

# UNE CLASSE D'ALGÈBRES A INVOLUTIONS LES F-ALGÈBRES

Autor(en): **Pernet, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43858>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# UNE CLASSE D'ALGÈBRES A INVOLUTIONS LES $\mathcal{F}$ -ALGÈBRES

par R. PERNET

1. — A. ALBERT [1] a développé la théorie des involutions dans les algèbres non commutatives de base finie. Après l'étude des théorèmes généraux de structure, il a indiqué les propriétés des involutions dans les algèbres simples et spécialement dans les produits croisés noethériens, munis de leurs systèmes de facteurs.

Depuis longtemps, le cas le plus simple, celui du corps des quaternions ordinaires, muni de son involution classique, a permis de souligner l'importance de la notion pour des applications de tous ordres.

En particulier, STUDY [2] puis PIMIÄ [3] ont pu interpréter la géométrie des sphères orientées de LIE, en introduisant le concept de droite projective quaternionienne, puis en définissant un groupe de transformations homographiques et antihomographiques, où est utilisée pour la première fois la notion de *nabla*.

Dans le cas beaucoup plus délicat des quaternions généralisés où peuvent intervenir des diviseurs de zéro, il est possible d'adapter l'analyse précédente [4]. La droite projective est alors un ensemble de points bilatères, réguliers ou non, sur lequel opère un groupe de transformations homographiques ou antihomographiques de la droite projective quaternionienne, au sens généralisé. A cette occasion, on développe une application géométrique d'ailleurs totalement différente de celle de STUDY et PIMIÄ.

Il est alors naturel de penser à une nouvelle extension au cas d'algèbres involutives quelconques, pas nécessairement simples.

Toutefois, la notion de trace et de norme d'un élément quelconque, comme deuxième coefficient changé de signe ou dernier coefficient de son équation minimale, n'est plus utilisable pour une telle analyse, dès qu'on écarte le cas trivial des quaternions généralisés.

Les nouvelles définitions qu'on donne pour la trace et la norme ont pour objet de rétablir la possibilité de prolonger les théories évoquées, après avoir surmonté les difficultés provenant du fait que traces et normes n'appartiennent généralement plus au corps de base.

Une  $\mathcal{F}$ -algèbre est alors une algèbre involutive sans radical, dont toute trace et toute norme est régulière ou nulle.

Le théorème I, véritable clef de voûte de la nouvelle théorie, souligne la forme très remarquable des deux idéaux annulateurs à droite et à gauche d'un élément irrégulier quelconque. On démontre ensuite que, parmi les  $\mathcal{F}$ -algèbres, le cas particulier des algèbres de quaternions généralisés se caractérise d'une manière simple.

Deux exemples se rapportant, l'un à une  $\mathcal{F}$ -algèbre commutative, l'autre à une  $\mathcal{F}$ -algèbre non commutative, ainsi qu'un contre-exemple, permettent de contrôler les rôles respectifs des diverses hypothèses de base et d'apprécier la rigueur de la condition de régularité imposée à la trace et à la norme.

## 2. — Définitions :

Soit  $P$  un corps commutatif de caractéristique différente de deux,

$$\mathfrak{A} = \sum_{s=1}^{s=n} u_s P, \text{ une algèbre de rang fini sur } P.$$

On suppose qu'est définie sur cette algèbre une involution, i.e. un automorphisme involutif  $\mathcal{F}$  de l'anneau de  $\mathfrak{A}$  sur l'anneau opposé, noté  $z \leftrightarrow \bar{z}$ ,  $\forall z \in \mathfrak{A}$ , tel que :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \text{ et } \overline{zz'} = \bar{z}' \cdot \bar{z}, \quad \forall z, z' \in \mathfrak{A}$$

On convient de désigner par :

$$\begin{aligned} \{z\} &= z + \bar{z} && \text{la « trace » de } z \\ Nz &= z\bar{z} && \text{la « norme » de } z \end{aligned}$$

On nomme « trace d'un idéal » de  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des traces des éléments de l'idéal; on note  $T$  l'ensemble de toutes les traces des éléments de  $\mathfrak{A}$ . Les termes « trace et norme » ont donc des significations généralement distinctes de celles relatives à la théorie des algèbres.

$\mathfrak{A}$  est dite «  $\mathcal{F}$ -algèbre » si :

$$1^0) \underline{\{pz\}} = p \{z\}, \quad \forall p \in P, \quad \forall z \in \mathfrak{A}$$

Cette condition équivaut à  $\overline{pz} = p \cdot \bar{z}$

2<sup>o</sup>)  $\{z\}$  est un élément régulier ou nul.

