8. Définition.

tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\operatorname{vol}(M \times N, g) \geqq \alpha(g) \,.\, \beta(g)$ pour toute g. Voir aussi [11′].

Géodésiques.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

(8.1) $\quad d(m, n) = \inf_c \operatorname{long}(c, g)$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ (I intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I \; \exists\, t' > t$, $t' \in I$, tel que $\operatorname{long}(c|_{[t,t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

(8.2) $\forall\, m, n \in M \; \exists\, c$, courbe d'extrémités m, n, telle que $\operatorname{long}(c, g) = d(m, n)$;

(8.3) $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique c: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'(0) = x$.

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si m, n sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longeur $d(m, n)$) est *unique.*

(**8.5**): les géodésiques sont invariantes par isométries: si $f : (M, g) \to (N, h)$ est une isométrie et c une géodésique de (N, h), alors $f \circ c$ est une géodésique de (M, g).

9. *Exemples de géodésiques.*

(**9.1**): *les géodésiques de* (S^n, g_0) *sont les grands cercles* (parcourus uniformément.

En effet, soit c une géodésique de (S^n, g_0) et m, n deux points de c assez voisins pour vérifier (8.4). Soit P le sous-espace vectoriel de dimensions deux de $\mathbf{R}^{n+1}$ déterminé par m et n, C le grand cercle $P \cap S^n$ et s la symétrie euclidienne par rapport à P et restreinte à S^n. Les seuls points fixes de s sont les points de C. Comme s est une isométrie de (S^n, g_0) elle transforme la restriction $\bar{c}$ de c de m à n en une géodésique $s \circ \bar{c}$ (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc $s \circ \bar{c} = \bar{c}$, donc $\bar{c} \subset C$. En particulier:

(**9.2**): les géodésiques de (S^n, g_0) sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur 2π.

On va voir en fait que les géodésiques des (P_i^n, g_0) ont les mêmes propriétés.

(**9.3**): *géodésiques des submersions riemanniennes.*

Soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(**9.4**): si c est une géodésique de (M, g) telle que $c'(0) \in H_{c(0)}$, alors c est horizontale (voir (3.6));

(**9.5**): si c est une telle géodésique horizontale de (M, g), alors $p \circ c$ est une géodésique de (N, h).

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de (N, h) par projection des géodésiques horizontales de (M, g)).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit c une géodésique de (N, h) et m, n deux points de c assez voisins pour vérifier (8.4). Soit $\tilde{c}$ un relèvement horizontal dè c et $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ les relèvements de m, n. Soit d *la* plus courte géodésique de $\tilde{m}$ à $\tilde{n}$ (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\operatorname{long}(p \circ d) \leqq \operatorname{long}(d) \leqq \operatorname{long}(\tilde{c}) = \operatorname{long}(c) = d(m, n).$$

Comme $p \circ d$ est d'extrémités m, n c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.