

9. Exemples de géodésiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si m, n sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longueur $d(m, n)$) est *unique*.

(8.5): les géodésiques sont invariantes par isométries: si $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une isométrie et c une géodésique de (N, h) , alors $f \circ c$ est une géodésique de (M, g) .

9. Exemples de géodésiques.

(9.1): les géodésiques de (S^n, g_0) sont les grands cercles (parcourus uniformément).

En effet, soit c une géodésique de (S^n, g_0) et m, n deux points de c assez voisins pour vérifier (8.4). Soit P le sous-espace vectoriel de dimensions deux de $\mathbf{R}^{n+1}$ déterminé par m et n , C le grand cercle $P \cap S^n$ et s la symétrie euclidienne par rapport à P et restreinte à S^n . Les seuls points fixes de s sont les points de C . Comme s est une isométrie de (S^n, g_0) elle transforme la restriction $\bar{c}$ de c de m à n en une géodésique $s \circ \bar{c}$ (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc $s \circ \bar{c} = \bar{c}$, donc $\bar{c} \subset C$. En particulier:

(9.2): les géodésiques de (S^n, g_0) sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur 2π .

On va voir en fait que les géodésiques des (P_i^n, g_0) ont les mêmes propriétés.

(9.3): géodésiques des submersions riemanniennes.

Soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(9.4): si c est une géodésique de (M, g) telle que $c'(0) \in H_{c(0)}$, alors c est horizontale (voir (3.6));

(9.5): si c est une telle géodésique horizontale de (M, g) , alors $p \circ c$ est une géodésique de (N, h) .

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de (N, h) par projection des géodésiques horizontales de (M, g)).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit c une géodésique de (N, h) et m, n deux points de c assez voisins pour vérifier (8.4). Soit $\tilde{c}$ un relèvement horizontal de c et $\tilde{m}, \tilde{n}$ les relèvements de m, n . Soit d la plus courte géodésique de $\tilde{m}$ à $\tilde{n}$ (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\text{long}(p \circ d) \leq \text{long}(d) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = d(m, n).$$

Comme $p \circ d$ est d'extrémités m, n c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.

(9.6): géodésiques des P_i^n ($i=1, 2, 4$).

Considérant les submersions riemanniennes (2.9), on voit que (9.5) montre que les géodésiques des (P_i^n, g_0) sont les projections des géodésiques horizontales (pour la submersion considérée) de S^{in+i-1} . Il suffit donc de savoir comment se projettent les grands cercles horizontaux de S^{in+i-1} sur P_i^n . On voit d'abord que les grands cercles de S^{in+i-1} revêtent tous deux fois les géodésiques de (P_i^n, g_0) , parce que $p(-m) = p(m)$ pour tout $m \in S^{in+i-1}$. Donc:

(9.7): les géodésiques des (P_i^n, g_0) sont toutes des courbes simples, périodiques et de longueur π .

Pour se faire une idée de la géométrie des P_i^n ($i=0, 1, 2, 4$), il faut encore savoir comment se rencontrent deux géodésiques c, d issues d'un $m = c(0) = d(0)$. Pour (S^n, g_0) , elles se rencontrent exactement à la distance π en l'antipode de m , puis de nouveau en m au temps 2π (et c'est tout!). On en déduit que pour (P_1^n, g_0) , revêtu deux fois par (S^n, g_0) , les géodésiques issues d'un $m \in P_1^n$ ne se rencontrent pas ailleurs qu'en m (ce sont les droites projectives passant par m). Le milieu (situé à une distance $\frac{\pi}{2}$ de m) de ces géodésiques de P_1^n passant par m décrit l'hyperplan projectif dual de m , dans la dualité associée à la structure euclidienne de K^{n+1} .

