^*$ ) et notons  $g$  un générateur de  $k^*$  (prop. 6). L'identité de Bezout  $a(q-1) + bd = \delta$  montre que  $u_d$  et  $u_\delta$  ont même noyau (noter que  $x^{q-1} = 1$  pour tout  $x \in k^*$ );  $k^*$  étant fini, il en résulte que l'image de  $u_d$  et celle de  $u_\delta$  ont même ordre; mais la première est évidemment contenue dans la seconde:  $u_d$  et  $u_\delta$  ont donc aussi même image. Maintenant, comme  $\delta$  divise  $q - 1$ , il est clair que l'image de  $u_\delta$  est le sous-groupe de  $k^*$  engendré par  $g^\delta$ , et que le noyau de  $u_\delta$  est le sous-groupe de  $k^*$  engendré par  $g^{(q-1)/\delta}$  (pour le voir, identifier par exemple  $k^*$  à  $\mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ ,  $g$  s'identifiant à la classe de 1 (mod  $q-1$ )). En résumé:

**PROPOSITION 7.** — *Soient  $k$  un corps fini à  $q$  éléments,  $g$  un générateur de  $k^*$ ,  $d$  un entier  $\geq 1$ , et posons  $\delta = (q-1, d)$ . Alors :*

- (i) *Dans  $k^*$ , les puissances  $d$ -ièmes et les puissances  $\delta$ -ièmes forment un même sous-groupe, cyclique, engendré par  $g^\delta$ , et d'ordre égal à  $(q-1)/\delta$ .*
- (ii) *De même, les racines  $d$ -ièmes et les racines  $\delta$ -ièmes de l'unité forment un même sous-groupe, cyclique, engendré par  $g^{(q-1)/\delta}$ , et d'ordre égal à  $\delta$ .*

**COROLLAIRE 1.** — *Le groupe quotient  $k^*/k^{*d}$  est cyclique, d'ordre égal à  $\delta$ .*

**COROLLAIRE 2.** — *Pour qu'un élément  $a$  de  $k^*$  soit une puissance  $d$ -ième, il faut et il suffit que  $a^{(q-1)/\delta} = 1$ .*

Pour  $k = \mathbf{F}_p$ ,  $p$  impair, et  $d = \delta = 2$ , le corollaire 2 coïncide avec le critère d'Euler sur les restes et non-restes quadratiques modulo  $p$ .

### § 3. Extensions algébriques d'un corps fini.

Soit toujours  $k$  un corps fini à  $q$  éléments.

**3.1.** Soit  $K$  une extension algébrique de  $k$ , de degré fini  $m$ ; il est clair que  $\text{card}(K) = q^m$ , et donc que  $K = \mathbf{F}_{q^m}$ . Soit alors  $i$  un entier  $\geq 0$ ; comme  $q^i$  est une puissance de la caractéristique de  $K$ , l'application  $\sigma_i: K \rightarrow K$ , définie par  $\sigma_i(x) = x^{q^i}$  ( $x \in K$ ), est un automorphisme de  $K$ , et même, puisque  $k = \mathbf{F}_q$ , un  $k$ -automorphisme de  $K$  (prop. 2); si  $j$  est un autre entier  $\geq 0$ , on a évidemment  $\sigma_{i+j} = \sigma_i \circ \sigma_j$ ; enfin, si (par exemple)  $i \leq j$ , l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $\sigma_i(x) = \sigma_j(x)$ , donc tels que  $x^{q^{j-i}} = x$ , est évidemment égal à  $K \cap \mathbf{F}_{q^{j-i}}$ , et ne peut par conséquent être égal à  $K = \mathbf{F}_{q^m}$  que si  $\mathbf{F}_{q^m} \subset \mathbf{F}_{q^{j-i}}$ , donc (prop. 4) si  $i \equiv j \pmod{m}$ ; en particulier, les  $m$   $k$ -automorphismes  $\sigma_i$  avec  $0 \leq i < m$  sont distincts, et on peut affirmer:

**PROPOSITION 8.** — *L'extension  $K/k$  est galoisienne; son groupe de Galois est cyclique, d'ordre  $m$ , engendré par l'automorphisme (dit de Frobenius)  $x \mapsto x^q$ .*

Le fait que  $K/k$  est galoisienne peut se voir plus directement: en effet,  $k$  étant évidemment parfait,  $K/k$  est séparable, et il suffit de prouver que  $K/k$  est normale, ce qui résulte du fait que  $K$  est le corps de décomposition, dans une clôture algébrique de  $k$ , du polynôme  $X^{q^m} - X$  (prop. 2).

**3.2.** Mêmes données que ci-dessus. Soit  $\text{Tr} : K \rightarrow k$ , l'application *trace*. La proposition 8 montre que, pour tout élément  $x$  de  $K$ , on a

$$(3.2.1) \quad \text{Tr}(x) = x + x^q + \dots + x^{q^m-1}.$$

En outre:

**PROPOSITION 9.** — *L'application  $\text{Tr} : K \rightarrow k$ , est surjective. Si  $x \in K$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a)  $\text{Tr}(x) = 0$ ;
- (b) il existe  $y \in K$  tel que  $x = y^q - y$ .

**Démonstration.** — Considérons  $K$  comme espace vectoriel sur  $k$ ;  $\text{Tr}$  est alors une forme linéaire, et cette forme linéaire n'est pas nulle (si elle l'était, (3.2.1) impliquerait que le polynôme  $X + X^q + \dots + X^{q^m-1}$ , de