3<sup>o</sup>) L'idéal à droite engendré par  $z \neq 0$  n'a pas une trace nulle.

On vérifie qu'il en est de même pour l'idéal à gauche. En effet:

$\alpha)$  si  $\{z\} \neq 0$ , les traces des idéaux à droite et à gauche engendrés par  $z$  ne sont pas nulles.

$\beta)$  si  $\{z\} = 0$ ,  $\forall \lambda \in \mathfrak{A}$ ,  $z\lambda + \bar{\lambda}z = z\lambda - \bar{\lambda}z = \{z\lambda\}$ .

donc s'il existe  $\lambda$  tel que  $\{z\lambda\} \neq 0$ , on déduit  $\{\bar{\lambda}z\} \neq 0$ . En particulier, un corps gauche, muni d'une involution, est une  $\mathcal{F}$ -algèbre.

### 3. — PROPRIÉTÉS DES NORMES ET DES TRACES DANS UNE $\mathcal{F}$ -ALGÈBRE.

$$1^{\circ}) \{a\} = \{\bar{a}\} = \overline{\{a\}}, \forall a \in \mathfrak{A}$$

$$2^{\circ}) \{ \{a\} \{b\} \} = \{ \{b\} \{a\} \}, \forall a, b, \in \mathfrak{A}$$

$3^{\circ}) T$  est un  $P$ -module de  $\mathfrak{A}$

En effet:

$$\{z\} - \{z'\} = z + \bar{z} - (z' + \bar{z}') = z - z' + (\bar{z} - \bar{z}'), \forall z, z' \in \mathfrak{A}$$

et (§ 2, 1<sup>o</sup>):

$$p \{z\} = \{pz\} \in T, \forall p \in P, \forall z \in \mathfrak{A}$$

$4^{\circ})$  Toute norme est une trace

$$\text{car: } Na = a\bar{a} = \overline{a\bar{a}} = (a\bar{a} + \overline{a\bar{a}}) : 2 = \{a\bar{a} : 2\} \in T$$

Donc toute norme est régulière ou nulle.

### 4. — Proposition 1 :

Dans une  $\mathcal{F}$ -algèbre  $\mathfrak{A}$ , un élément non nul  $z$  est irrégulier si, et seulement si,  $Nz = 0$ ;  $\bar{z}$  est alors irrégulier et  $N\bar{z} = 0$ .

$1^{\circ})$  Si  $z$  est irrégulier, il existe  $z' \neq 0$ , tel que:  $z'z = 0$  (p. exemple) d'où l'on déduit:  $z'z\bar{z} = z' \cdot Nz = 0$ .

$Nz$  ne peut être régulier, puisque  $z' \neq 0$ . Donc  $Nz = 0$ .

$2^{\circ})$  Supposons  $Nz = z\bar{z} = 0$ ,  $z$  régulier impliquerait  $\bar{z} = 0$ , i.e.  $z = 0$ , exclu. Donc  $z$  est irrégulier ainsi que  $\bar{z}$ , car  $z \neq 0$  entraîne  $\bar{z} \neq 0$ .

(raisonnement similaire avec  $zz' = 0$ )

### 5. — Corollaire 1 :

La condition  $3^{\circ})$  du § 2 implique qu'une  $\mathcal{F}$ -algèbre n'a pas de radical [5], i.e. est semi-simple, donc unitaire [6].

1°) Soit  $y$  irrégulier donné, tel que  $\{ya\} = 0$ ,  $\forall a \in \mathfrak{A}$ ,  $ya = -\bar{a} \bar{y}$  et  $(ya)^2 = -Nya = 0$  (car  $ya$  est aussi irrégulier). De même  $(ay)^2 = 0$  et  $y$  est dans le radical.

2°) Réciproquement, soit  $y$  un élément donné du radical d'une  $\mathcal{F}$ -algèbre (s'il en existe). Donc,  $\forall a \in \mathfrak{A}$ ,  $\exists \alpha$  entier  $> 0$ , tel que:

$$(ay)^\alpha = 0 = \overline{(ay)^\alpha}. \quad (\alpha \text{ dépend de } a).$$

On a donc:

$$(ay)^\alpha + \overline{(ay)^\alpha} = (ay + \overline{ay})^\alpha = \{ay\}^\alpha = 0$$

Toute trace étant régulière ou nulle, on déduit  $\{ay\} = 0$ . De même  $\{ya\} = 0$ .

D'où le corollaire par contraposition.