Pour les P_i^n ($i=2, 4$), on note d'abord que $T_m P_i^n$ est un K -espace vectoriel. La relation d'équivalence sur $K^{n+1} - \{0\}$, qui donne naissance à P_i^n montre que ([1], p. 130) c et d ne se rencontrent pas ailleurs qu'en m si $d'(0) \notin K \cdot c'(0)$. Si par contre $d'(0) \in K \cdot c'(0)$, alors c et d se rencontrent en plus seulement en leur point à distance $\frac{\pi}{2}$ de m . En outre, lorsque $d'(0)$ parcourt $K \cdot c'(0)$, les géodésiques correspondantes forment une sphère de dimension i de P_i^n , sphère qui n'est autre qu'une droite projective. Et lorsque ces différentes i -sphères-droites projectives passant par m remplissent P_i^n , les antipodes de m sur ces sphères décrivent l'hyperplan projectif dual de m (pour la structure hermitienne de K^{n+1}), hyperplan qui est une sous-variété de dimension réelle $i(n-1)$ de P_i^n . On notera aussi que ces droites projectives (resp. hyperplans projectifs) sont isométriques (comme sous-variété de (P_i^n, g_0)) aux $(S^i, \frac{1}{2}g_0)$ (resp. (P_i^{n-1}, g_0)) (ce sont même des sous-variétés totalement géodésiques).

(9.8): le cas de (P_8^2, g_0) .

Pour étudier les géodésiques de (P_8^2, g_0) , il faut (voir (2.7)) utiliser la technique des espaces symétriques; on trouvera dans [11], p. 356 et surtout

dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de (P_8^2, g_0) est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des (P_i^n, g_0) ($i=1, 2, 4$), en prenant $K = \mathbf{Ca}$ et $i = 8$.

10. Géodésiques périodiques.

(10.1): *définition*: une géodésique $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ est dite périodique (ou fermée) si c est non constante et si $c'(a) = c'(b)$. Elle est dite en outre simple si $c|_{[a,b[}$ est injective.

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que c se prolonge en une géodésique $\bar{c} : \mathbf{R} \rightarrow M$ telle que $\bar{c}|_{[a,b]} = c$ et $c(t+b-a) = c(t)$ pour tout t . La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

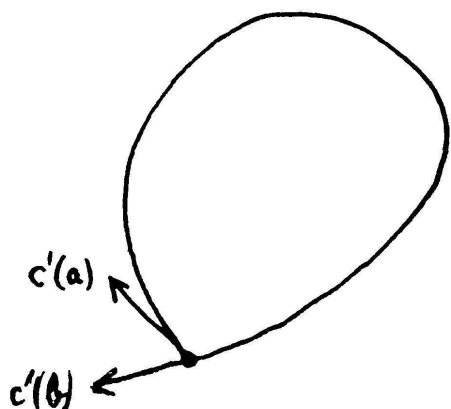


Fig. 1

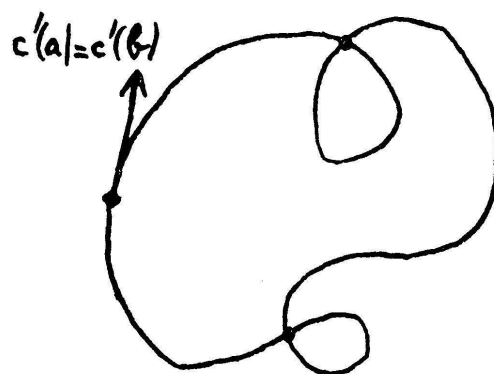


Fig. 2

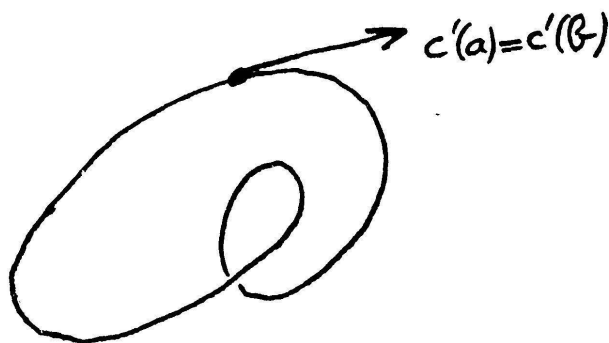


Fig. 3

Pour une v.r. (M, g) on introduit les trois assertions:

(10.2): « GPS (m) »: $\forall x \in T_m M, x \neq 0$, la géodésique c telle que $c'(0) = x$ est périodique, simple et de longueur π ;