*Corollaire 2 :*

*La condition 3°) du § 2 équivaut à celle-ci :  $\mathfrak{A}$  est semi-simple (ou simple) (résulte de la démonstration du corollaire 1).*

*Corollaire 3 :*

*Dans une  $\mathcal{F}$ -algèbre  $\mathfrak{A}$ , tout élément régulier  $t$ , et, en particulier, toute trace non nulle admet un inverse qui est un polynôme en  $t$  sur  $P$  [7].*

Clair en se référant à l'équation minimum de  $t$ , après identification de l'unité de  $\mathfrak{A}$  à celle de  $P$ .

6. — *Lemme 1 :*

*Si  $r$  est un élément régulier de  $\mathfrak{A}$  et si  $z$  est un élément général de  $\mathfrak{A}$ ,  $rz$  (ou  $zr$ ) est aussi un élément général.*

En effet:  $(u_1, u_2, \dots, u_s, \dots, u_n)$  étant une base de  $\mathfrak{A}$ ,  $(ru_1, ru_2, \dots, ru_s, \dots, ru_n)$  en est une autre. Sinon, la relation:

$$\sum_{s=1}^n p_s r u_s = 0,$$

pour des  $p_s \in P$ , non tous nuls, impliquerait:

$$r \sum_{s=1}^n p_s u_s = 0, \text{ i.e. } \sum_s p_s u_s = 0, \text{ exclu.}$$

7. — *Théorème 1 :*

*Dans une  $\mathcal{F}$ -algèbre, l'idéal annulateur à droite (resp. à gauche) d'un élément irrégulier  $\bar{z} \in \mathfrak{A}$  est  $z \mathfrak{A}$  (resp.  $\mathfrak{A} z$ ).*

$z$  et  $\bar{z}$  étant simultanément irréguliers, soit  $D$  (resp.  $D'$ ) l'annulateur à droite de  $z$  (resp.  $\bar{z}$ ) de dimension  $\delta$  (resp.  $\delta'$ ):

$$zD = \bar{z}D' = 0 \quad (1)$$

On pose:  $t = \{z\} : 2$ , i.e.:  $\bar{z} = 2t - z$ .

Deux cas sont à distinguer:

1°)  $t \neq 0$ . Alors  $t \in T$  est régulier. Mais:

$$\bar{z}D = 2tD - zD = 2tD \text{ (d'après (1))}$$

et:

$$2tD \simeq D \text{ implique: } \dim. \bar{z}D = \delta \quad (2)$$

Or:

$$\bar{z}D \subset \bar{z}\mathfrak{A} \quad (3)$$

$\bar{z}\mathfrak{A}$  étant un espace vectoriel sur  $P$ , homomorphe à  $\mathfrak{A}$ , de noyau  $D'$ , on a:

$$\dim. \bar{z}\mathfrak{A} = n - \delta' \quad (4)$$

(2), (3), (4) impliquent:

$$\delta \leq n - \delta', \text{ i.e. } \delta' \leq n - \delta \quad (5)$$

D'autre part:  $\bar{z}z\mathfrak{A} = N\bar{z} \cdot \mathfrak{A} = 0$  (car  $N\bar{z} = 0$ , d'après le § 4) d'où

$$z\mathfrak{A} \subset D' \quad (6)$$

Mais  $z\mathfrak{A}$  est un espace vectoriel de dimension  $n - \delta$ . (5) et (6) impliquent:

$$n - \delta \leq \delta' \leq n - \delta \quad (7)$$

i.e. 
$$n - \delta = \delta' \quad (8)$$

Ainsi  $z\mathfrak{A}$  s'identifie à  $D'$ .

Donc le théorème est vérifié si  $t = \{z\} : 2 \neq 0$ .

8. — 2°)  $t = 0$ ; i.e.  $\bar{z} = -z$  et  $z^2 = Nz = 0$  (9)

D'après le § 2, 3°), il existe  $\lambda$  tel que:  $\{z\lambda\} \neq 0$ . Soit alors  $0 \neq a \in P$ :

$$N(z+a\bar{\lambda}) = Na\bar{\lambda} + \{z\lambda a\}, \text{ car } Nz = 0 \text{ et } \bar{a} = a \quad (10)$$

$$= a^2 \cdot N\bar{\lambda} + a \{z\lambda\} \quad (11)$$

$\alpha$ ) Si  $N\bar{\lambda} = 0$ ,  $N(z+a\bar{\lambda}) = a \{z\lambda\} \neq 0$ , d'après les hypothèses.

$\beta$ ) Si  $N\bar{\lambda} \neq 0$ , l'expression (11) ne peut être nulle,  $\forall a \neq 0$ .

Sinon,  $a \neq 0$  implique:  $aN\bar{\lambda} + \{z\lambda\} = 0$  (12)

$a' \neq 0$  et  $a \neq a'$ :  $a'N\bar{\lambda} + \{z\lambda\} = 0$  (13)

puis:  $(a-a')N\bar{\lambda} = 0$  ( $N\bar{\lambda}$  régulier, puisque non nul)

i.e.:  $a = a'$  ce qui est exclu.

Donc, dans les deux cas  $\alpha$ ) et  $\beta$ ),  $r = z + a\bar{\lambda}$  est régulier pour un choix convenable de  $a$ .

Puisque  $\bar{z} = -z$ ,

$$\bar{z}X = 0 \text{ équivaut à } zX = 0 \quad (14)$$

ou encore à:

$$rzX = 0 \quad (15)$$

Mais:

$$\{rz\} = \{(z+a\bar{\lambda})z\} = \{a\bar{\lambda}z\} = -a\{z\lambda\} \neq 0 \quad (16)$$

D'après le résultat du 1°),  $h$  désignant un élément général de  $\mathfrak{A}$ , toutes les solutions de (14), i.e. de (15) sont données par:

$$X = (\bar{z} \bar{r}) \mu = -z (\bar{r} \mu)$$

$\mu$  étant un élément général de  $\mathfrak{A}$ .

Mais  $-\bar{r}\mu$ , produit de  $\mu$  par  $-\bar{r}$ , autre élément régulier, est encore un élément général de  $\mathfrak{A}$  (§ 6, lemme 1).

La solution générale de (14) est donc  $X = -z \mathfrak{A} = \bar{z} \mathfrak{A}$  q.e.d.

### 9. — ALGÈBRES A INVOLUTION où $Nz = N\bar{z}, \forall z$ .

Les algèbres  $\mathfrak{A}$  qu'on étudie ne sont pas nécessairement des  $\mathcal{F}$ -algèbres; elles vérifient seulement les conditions 1°) et 2°) du § 2, ainsi que  $Nz = N\bar{z}, \forall z \in \mathfrak{A}$ .

*Lemme 2 :*

$\forall a, b \in \mathfrak{A}, \{ab\} = \{ba\}$  et réciproquement.

En effet:

$$Na = N\bar{a}, Nb = N\bar{b}, N(a+\bar{b}) = N(\overline{a+\bar{b}}) \quad (17)$$

$$N(a+\bar{b}) = Na + N\bar{b} + \{ab\} \text{ et}$$

$$N(\overline{a+\bar{b}}) = N(\bar{a}+b) = N\bar{a} + Nb + \{ba\} \quad (18)$$

La première partie du lemme résulte des égalités (17) et (18). Réciproquement, pour  $b = a$

$$\{a\bar{a}\} = 2Na, \text{ et } \{\bar{a}a\} = 2N\bar{a}, \text{ donc: } Na = N\bar{a}, \forall a$$

Lemme 3 :

$$\underline{Nab = a Nb \bar{a} = Nab}. \text{ Clair car } Nb = N\bar{b}$$

Lemme 4 :

$$\underline{Nab = Nba = (Na.Nb + Nb.Na) : 2.}$$

En effet:

$$2Nab = \{abb \bar{a}\} = \{b \bar{b} \bar{a} a\}, \text{ d'après le lemme 2.}$$

D'où:

$$2Nab = Nb \cdot N\bar{a} + N\bar{a} \cdot Nb = Nb \cdot Na + Na \cdot Nb = 2Nba$$

10. — Proposition 2 :

Dans une algèbre à involution  $\mathfrak{A}$ , vérifiant les conditions 1<sup>o</sup>) et 2<sup>o</sup>) du § 2 et  $Nz = N\bar{z}, \forall z \in \mathfrak{A}$ , l'ensemble des normes de  $\mathfrak{A}$  appartient au centre de  $\mathfrak{A}$ , si le corps de base est parfait.

D'après le lemme 2,  $\forall a, b$  :

$$\{aNb\} = a \cdot Nb + Nb \cdot \bar{a} = \{Nb \cdot a\} = Nb \cdot a + \bar{a} \cdot Nb$$

Donc, si on pose:

$$x = a \cdot Nb - Nb \cdot a \quad (19)$$

on a aussi:

$$x = \bar{a} \cdot Nb - Nb \cdot \bar{a} \quad (20)$$

D'où:  $ax = Na \cdot Nb - Nab$  et  $xa = Nab - Nb \cdot Na$  d'après les lemmes 3 et 4, car:  $\bar{a} \cdot Nb \cdot a = N\bar{a}b = Nb\bar{a} = Nba = Nab$ .

Donc, d'après le lemme 4,  $ax = xa$ .

D'autre part, de (19) et (20) on déduit:

$$(a - \bar{a}) Nb - Nb (a - \bar{a}) = 0$$

Mais:  $a = \frac{1}{2} [\{a\} + a - \bar{a}]$ ;  $a - \bar{a}$  étant permutable à toute norme,

il suffit, pour obtenir la proposition 2, de démontrer que  $x$  est nul si on remplace  $a$  par  $\{a\}$ . Pour simplifier l'écriture, on supposera désormais que  $a$  désigne une trace.



De (19) on déduit alors:

$$ax = a^2 \cdot Nb - a \cdot Nb \cdot a = a^2 \cdot Nb - (x + Nb \cdot a)a = a^2 Nb - Nb \cdot a^2 - x \cdot a$$

D'où:  $2ax = a^2 \cdot Nb - Nb \cdot a^2$  (car  $ax = xa$ )

Par induction:

$$k a^{k-1} x = a^k \cdot Nb - Nb \cdot a^k \quad (21)$$

Supposons que l'équation minimale vérifiée par  $a$  soit:

$$f(a) = \lambda_0 a^{n+1} + \lambda_1 a^n + \dots + \lambda_{n-1} a^2 + \lambda_n a = 0, \lambda_i \in P. \quad (22)$$

(on rappelle que dans les § 9 et 10,  $\mathfrak{A}$  n'a pas nécessairement une unité)

De (19), (21), (22) on déduit:

$$x \sum_1^{n+1} k a^{k-1} \lambda_{n-k+1} = f(a) \cdot Nb - Nb \cdot f(a) = 0 \quad (23)$$

(22) et (23) impliquent alors:

$$x \left[ (n+1) f(a) - \sum_{k=1}^{k=n+1} k a^k \lambda_{n-k+1} \right] = x \cdot R(a) = 0 \quad (24)$$

avec  $R(a) = \sum_{k=1}^{k=n} (n+1-k) a^k \lambda_{n-k+1}$

Deux cas sont alors à distinguer:

1°) Le corps de base  $P$  a une caractéristique nulle:

$\forall k$ , on a:  $n+1-k \neq 0$  et, d'autre part, le dernier coefficient de l'équation (22) peut être supposé non nul (sinon, en divisant les deux membres de (22) par une puissance convenable de  $a$  régulier, on obtiendrait une équation de degré inférieur). Ainsi,  $R(a)$  est un polynôme de  $\mathfrak{A}$  non identiquement nul et de degré strictement inférieur à celui de  $f(a)$ ; il ne peut être nul, sinon  $f(a) = 0$  ne serait pas une équation minimale; donc  $R(a)$  est un élément régulier comme somme d'éléments qui sont tous des traces.

(24) implique donc  $x = 0$ , i.e.:  $a \cdot Nb = Nb \cdot a, \forall b$

2°)  $P$  a pour caractéristique  $p$ .

Le raisonnement du 1°) est en défaut si:

$$\forall k = 1, 2, \dots, n, (n+1-k) \lambda_{n-k+1} = 0$$

i.e. si, et seulement si:  $\alpha) n = mp$  (car pour  $k = 1, \lambda_n \neq 0$ )

et:  $\beta) k \equiv 1 \pmod{p}$  si  $\lambda_{n-k+1} \neq 0, k \neq 1$

On pose:  $k = m_k p + 1$  pour  $1 < k < n$ ; d'où:

$$f(a) = \lambda_0 a^{m p + 1} + \sum_{1 < k < n} \lambda_{n - m_k p} a^{m_k p + 1} + \lambda_n a = 0 \quad (25)$$

$P$  étant parfait, chacun de ses éléments est la puissance  $p^{\text{ième}}$  d'un élément de ce même corps, i.e.:

$$\forall \lambda \in P, \exists \lambda' \text{ tel que } \lambda = (\lambda')^p$$

Alors,  $a$  étant régulier, après multiplication des deux membres de (25) par  $a^{p-1}$ , on obtient:

$$f(a) = (\lambda'_0)^p a^{(m+1)p} + \sum_{1 < k < n} (\lambda'_{n - m_k p})^p a^{(m_k + 1)p} + (\lambda'_n)^p a^p = 0 \quad (26)$$

i.e.

$$f(a) = (\lambda'_0 a^{m+1} + \sum_{1 < k < n} \lambda'_{n - m_k p} a^{m_k + 1} + \lambda'_n a)^p = 0 \quad (27)$$

Le polynôme entre parenthèses étant un élément régulier comme somme de traces, (25) implique:

$$\lambda'_0 a^{m+1} + \sum_{1 < k < n} \lambda'_{n - m_k p} a^{m_k + 1} + \lambda'_n a = 0$$

Or le degré  $m + 1$  de cette équation est inférieur au degré de l'équation minimale vérifiée par  $a : m p + 1$ , ce qui est à exclure.

Une équation du type (25) est donc impossible et le raisonnement du 1<sup>o</sup>) s'applique encore, q.e.d.

#### 11. — Corollaire 4 :

*L'ensemble  $T$  des traces appartient au centre de l'algèbre.*

En effet, soit  $a$  un élément régulier fixe de  $\mathfrak{A}$ ,  $z$  un élément général:

$$N(z + \bar{a}) = Nz + Na + \{za\} \quad (\text{car } Na = N\bar{a})$$

$$\{za\} = N(z + \bar{a}) - Nz - Na,$$

élément du centre de  $\mathfrak{A}$ ; d'autre part, toute norme est une trace et la somme du second membre appartient à  $T$ . Mais  $za$  est un élément général de  $\mathfrak{A}$ , d'où le corollaire.

#### 12. — Théorème 2 :

*Une algèbre simple non commutative  $\mathfrak{A}$  de corps de base parfait, qui admet une involution vérifiant :  $Nz = N\bar{z}$ , ainsi que les conditions 1<sup>o</sup>) et 2<sup>o</sup>) du § 1,  $\forall z \in \mathfrak{A}$ , est une algèbre de quaternions généralisés,  $\mathcal{F}$ -algèbre triviale pour l'involution classique.*

Soit  $C$  le centre de  $\mathfrak{A}$ ,  $C$  est donc un corps puisque l'algèbre est simple.

$$Nz = z\bar{z} = a \in C$$

$$\{z\} = z + \bar{z} = b \in C$$

D'où: 
$$z(b-z) = a$$

i.e.: 
$$z^2 - bz - a = 0.$$

Ainsi l'équation minimum vérifiée par un élément général de cette algèbre est du second degré sur le centre. D'où le théorème.

On étudie maintenant des exemples de  $\mathcal{F}$ -algèbres qui ne sont ni des corps ni des algèbres de quaternions généralisés.

13. — EXEMPLE DE  $\mathcal{F}$ -ALGÈBRE COMMUTATIVE

Soit  $P$  le corps des rationnels,  $\mathfrak{A}$  l'algèbre commutative  $P(a, b, c, d)$  dont une base  $a, b, c, d$  sur  $P$  vérifie la loi « associative » de composition définie par le tableau ci-contre:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$0$	$0$
$b$	$b$	$-a$	$0$	$0$
$c$	$0$	$0$	$c$	$d$
$d$	$0$	$0$	$d$	$-c$

$\mathfrak{A}$  a donc des éléments irréguliers, notamment  $a, b, c, d$ .

Un élément général est:

$$Z = xa + yb + zc + td \quad x, y, z, t \in P$$

On vérifie que la bijection laissant invariant tout élément de  $P$  et telle que:  $a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow d$  est une involution;  $a + c$  est l'unité de  $\mathfrak{A}$ .

Alors:

$$\bar{Z} = xc + yd + za + tb$$

et:

$$\{Z\} = (x+z)(a+c) + (y+t)(b+d)$$

du type

$$\{Z\} = X(a+c) + Y(b+d) \quad X, Y \in P$$

Si  $\{Z\}$  est un élément non nul, irrégulier,  $X$  et  $Y$  ne sont pas simultanément nuls et il existe  $x', y', z', t' \in P$ , non tous nuls, tels que:

$$[(a+c)X + (b+d)Y] (ax' + by' + cz' + dt') = 0$$

i.e.:

$$a(Xx' - Yy') + b(Yx' + Xy') + c(Xz' - Yt') + d(Yz' + Xt') = 0$$

et de:

$$X^2 + Y^2 \neq 0, Xx' - Yy' = Yx' + Xy' = Xz' - Yt' = Yz' + Xt' = 0$$

on déduit:

$$x' = y' = z' = t' = 0 \text{ ce qui est exclu.}$$

Pour  $\mathfrak{A}$ , la condition 2<sup>o</sup>) du § 2 est donc vérifiée et il est clair que la condition 1<sup>o</sup>) l'est aussi.

Démontrons que la condition 3<sup>o</sup>) est vérifiée.

Elle l'est pour tout  $Z$ , tel que  $\{Z\} \neq 0$ .

Si  $\{Z\} = 0$ ,  $x = -z$  et  $y = -t$ . Donc:

$$Z = x(a-c) + y(b-d)$$

puis:  $Za = xa + yb$

Alors:  $\{Za\} = x(a+c) + y(b+d)$

$Z \neq 0$  implique que  $x, y$  ne sont pas simultanément nuls. Donc  $\{Za\} \neq 0$ , q.e.d.

$\mathfrak{A}$  est donc une  $\mathcal{F}$ -algèbre.

On vérifie que le théorème 1 s'applique. Soit par exemple l'équation:

$$aZ = 0 \tag{28}$$

$aZ = a(xa + yb + zc + td) = xa + yb = 0$ , donc  $x = y = 0$  et la solution générale de l'équation (28) est:

$$Z = zc + td = c(zc + td)$$

du type:  $Z = \bar{a}\lambda$ , avec  $\lambda = zc + td$ , puisque  $c = \bar{a}$

La norme de l'élément général est:

$$\begin{aligned} NZ &= (xa + yb + zc + td)(xc + yd + za + tb) \\ &= (xz - yt)a + (xt + yz)b + (xz - yt)c + (yz + xt)d \end{aligned}$$

Elle est nulle si, et seulement si:

$$xz = yt \text{ et } xt = -yz$$

L'ensemble  $V$  des éléments irréguliers a pour image, dans l'espace affine à 4 dimensions  $(x, y, z, t)$ , l'ensemble des deux plans:

$$x = y = 0 \text{ et } z = t = 0, \text{ privés de l'origine.}$$

14. — EXEMPLE DE  $\mathcal{F}$ -ALGÈBRE NON COMMUTATIVE.

Soit  $\mathfrak{A}(a, b, c, d)$  l'algèbre sur le corps  $P$  des rationnels, définie par le tableau ci-contre, et munie de l'involution:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$0$	$0$
$b$	$b$	$ma$	$0$	$0$
$c$	$0$	$0$	$c$	$d$
$d$	$0$	$0$	$d$	$mc$

$$a \leftrightarrow c, \quad b \leftrightarrow d$$

puis  $Q(u, v, uv)$  un corps de quaternions sur  $P$ , tel que:

$$u^2 = \alpha < 0, \quad v^2 = \beta < 0, \quad uv = -vu,$$

muni de l'involution classique sur  $P$

$$m \in P, \quad m > 0 \text{ (non carré)}$$

$$u \leftrightarrow -u, \quad v \leftrightarrow -v$$

L'algèbre  $\mathcal{B} = \mathfrak{A} \times Q$  sur  $P$  est non commutative et elle admet l'involution induite par les deux involutions précédentes;  $a + c$  est l'unité de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $x, y, z, t$  des quaternions généraux de  $Q$ . L'élément général de  $\mathcal{B}$  est du type:

$$Z = xa + yb + zc + td$$

( $a, b, c, d$  sont donc permutable à  $x, y, z, t$ ) et

$$\bar{Z} = \bar{x}c + \bar{y}d + \bar{z}a + \bar{t}b$$

Donc:  $\{Z\} = (x + \bar{z})a + (y + \bar{t})b + (z + \bar{x})c + (t + \bar{y})d$

du type:  $\{Z\} = Xa + Yb + \bar{X}c + \bar{Y}d$

( $X, Y$  quaternions généraux)

1°) Si  $p \in P$ , on a évidemment:  $\{pZ\} = p\{Z\}$

2°) Supposons  $Z \neq 0$  et  $\{Z\} \neq 0$ , i.e.  $X$  et  $Y$  non simultanément nuls.

On étudie l'équation:

$$\{Z\} Z' = 0 \tag{29}$$

où:  $Z' = x'a + y'b + z'c + t'd$

$$\{Z\} \cdot Z' = (Xx' + mYy')a + (Xy' + Yx')b + (\bar{X}z' + m\bar{Y}t')c + (\bar{X}t' + \bar{Y}z')d$$

L'équation (29) équivaut à l'ensemble des deux systèmes d'équations quaternioniennes:

$$\begin{cases} Xx' + mYy' = 0 \\ Yx' + Xy' = 0 \end{cases} \quad (30) \qquad \begin{cases} \bar{X}z' + m\bar{Y}t' = 0 \\ \bar{Y}z' + \bar{X}t' = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Supposons que l'un des deux quaternions  $X, Y$ ,  $X$  par exemple ne soit pas nul; posons  $g = X^{-1}Y$ , puisque  $X$  est régulier.

De (30) on déduit:

$$\begin{cases} x' + mgy' = 0 \\ gx' + y' = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Le système (32) ne peut avoir une solution non triviale en  $x'$  et  $y'$  que dans le cas où:

$$g^2 = m^{-1} \quad (\in P) \quad (33)$$

ce qui exige que  $g$  soit un quaternion pur, donc que  $g^2$  soit forme quadratique définie négative (d'après les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$ ). (32) est donc impossible, car  $m > 0$ . Donc nécessairement  $x' = y' = 0$ .

Raisonnement similaire avec le système (31) en posant:

$$g' = \bar{X}^{-1}\bar{Y} \quad \text{et on a: } z' = t' = 0$$

La trace  $\{Z\}$  n'admet donc pas de diviseur associé de zéro et la condition 2<sup>o</sup>) du § 2 est vérifiée.

3<sup>o</sup>) Si  $\{Z\} = 0$ , on a  $X = Y = 0$ , i.e.:  $x = -\bar{z}$ ,  $y = -\bar{t}$

En ce cas:  $Z = xa + yb - \bar{x}c - \bar{y}d$

Si  $Z \neq 0$ , l'un des quaternions  $x$  ou  $y$ ,  $x$  par exemple, n'est pas nul  
 $Za = xa + yb$ ,  $\bar{Z}a = \bar{x}c + \bar{y}d$ ,  $\{Za\} = xa + yb + \bar{x}c + \bar{y}d \neq 0$

La condition 3<sup>o</sup>) du § 2 est vérifiée.  $\mathcal{B}$  est donc une  $\mathcal{F}$ -algèbre.

D'autre part:

$$NZ = (x\bar{z} + my\bar{t})a + (x\bar{t} + y\bar{z})b + (z\bar{x} + mt\bar{y})c + (t\bar{x} + z\bar{y})d$$

$NZ = 0$  équivaut à :

$$\begin{cases} x\bar{z} + my\bar{t} = 0 \\ x\bar{t} + y\bar{z} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Si  $x \neq 0$ , par exemple, posant  $x^{-1}y = g''$ , on déduit de (33) la condition nécessaire:  $g''^2 = m^{-1}$ , exclue. Donc:  $x = 0$  et  $y = 0$  ou  $z = t = 0$  sont les seuls systèmes de solutions pour le système quaternionien (34).

Dans l'espace affine à 16 dimensions des coordonnées des quaternions  $x, y, z, t$  l'image de l'ensemble  $V$  des éléments irréguliers se compose de deux variétés linéaires à 8 dimensions privées de l'origine.

15. — EXEMPLE D'UNE ALGÈBRE A INVOLUTION QUI N'EST PAS  $\mathcal{F}$ -ALGÈBRE.

Soit  $\mathfrak{A}(a, b, c, d, e, f)$  l'algèbre définie sur le corps  $P$  des rationnels par un système de générateurs du groupe  $S_3$  des permutations de trois éléments, vérifiant la loi de composition définie par le tableau suivant [8]:

	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$	$a$	$b$	$e$	$d$	$f$	$c$
$b$	$b$	$e$	$a$	$f$	$c$	$d$
$c$	$c$	$f$	$d$	$e$	$b$	$a$
$d$	$d$	$c$	$f$	$a$	$e$	$b$
$f$	$f$	$d$	$c$	$b$	$a$	$e$

Un élément général est:

$$Z = xa + yb + zc + td + eu + fv;$$

$$x, y, z, t, u, v \in P$$

Une involution sur  $P$  est définie par:

$$a \leftrightarrow b, \quad e \leftrightarrow e, \quad c \leftrightarrow -c, \quad d \leftrightarrow -d,$$

$$f \leftrightarrow -f$$

$$\bar{Z} = xb + ya - zc - td + eu - fv$$

et:

$$\{Z\} = 2eu + (x+y)(a+b)$$

Pour:  $2u = 1, x = y = \frac{1}{2}, \{Z\} = a + b + e$  est un élément irrégulier de  $\mathfrak{A}$ , car:

$$(a+b+e)(a-b) = 0$$

La condition 2<sup>o</sup>) du § 2 n'est pas vérifiée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALBERT: *American Math. Society*. 1961. Structure of algebras. p. 151.
- [2] STUDY: *Math. Zeitschrift*. Tome 18. p. 62.
- [3] PIMIÄ: *Ac. Sc. Finlande* 1941. *Ann 1-9*. Abbildung der Lieschen Kugelgeometrie auf eine höhere complexe gerade.
- [4] PERNET: *Ac. Royale de Belgique*. 1963. Une géométrie conforme quaternionienne et son extension.
- [5] ALBERT, A.: p. 24, § 7.
- [6] ALBERT, A.: p. 37. Theorem I.
- [7] DEURING, M.: *Algebren — Ergebnisse der Mathematik*. P. 7.
- [8] ZASSENHAUS: *The theory of groups*. P. 9.

(Reçu le 11 avril 1970)

R. PERNET  
13 place Maréchal Lyautey  
F-69-Lyon



**Vide-leer-empty**